Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П.О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

ДИНАМИКА

ПРАКТИКУМ
по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженерно-технических специальностей

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2007

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

УДК 531.3(075.8)
ББК 22.213я73
Д46

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (протокол № 2 от 28.11.2005 г.)

Авторы-составители: *О. Н. Шабловский, М. И. Лискович*
Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Обработка материалов давлением» ГГТУ им. П. О. Сухого *Ю. Л. Бобарикин*

Д46 **Динамика** : практикум по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженер.-техн. специальностей / авт.-сост.: О. Н. Шабловский, М. И. Лискович. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2007. – 56 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-497-9.

Изложены основные теоретические и методические предпосылки составления уравнений Лагранжа второго рода. Каждый этап алгоритма детально анализируется и иллюстрируется конкретными примерами механических систем с одной и двумя степенями свободы. Представлен набор из 108 вариантов индивидуальных заданий, предназначенных для выполнения расчетно-графических работ и для самостоятельной работы студентов.

Для студентов инженерно-технических специальностей.

УДК 531.3(075.8)
ББК 22.213я73

ISBN 978-985-420-497-9

© Шабловский О. Н., Лискович М. И., составление, 2007
© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2007

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

1. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим механическую систему, подчиненную голономным связям. Уравнения движения системы в независимых координатах, или уравнения Лагранжа второго рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = \overline{1, s}. \tag{1}$$

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t),$$

$$Q_j = Q_j\,(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t).$$

Для случая сил, имеющих потенциал, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, s},$$

или, что то же,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, s}, \quad L = T - \Pi, \quad \Pi = \Pi(q_j, t). \tag{2}$$

Функция L называется *кинетическим потенциалом* (*функцией Лагранжа*) и представляет собой разность между кинетической и потенциальной энергиями системы.

Перечислим отличительные черты уравнений Лагранжа второго рода:

1. Уравнения (1) составляют систему s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат q_1, q_2, …, q_s, являющихся искомыми функциями аргумента t. Общий интеграл этой системы содержит $2s$ произвольных постоянных интегрирования, которые отыскиваются из начальных условий задачи.

2. Число уравнений системы (1) не зависит от конструктивных сложностей машины и равно числу её степеней свободы.

3. Реакции связей не входят в уравнения (1). Силы, действующие на механическую систему, фигурируют здесь в виде обобщенных сил. Тем самым, для случая идеальной машины, учитывается работа движущих сил и работа полезных сил сопротивления, для преодоле-

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

ния которых создана машина. Все промежуточные силы в передаточных звеньях исключаются из постановки задачи.

В различных технических приложениях механики требуется найти только движение механической системы, не определяя реакций связей, поэтому уравнения Лагранжа второго рода нашли очень широкое применение.

2. АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

I. *Определение числа s степеней свободы изучаемой голономной механической системы.*

Физически содержательным является способ определения s с помощью наложения на систему дополнительных связей.

Каждая последовательно вводимая добавочная связь должна быть независимой от уже имеющихся связей. Наложение дополнительных связей производится до тех пор, пока число степеней свободы не станет нулевым. Тогда число дополнительно наложенных независимых связей будет равно числу степеней свободы исходной механической системы.

II. *Выбор обобщенных координат, однозначно определяющих положение всех точек механической системы.*

В большинстве практических задач в качестве q_j, $j = \overline{1, s}$ берут расстояния (длины) или углы. Затем дифференцированием по времени вычисляют обобщенные скорости $\dot{q}_j$, $j = \overline{1, s}$. Все остальные координаты и скорости определяются через соответствующие независимые величины.

III. *Подсчет кинетической энергии системы.*

Для этого применяются следующие формулы:

а) при *поступательном* движении тела

$$T = m\frac{V^2}{2},$$

где m – масса, V – скорость любой точки тела;

б) при *вращательном* движении тела

$$T = J_z\frac{\omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z; ω – угловая скорость вращения тела вокруг неподвижной оси z;

Библиотека БГУИР / watermark

в) при *плоском* (плоско-параллельном) движении тела

$$T = m\,\frac{V_c^2}{2} + J_{c\zeta}\,\frac{\omega^2}{2}$$

либо

$$T = J_{p\zeta}\,\frac{\omega^2}{2},$$

где $J_{c\zeta}$ – момент инерции тела относительно оси ζ, проходящей через центр масс и ортогональной плоскости движения; $J_{p\zeta}$ – момент инерции относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей, и ортогональной плоскости движения; ω – угловая скорость вращения тела;

г) при *сферическом* движении тела

$$T = J_{o\zeta}\,\frac{\omega^2}{2},$$

где $J_{o\zeta}$ – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения; ω – мгновенная угловая скорость;

д) в более сложных в кинематическом отношении случаях надо применять теорему Кенига, согласно которой кинетическая энергия системы материальных точек равна кинетической энергии центра масс системы, определенной в предположении, что в нем сосредоточена вся масса системы, сложенной с кинетической энергией относительного движения системы около центра масс. Следовательно,

$$T = m\,\frac{V_c^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} m_i\,\frac{V_{ir}^2}{2}, \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i\,, \quad \vec{V}_i = \vec{V}_c + \vec{V}_{ir},$$

где $\vec{V}_c$ – скорость центра масс системы; $\vec{V}_{ir}$ – относительная скорость точки в движении системы относительно центра масс.

В итоговой записи кинетической энергии надо исключить зависимые координаты и скорости, заменяя их представлениями через независимые координаты и скорости.

Затем надо найти частные производные кинетической энергии по обобщенным координатам и по обобщенным скоростям:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial q_s}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s},$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

а также вычислить полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right), \ \ldots, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right).$$

IV. *Вычисление обобщенных сил.*

Точкам механической системы придаются возможные (виртуальные) перемещения и составляется выражение работы δA_F; если при этом были введены зависимые виртуальные перемещения, они заменяются их представлениями через независимые и строится формула вида $\delta A_F = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j$.

Тогда коэффициенты при независимых вариациях δq_j являются соответствующими *обобщенными силами* Q_j. В теории механизмов и машин обобщенная сила механизма называется *приведенной силой*.

Если приложенные к системе силы имеют потенциал, то вычисляется потенциальная энергия П системы, и обобщенная сила отыскивается по формуле

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

V. *Заключительный этап: интегрирование уравнений Лагранжа.*

Составляем уравнения Лагранжа (1) и интегрируем получаемую систему s обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях

$$t = 0: \ q_j = q_j^0, \ \dot{q}_j = \dot{q}_j^0, \ j = \overline{1, s}.$$

В результате приходим к зависимостям $q_j = q_j(t)$, однозначно определяющим движение рассматриваемой механической системы при $t \geq 0$.

Отметим важный частный случай. Если выражение функции Лагранжа L не содержит явно обобщенную координату q_r, но содержит обобщенную скорость $\dot{q}_r$, то такая координата называется *циклической*.

Пусть циклическими являются координаты q_r, $r = \overline{1, m}$:

$$L = L(t, q_{m+1}, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \ \ldots, \ \dot{q}_m, \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_s),$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

тогда уравнения Лагранжа (2), соответствующие циклическим координатам, упрощаются:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) = 0, \quad r = \overline{1, m}$$

и имеют первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = c_r, \quad r = \overline{1, m}.$$

В этом случае с помощью метода Рауса число дифференциальных уравнений в системе (2) можно уменьшить на число m циклических координат. В результате получается $s - m$ дифференциальных уравнений второго порядка для координат $q_j(t)$, $j = m + 1, \ldots, s$. После интегрирования этих уравнений циклические координаты как функции времени определяются из m дифференциальных уравнений первого порядка.

В дальнейшем будем рассматривать движения механических систем с одной ($s = 1$) и двумя ($s = 2$) степенями свободы.

Движение системы с одной степенью свободы, согласно (1), определяется одним дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной:

$$\ddot{q} = f(t, q, \dot{q}); \quad t = 0, \quad q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0. \tag{3}$$

Если $f = f(t)$, то интегрирование (3) затруднений не составляет:

$$q(t) = q(0) + t\dot{q}(0) + \int_0^t \left[\int_0^\tau f(\tau) d\tau\right] dt, \quad \tau \equiv t.$$

Если $f = f_0(t) + b_1 q + b_2 \dot{q}$, где b_1, b_2 – const, то уравнение (3) можно проинтегрировать, применяя метод Эйлера в совокупности с методом вариации постоянных.

В некоторых случаях правая часть (3) нелинейно зависит от q, $\dot{q}$, но зависимость эта такова, что удается получить решение в квадратурах, применяя один из способов *понижения порядка* [2], [7]. Различные аналитические методы для уравнения (3) изложены в [2], там же имеется богатый справочный материал.

В тех случаях, когда не удается получить аналитическое решение задачи (3), проводят *численное интегрирование* с помощью ПЭВМ [6].

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Для механической системы с двумя степенями свободы, согласно (1), имеем два уравнения, характеризующие движение:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 = A_1,$$

$$a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 = A_2, \quad t = 0: \quad q_i = q_i^0, \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i^0;$$

$$a_{ij} = a_{ij}(t,\ q_1,\ q_2), \quad A_i = A_i(t,\ q_1,\ q_2,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2), \quad i, j = 1, 2.$$

Для широкого круга технических приложений эти уравнения могут быть разрешены относительно старших производных:

$$\ddot{q}_i = f_i(t, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2); \quad t = 0, \quad q_i = q_i^0, \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i^0, \quad i = 1, 2. \qquad (4)$$

Удобное для практических расчетов аналитическое решение может быть получено, если (4) есть линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами [2], [7]. В более сложных случаях целесообразно проводить численное интегрирование (4) в сочетании с качественным анализом.

Исследование и построение решения задачи (4) в общем случае является важной и трудной задачей механики и математики, требующей применения тонких качественных методов и сложных вычислительных алгоритмов.

Изучению движения механических систем с конечным числом степеней свободы посвящены специальные разделы механики: теория свободных и вынужденных колебаний, теория устойчивости движения и др.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Задача 1. Имеется маятник, состоящий из материальной точки массы m, подвешенной на нити, длина которой изменяется по произвольно заданному закону $l = l(t)$. Точка подвеса маятника движется по закону $\xi = \xi(t)$ по наклонной прямой, образующей угол α с горизонтом. Составить уравнение движения маятника, пренебрегая массой нити.

Решение. Возьмем оси прямоугольной декартовой системы координат так, как показано на рис. 1: Ox – горизонтальна, Oy – вертикальна.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Движение точки подвеса *A* происходит по прямой *OB*: $OA = \xi(t)$. Функции $l(t)$, $\xi(t)$ заданы, поэтому положение точки *M* в каждый момент времени однозначно определяется одной обобщенной координатой: углом φ между нитью и вертикалью. Вычислим координаты точки *M* в ее абсолютном движении относительно *xOy*:

$$x(t) = \xi \cos \alpha + l \sin \varphi, \quad y(t) = \xi \sin \alpha + l \cos \varphi, \quad \alpha = \text{const}. \qquad (5)$$

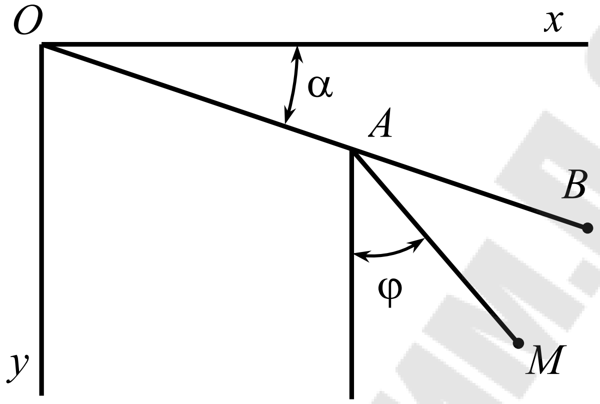


Рис. 1

Продифференцировав по времени эти зависимости,

$$\dot{x} = \dot{\xi}\cos\alpha + \dot{l}\sin\varphi + l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{\xi}\sin\alpha + \dot{l}\cos\varphi - l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

вычисляем кинетическую энергию точки *M*:

$$T = m\frac{V^2}{2}, \quad V^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\xi}\dot{l}\sin(\alpha+\varphi) + 2l\dot{\xi}\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi).$$

Необходимые в дальнейшем производные от *T* имеют вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m\left[\dot{\xi}\dot{l}\cos(\alpha+\varphi) - l\dot{\xi}\dot{\varphi}\sin(\alpha+\varphi)\right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\left[l^2\dot{\varphi} + l\dot{\xi}\cos(\alpha+\varphi)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\left[l^2\ddot{\varphi} + 2l\dot{l}\dot{\varphi} + \dot{l}\dot{\xi}\cos(\alpha+\varphi) + l\ddot{\xi}\cos(\alpha+\varphi) - l\dot{\xi}\dot{\varphi}\sin(\alpha+\varphi)\right].$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

В данной постановке задачи присутствует одна активная сила – сила тяжести $m\vec{g}$, совершающая работу на вертикальном перемещении точки. Имеем: $\delta A = mg\delta y$, где δy можно вычислить, проварьировав (5) при неизменном времени:

$$\delta y = -l \sin\varphi\, \delta\varphi, \quad \delta A = -mgl \sin\varphi\, \delta\varphi.$$

Следовательно, обобщенная сила Q_φ, соответствующая обобщенной координате φ, есть $Q_\varphi = -mgl \sin\varphi$. Составляем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

и после несложных преобразований получаем

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{\ddot{\xi}}{l}\cos(\alpha + \varphi) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \qquad (6)$$

$$t = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Исследование этого уравнения представляет интерес и с математической, и с физической точки зрения.

В частном случае, когда длина нити неизменна ($l \equiv \text{const}$, $\dot{l} = 0$), а точка подвеса покоится или движется равномерно и прямолинейно ($\xi \equiv \text{const}$, $\dot{\xi} = 0$), уравнение (6) превращается в дифференциальное уравнение движения математического маятника [8, с. 70].

Задача 2. Кулачок *1* массы M скользит по горизонтальной плоскости под действием силы $\vec{F}$ и перемещает толкатель *2* массы m. Толкатель движется в вертикальных направляющих. Пружина *3*, коэффициент жесткости которой c, прижимает толкатель к кулачку. В начальный момент времени система находилась в покое, и пружина была не деформирована.

Определить закон движения толкателя.

Решение. Эта механическая система имеет одну степень свободы, потому что, присоединив к ней одну дополнительную независимую связь (например, закрепив кулачок), получаем систему, неспособную к движению. Оси координат показаны на рис. 2; за независимую обобщенную координату возьмем $y_D(t) \equiv q(t)$.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

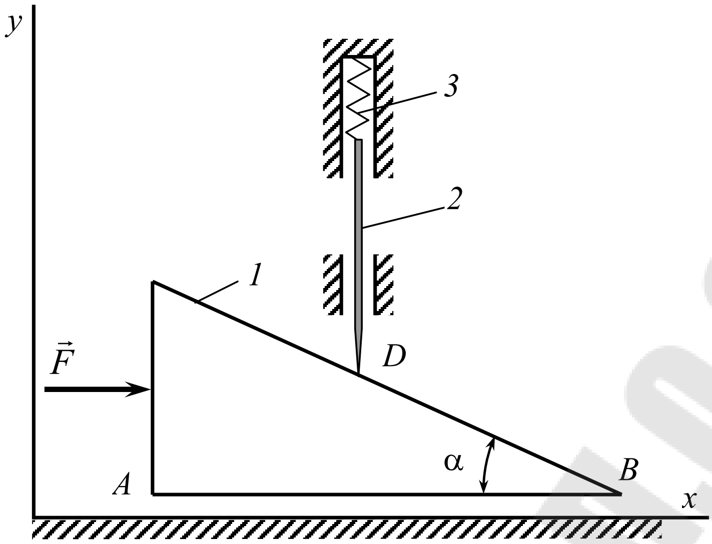


Рис. 2

В точке соприкосновения толкателя с кулачком имеем:

$$q = (x_B - x_D)\ \mathrm{tg}\,\alpha, \quad x_D \equiv \mathrm{const},$$

поэтому $\dot{q} = \dot{x}_B \mathrm{tg}\,\alpha$, $\delta q = \delta x_B\ \mathrm{tg}\,\alpha$.

Кулачок и толкатель движутся поступательно:

$$T_1 = \frac{M}{2}\dot{x}_B^2, \quad T_2 = \frac{m}{2}\dot{q}^2.$$

Переходя от $x_B(t)$ к $q(t)$, для кинетической энергии системы получаем

$$T = T_1 + T_2, \quad T = \frac{\dot{q}^2}{2}\left(m + \frac{M}{\mathrm{tg}^2\alpha}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0.$$

Вычисляем сумму работ сил $\vec{F}$, $m\vec{g}$ и силы упругости пружины на возможных перемещениях δx_B, δq:

$$\delta A = F\,\delta x_B - mg\delta q - cq\delta q,$$

$$\delta A = \left(\frac{F}{\mathrm{tg}\,\alpha} - mg - cq\right)\delta q.$$

и находим обобщенную силу, соответствующую координате $q \equiv y_D$:

$$Q = \frac{F}{\mathrm{tg}\,\alpha} - mg - cq.$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Уравнение Лагранжа (1) имеет вид:

$$\ddot{q} + \frac{c}{M_1} q = \frac{F_1}{M_1}; \quad t = 0, \quad q = 0, \quad \dot{q} = 0; \tag{7}$$

$$M_1 = m + \frac{M}{\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad F_1 = \frac{F}{\operatorname{tg}\alpha} - mg.$$

За обобщенную координату можно было принять не $y_D(t)$, а $x_B(t)$. Тогда все формулы трансформировались бы с учетом однозначной связи между x_B, y_D.

Как известно [7], общее решение уравнение вида (7) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$q^{(0)} = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt, \quad k^2 = \frac{c}{M_1}, \quad q_0 = q(0), \quad \dot{q}_0 = \dot{q}(0)$$

и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения, например:

$$q^{(1)} = \frac{F_1}{c}, \quad q = q^{(0)} + q^{(1)}.$$

Учитывая начальные условия (7), записываем решения задачи:

$$q = \frac{F_1}{c}(1 - \cos kt).$$

Следовательно, толкатель совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой, линейно зависящей от величины силы F; с ростом α либо с увеличением жесткости пружины амплитуда колебаний уменьшается. Зависимость циклической частоты k от механических параметров системы тоже нетрудно проследить, пользуясь записанными выше формулами.

Задача 3. В кулачковом механизме, расположенном в вертикальной плоскости, кулачок *1*, представляющий собой однородный диск радиуса r и массы m вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O_1. К кулачку приложена пара сил с моментом M. Толкатель *2*, являющийся зубчатой рейкой, движется в вертикальных направляющих и вращает ступенчатый блок *3*, с которым он находится в зацеплении. С блоком *3* шарнирно связан спарник *4*. Массы толкателя и спарника равны m_2 и m_4 соответственно. Момент инерции блока относительно его оси вращения равен J. Составить дифференциальное уравнение движения системы, полагая $R_3 = 2r_3$, $r_3 = 2r/3$, $m_2 = m/3$, $m_4 = m/6$, $J = 2mr^2$. Массой кривошипа *5* пренебречь.

Библиотека ГГТУ им. П. О. Сухого

Решение. Данный механизм (рис. 3) имеет одну степень свободы, поскольку жесткое закрепление какого-нибудь одного из пяти его элементов лишает механизм возможности совершать движение. За обобщенную координату возьмем угол $\varphi = \varphi(t)$ поворота кулачка по часовой стрелке. Значение $\varphi = 0$ соответствует начальному моменту $t = 0$, когда радиус O_1O вертикален.

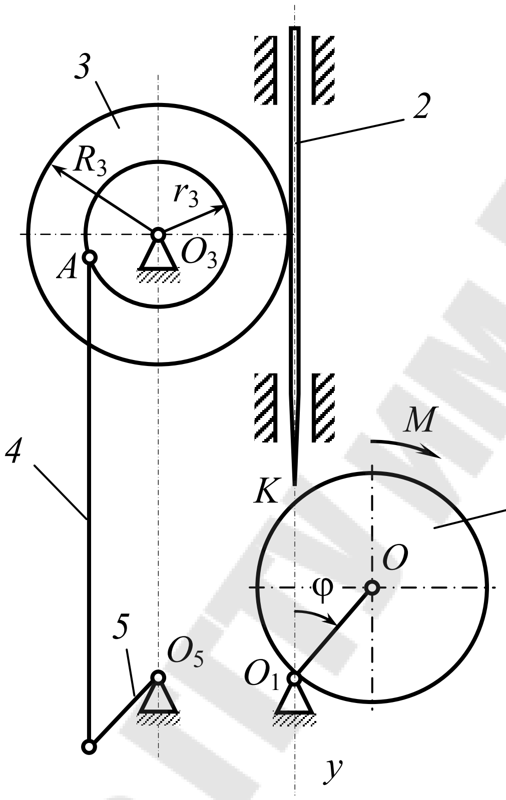


Рис. 3

Положение толкателя, движущегося поступательно, однозначно определяется координатой $y(t)$ точки K соприкосновения толкателя с кулачком. Из рис. 3 видно, что

$$y = 2r(1 - \cos\varphi),$$

поскольку значение $y(0) = 0$ соответствует точке K, удаленной в начальный момент времени от горизонтали O_1O_5 на расстояние $2r$. Значит, скорость толкателя и его возможное перемещение определяются зависимостями:

$$V_2 \equiv \dot{y} = 2r\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \delta y = 2r\sin\varphi\,\delta\varphi. \tag{8}$$

Библиотека БГУИР

Теперь рассмотрим зацепление толкателя с блоком *3*, совершающим вращение вокруг неподвижной оси O_3. Вертикальному перемещению толкателя соответствует угловое перемещение блока *3*: $y = R_3\varphi_3$. Переходя к координате φ, имеем:

$$\varphi_3 = \frac{y}{R_3} = \frac{2r}{R_3}(1-\cos\varphi), \quad \dot\varphi_3 = \frac{2r}{R_3}\dot\varphi\sin\varphi, \quad \delta\varphi_3 = \frac{2r}{R_3}\sin\varphi\,\delta\varphi. \quad (9)$$

Спарник *4* движется поступательно со скоростью, равной скорости точки *A* ступенчатого блока *3*: $V_4 = r_3\dot\varphi_3$.

Подсчитываем кинетическую энергию элементов механизма. Для кулачка имеем: $2T_1 = J_1\dot\varphi^2$, где J_1 есть момент инерции кулачка относительно оси, проходящей через точку O_1 параллельно оси вращения. Зная, что $J_0 = mr^2/2$, и воспользовавшись известной теоремой Штейнера [1], [8], находим $J_1 = J_0 + mr^2$ и получаем

$$T_1 = \frac{3}{4}mr^2\dot\varphi^2.$$

Далее, располагая выражениями V_2, φ_3, V_4, через φ находим соответственно для толкателя, ступенчатого блока и спарника:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}V_2^2, \quad T_2 = 2m_2r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi,$$

$$T_3 = \frac{J}{2}\dot\varphi_3^2, \quad T_3 = \frac{9}{4}mr^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi,$$

$$T_4 = \frac{m_4}{2}V_4^2, \quad T_4 = \frac{m}{12}r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi.$$

Суммируя, получаем кинетическую энергию механизма:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

$$T = mr^2\dot\varphi^2\left(\frac{3}{4} + 3\sin^2\varphi\right).$$

Вычисляем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 3mr^2\dot\varphi^2\sin 2\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = mr^2\dot\varphi\left(\frac{3}{2} + 6\sin^2\varphi\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) = mr^2\ddot\varphi\left(\frac{3}{2} + 6\sin^2\varphi\right) + 6mr^2\dot\varphi^2\sin 2\varphi.$$

Библиотека БГУИР

Для отыскания обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате φ, дадим кулачку возможное перемещение $\delta\varphi$, которому отвечает возможное перемещение толкателя δy (8), возможное угловое перемещение блока $\delta\varphi_3$ (9) и возможное перемещение спарника $\delta s_4 = r_3\delta\varphi_3$.

Подсчитываем элементарные работы. К кулачку приложены момент M и сила тяжести $m\vec{g}$, поэтому

$$\delta A_1 = M\,\delta\varphi + mgr\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Для толкателя:

$$\delta A_2 = m_2 g\,\delta y, \quad \delta A_2 = \frac{2}{3}mgr\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Центр тяжести блока *3* неподвижен, и сила тяжести $m_3\vec{g}$ работу не совершает, $\delta A_3 = 0$. Для спарника надо учесть, что сила $m_4\vec{g}$ совершает работу только на вертикальной составляющей перемещения:

$$\delta A_4 = -m_4 g\delta y_4 = -\frac{m}{6}gr_3\sin\varphi_3\,\delta\varphi_3 = -\frac{mgr}{6}\sin\left[\frac{3}{2}(1-\cos\varphi)\right]\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Суммируем элементарные работы:

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 + \delta A_4, \quad \delta A = Q_\varphi\delta\varphi$$

и находим обобщенную силу:

$$Q_\varphi = M + \frac{5}{3}mgr\sin\varphi - \frac{m}{6}gr\sin\left[\frac{3}{2}(1-\cos\varphi)\right].$$

Составляем уравнение Лагранжа (1) и окончательно получаем такое дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{3}{2} + 6\sin^2\varphi\right)mr^2\ddot{\varphi} + 3mr^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi + \frac{m}{6}gr\sin\varphi\sin\left[\frac{3}{2}(1-\cos\varphi)\right] =$$

$$= M + \frac{5}{3}mgr\sin\varphi; \quad t = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0.$$

Нетрудно видеть, что коэффициент при старшей производной является ненулевым при любом угле поворота кулачка.

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Задача 4. В механической системе, схема которой в положении покоя изображена на рис. 4, масса груза *1* равна m_1, элементы *2*, *4* есть сплошные однородные диски массами m_2, m_4 и радиусами r_2, r_4; тонкий однородный стержень *3* длины l имеет массу m_3; с – коэффициент жесткости пружины *5*. Силы сопротивления и масса нити считаются пренебрежимо малыми. Пружина прикреплена в середине стержня, $O_3K = KB$. Зная начальное положение и начальную скорость груза *1*, найти уравнение его движения по вертикали и определить частоту и период малых свободных колебаний этой механической системы.

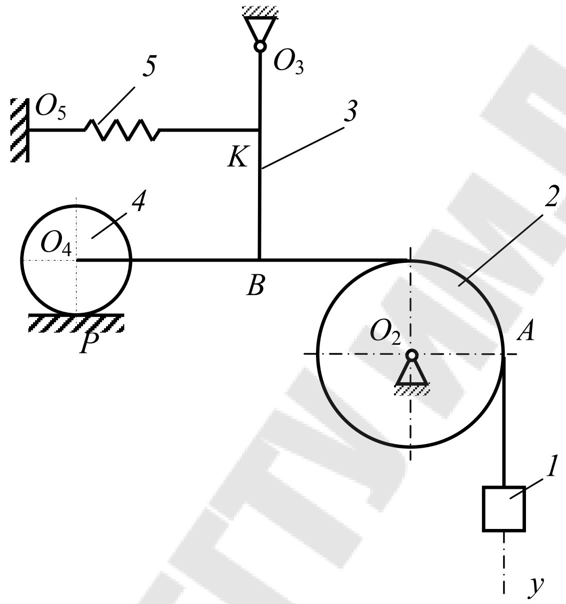


Рис. 4

Решение. Так же, как и в предыдущих задачах, нетрудно установить, что данная система имеет одну степень свободы. Примем за обобщенную координату – вертикальную координату y, отсчитываемую от начального положения груза в статическом равновесии. Будем рассматривать малые движения системы, учитывая во всех формулах члены не выше второго порядка малости относительно y и $\dot{y}$, членами более высокого порядка пренебрегаем.

Груз *1*, движущийся поступательно со скоростью $V_1 = \dot{y}$, обладает кинетической энергией $T_1 = m_1\dot{y}^2/2$. Блок *2* вращается вокруг неподвижной оси O_2x с угловой скоростью $\omega_2 = V_A/r_2$, причем $V_1 = V_A$, так как нить нерастяжима и скольжение ее на блоке отсутствует. Тогда

$$T_2 = \frac{J_{2x}}{2}\omega_2^2, \quad J_{2x} = \frac{m_2}{2}r_2^2, \quad \omega_2 = \frac{\dot{y}}{r_2},$$

где J_{2x} – момент инерции блока *2* относительно O_2x. В итоге имеем:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}\dot{y}^2.$$

Стержень *3* также совершает вращательное движение:

$$T_3 = \frac{J_{3x}}{2}\omega_3^2, \quad J_{3x} = \frac{m_3}{3}l^2, \quad \omega_3 = \frac{V_B}{O_3B}.$$

Для малых движений системы имеем: $V_B \cong V_A = \dot{y}$, поэтому

$$T_3 = \frac{m_3}{6}\dot{y}^2.$$

Диск *4*, катясь без скольжения по горизонтальной поверхности, совершает плоское движение:

$$T_4 = \frac{m_4}{2}V_{O_4}^2 + J_{4x}\frac{\omega_4^2}{2}.$$

Точка *P* является для диска *4* мгновенным центром скоростей, поэтому $V_{O_4} = \omega_4 \cdot (O_4P)$. Чтобы найти угловую скорость вращения диска *4* учтем, что для малых движений данной механической системы $V_{O_4} \cong V_B \cong \dot{y}$, значит, $\omega_4 = \frac{\dot{y}}{r_4}$. Учитывая $J_{4x} = \frac{m_4}{2}r_4^2$, находим

$$T_4 = \frac{3}{4}m_4\dot{y}^2.$$

Суммируя найденные выражения, вычисляем кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{y}^2, \quad m = m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{3} + \frac{3m_4}{2}$$

и подсчитываем необходимые производные:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}. \qquad (10)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Данная механическая система находится под действием потенциальных сил: сил тяжести и силы упругости пружины. Как известно, [1], [8], геометрическое место точек пространства, в которых потенциальная энергия материальной точки имеет одно и то же значение (эквипотенциальная поверхность) определяется уравнением $\Pi(x, y, z) = \text{const}$. Для определенности примем, что Π принимает нулевое значение в положении покоя системы.

Потенциальная энергия дисков *2*, *4* равна нулю, т. к. оси O_2x, O_4x не перемещаются по вертикали, и силы тяжести $m_2\vec{g}$, $m_4\vec{g}$ работу не совершают. Значит, остается вычислить работу сил $m_1\vec{g}$, $m_3\vec{g}$ и силы упругости пружины при перемещении системы из положения, однозначно определяемого координатой y, в нулевое положение системы. Сумма потенциальных энергий груза и стержня есть

$$\Pi^{(1)} = -m_1gy + m_3gh,$$

где h – вертикальное перемещение центра тяжести стержня (точки K), (рис. 5). Нетрудно видеть, что

$$\frac{l}{2} - h = \frac{l}{2}\cos\varphi_3\,. \tag{11}$$

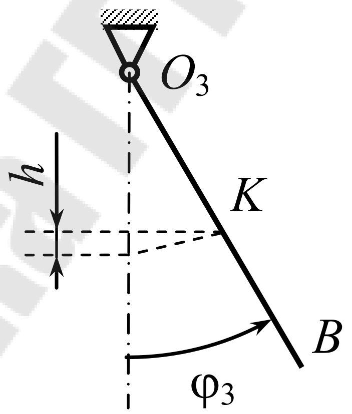


Рис. 5

Для случая малых движений системы возьмем разложение $\cos\varphi_3$ в ряд Тейлора в окрестности значения $\varphi_3 = 0$, ограничившись двумя первыми членами:

$$\cos\varphi_3 = 1 - \frac{\varphi_3^2}{2} + \ldots\,.$$

Для малых φ_3 перемещение точки B приближенно равно перемещению груза *1*, поэтому $y \cong l\varphi_3$. Следовательно, из формулы (11) вычисляем

$$h = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi_3), \quad \varphi_3 = \frac{y}{l}, \quad h \cong \frac{l}{4}\varphi_3^2, \quad h \cong \frac{y^2}{4l}.$$

Итак, получаем

$$\Pi^{(1)} = -m_1 g y + m_3 g \frac{y^2}{4l}. \tag{12}$$

Потенциальная энергия пружины в нулевом положении равна $c z_{\text{ст}}^2$ [1, с. 337]. Здесь $z_{\text{ст}}$ – статическое удлинение пружины, которое можем найти, составив уравнение моментов сил, приложенных к стержню, относительно точки O_3:

$$c z_{\text{ст}}(O_3K) = m_1 g(O_3B), \quad z_{\text{ст}} = 2\frac{m_1}{c}g.$$

В процессе движения системы потенциальная энергия пружины есть разность

$$\Pi^{(2)} = \frac{c}{2}(z_{\text{ст}} + z)^2 - \frac{c}{2}z_{\text{ст}}^2,$$

где z есть перемещение точки K крепления пружины к стержню (рис. 4). Так как $O_3K = KB$, то при малых φ_3 имеется приближенное равенство $z \cong \frac{y}{2}$, поэтому

$$\Pi^{(2)} \cong \frac{c}{2}\left(y z_{\text{ст}} + \frac{y^2}{4}\right).$$

Учитывая (12), получим формулу для потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}, \quad \Pi = \frac{y^2}{4}\left(\frac{c}{2} + \frac{m_3 g}{l}\right) - y\left(m_1 g - \frac{c z_{\text{ст}}}{2}\right). \tag{13}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Располагая ранее вычисленным значением $z_{\text{ст}}$, видим, что последняя скобка в (13) равна нулю:

$$\Pi = \frac{y^2}{4}\left(\frac{c}{2} + \frac{m_3 g}{l}\right). \tag{14}$$

Выражение (13) можно проанализировать с точки зрения теории устойчивости. Продифференцируем (13):

$$\frac{d\Pi}{dy} = \frac{y}{2}\left(\frac{c}{2} + \frac{m_3 g}{l}\right) - \left(m_1 g - \frac{c z_{\text{ст}}}{2}\right),$$

$$\frac{d^2\Pi}{dy^2} = \frac{c}{2} + \frac{m_3 g}{l} > 0, \quad t \geq 0.$$

Необходимым и достаточным условием равновесия при $y = 0$ является уравнение

$$\left.\frac{d\Pi}{dy}\right|_{y=0} = 0, \quad m_1 g - \frac{c z_{\text{ст}}}{2} = 0.$$

Отсюда также можем вычислить $z_{\text{ст}}$.

Получили, что в положении равновесия $y = 0$ потенциальная энергия активных сил имеет минимум, следовательно, по теореме Дирихле [1, с. 409], – есть положение устойчивого равновесия данной механической системы.

Пользуясь (14), находим обобщенную силу

$$Q_y = -\frac{d\Pi}{dy}, \quad Q_y = -\frac{y}{2}\left(\frac{c}{2} + \frac{m_3 g}{l}\right)$$

и составляем уравнение Лагранжа, учитывая (10):

$$\ddot{y} + k^2 y = 0, \quad k^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{c}{2} + \frac{m_3 g}{l}\right). \tag{15}$$

Здесь k есть частота малых свободных колебаний системы, описываемых уравнением (15) [8, с. 28]. Период этих свободных колебаний есть

$$\Theta = \frac{2\pi}{k}.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Решение уравнения (15), отвечающее начальным условиям

$$t = 0, \quad y = y_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0,$$

имеет вид: [8, с. 28]:

$$y = y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt.$$

Это уравнение характеризует движение груза *1* из положения $y_0 = y(0)$ со скоростью $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$ при $t \geq 0$.

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Задача 5. По наклонной грани призмы *1*, образующей угол α с горизонтом, скатывается без скольжения однородный круглый цилиндр *2* массы m_2. При этом призма перемещается по гладкой горизонтальной плоскости, деформируя пружину *3*, соединяющую её с вертикальной стеной. Масса призмы m_1. Коэффициент жесткости пружины c, ось пружины горизонтальна. В начальный момент времени пружина была не деформирована. Составить дифференциальное уравнение движения системы.

Решение. Число степеней свободы системы равно двум. В самом деле, после присоединения к ней одной дополнительной связи, например, закрепления призмы, видим, что цилиндр сохраняет способность скатываться. Закрепив же цилиндр, т. е. добавив вторую дополнительную связь, лишим систему возможности перемещаться.

За обобщенные координаты примем расстояния x_1, x_2, отсчитываемые так, как показано на рис. 6.

Призма движется поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 .$$

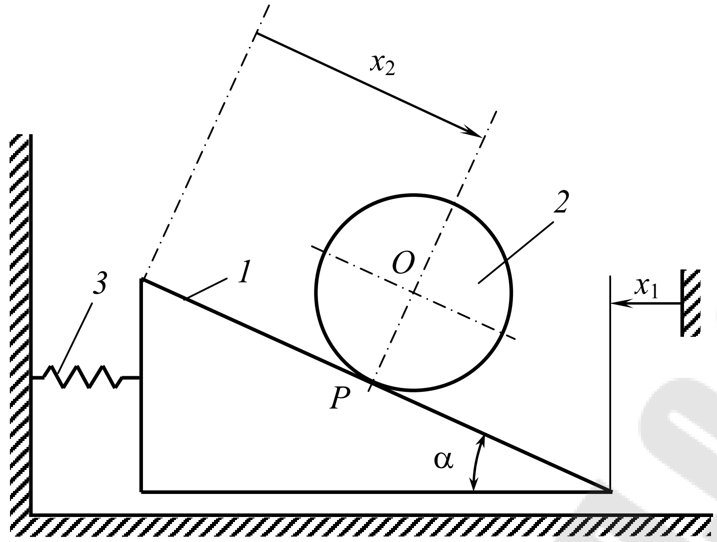


Рис. 6

Цилиндр совершает плоское движение, и его кинетическую энергию вычислим с помощью теоремы Кенига:

$$T_2 = \frac{m_2}{2} V_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega_2^2, \quad J_0 = m_2 \frac{r^2}{2},$$

где $\vec{V}_0 = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ – абсолютная скорость точки O (рис. 7); J_0 – момент инерции цилиндра относительно его оси симметрии; ω_2 – угловая скорость вращения цилиндра вокруг этой оси.

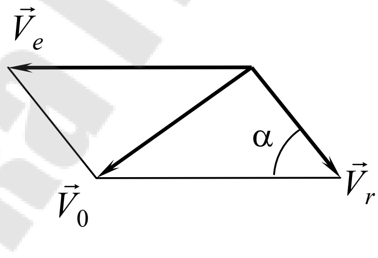


Рис. 7

Вводя в рассмотрение алгебраические величины переносной скорости $V_e = \dot{x}_1$ призмы относительно стены и относительной скорости $V_r = \dot{x}_2$ точки O относительно призмы и применяя теорему косинусов, находим

$$V_0^2 = V_e^2 + V_r^2 - 2V_e V_r \cos(180° - \beta), \quad \beta = \left(\vec{V}_e \hat{,} \vec{V}_r \right),$$

$$V_0^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\alpha.$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Точка P касания цилиндра с гранью призмы есть мгновенный центр скоростей для цилиндра, поэтому угловая скорость относительного вращения цилиндра есть $\omega_2 = \dot{x}_2/r$.

Располагая полученными формулами, находим кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{(m_1 + m_2)}{2}\dot{x}_1^2 - m_2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha + \frac{3}{4}m_2\dot{x}_2^2. \tag{16}$$

Для вычисления обобщенной силы Q_1, соответствующей координате x_1, мысленно закрепим цилиндр на призме ($\delta x_2 = 0$) и дадим всей системе возможное перемещение $\delta x_1 \neq 0$. Ясно, что в этом случае силы тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ работу не совершают, а сила упругости пружины производит работу $\delta A_1 = -cx_1\delta x_1$, значит, $Q_1 = -cx_1$.

Теперь зафиксируем мысленно положение призмы ($\delta x_1 = 0$) и дадим оси цилиндра возможное перемещение δx_2:

$$\delta A_2 = m_2 g\sin\alpha\,\delta x_2, \quad Q_2 = m_2 g\sin\alpha.$$

Для составления уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = Q_i, \quad i = 1, 2$$

вычислим, пользуясь (16), необходимые производные и после простых преобразований получим

$$\begin{gathered}(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2\cos\alpha + cx_1 = 0,\\ 3\ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_1\cos\alpha = 2g\sin\alpha,\\ t = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Проинтегрировав два раза по t второе уравнение, найдем

$$3x_2 - 2x_1\cos\alpha = gt^2\sin\alpha + C_1 t + C_2.$$

Из начальных условий видим, что $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, так что

$$x_2 = \frac{2}{3}x_1\cos\alpha + \frac{g}{3}t^2\sin\alpha. \tag{18}$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Подставляя это выражение в (17), приходим к уравнению для $x_1(t)$:

$$m\ddot{x}_1 + cx_1 = \frac{2}{3} m_2 g \sin\alpha\cos\alpha, \quad m = m_1 + m_2 - \frac{2}{3} m_2 \cos^2\alpha.$$

Общее его решение есть сумма какого-нибудь частного решения, например,

$$x_1^{(1)} = \frac{m_2 g}{3c} \sin 2\alpha$$

и общего решения соответствующего однородного уравнения: $m\ddot{x}_1^{(0)} + cx_1^{(0)} = 0$. Последнее есть уравнение свободных колебаний [8, с. 28]:

$$x_1^{(0)} = B_1 \cos kt + B_2 \sin kt, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \quad x_1 = x_1^{(0)} + x_1^{(1)}.$$

Для отыскания констант интегрирования B_1, B_2 воспользуемся начальными условиями в (17):

$$t = 0, \quad x_1 = 0, \quad 0 = B_1 + x_1^{(1)}, \quad B_1 = -x_1^{(1)},$$

$$t = 0, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad 0 = B_2 k, \quad B_2 = 0.$$

В итоге имеем:

$$x_1 = \frac{m_2 g}{3c} \sin 2\alpha (1 - \cos kt).$$

Координата $x_2(t)$ определяется по формуле (18). Следовательно, призма совершает гармоническое колебание, а цилиндр с течением времени неограниченно удаляется от своего начального положения. Качественный анализ зависимости амплитуды и циклической частоты колебаний призмы от механических параметров системы затруднений не представляет.

Задача 6. В механизме для шлифования цилиндрических поверхностей маятник *1* приводится в движение вокруг горизонтальной оси O пружиной *2*, один конец которой закреплен на краю однородного диска *3*. Масса диска m, радиус r. Коэффициент жесткости пружины c.

Центр масс маятника находится на оси O, его момент инерции относительно этой оси равен J_0. К диску приложена пара сил с момен-

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

том: $M = M_0 \cos \omega t$, которая сообщает ему вращение вокруг горизонтальной оси O_1. В положении равновесия механизма ось симметрии маятника вертикальна, пружина не деформирована, а ее ось горизонтальна и находится на расстоянии l от оси O. При движении механизма возникает момент вязкого трения, модуль которого $M_1 = n|\dot{\varphi}|$, $n \equiv \text{const} > 0$. Составить дифференциальные уравнения движения системы, считая углы отклонения от положения равновесия малыми.

Решение. Нетрудно видеть, что число степеней свободы данной системы равно двум: взяв две дополнительные независимые связи – жесткие закрепления маятника и диска, – получим неподвижную систему. За независимые обобщенные координаты примем углы φ и ψ отклонения радиусов OA, O_1B от вертикали (рис. 8).

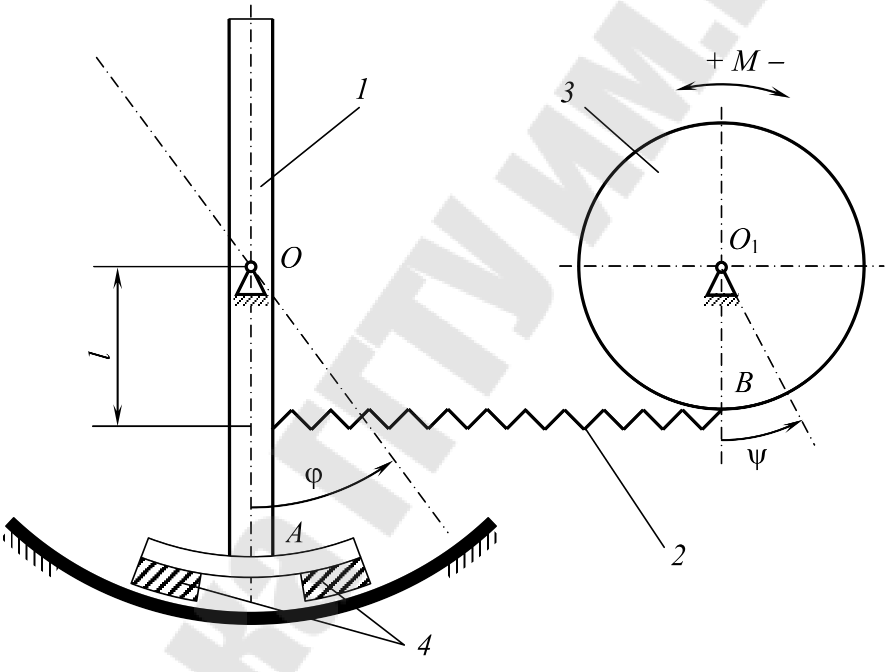


Рис. 8

Маятник и диск вращаются вокруг неподвижных осей O и O_1, поэтому имеем:

$$T_1 = \frac{J_0}{2}\dot{\varphi}^2, \quad T_3 = \frac{J_1}{2}\dot{\psi}^2, \quad J_1 = \frac{mr^2}{2}, \quad T \equiv T_1 + T_3 = \frac{J_0}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\psi}^2.$$

При вычислении обобщенных сил учтем, что удлинение пружины определяется величиной $h = l\varphi - r\psi$, т. к. допускаем только малые движения системы, при которых пружина незначительно отклоняется от горизонтали.

Зафиксируем положение диска ($\delta\psi = 0$) и дадим маятнику возможное перемещение: $\delta\varphi \neq 0$, т. е. $\delta h = l\delta\varphi$. Тогда

$$\delta A_\varphi = -M_1\delta\varphi - c(l\varphi - r\psi)l\delta\varphi, \qquad (19)$$

потому что силы тяжести маятника и диска, приложенные в точках O, O_1 работу не совершают. Теперь, мысленно закрепив маятник, дадим системе возможное перемещение $\delta\psi \neq 0$, при котором $\delta h = -r\delta\psi$:

$$\delta A_\psi = M\delta\psi + c(l\varphi - r\psi)r\delta\psi. \qquad (20)$$

Располагая формулами (19), (20), находим обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам:

$$Q_\varphi = -M_1 - cl(l\varphi - r\psi), \quad Q_\psi = M + cr(l\varphi - r\psi).$$

Теперь составление уравнений Лагранжа вида (1) затруднений не представляет:

$$J_0\ddot{\varphi} + n\dot{\varphi} + cl(l\varphi - r\psi) = 0\,, \quad \frac{mr^2}{2}\ddot{\psi} - cr(l\varphi - r\psi) = M_0\cos\omega t,$$

$$t = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0\,, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0\,.$$

Задача 7. К рейке *4*, движущейся поступательно в горизонтальных направляющих, жестко прикреплена шестерня *1* радиуса R, расположенная в вертикальной плоскости. Общая масса шестерни и рейки m_1. К центру шестерни *1* шарнирно прикреплено водило *3*, которое несет ось шестерни *2* массы m_2. Шестерня *2* находится в зацеплении с шестерней *1*. К рейке приложена горизонтальная сила $F = F_0 \cos \omega t$. Составить дифференциальные уравнения движения, рассматривая шестерню *2* как однородный диск радиуса r.

Решение. Положение системы однозначно определяется обобщенными координатами x, φ, соответствующими двум степеням свободы: во-первых, движению системы в горизонтальных направляющих, во-вторых, вращению водила вокруг центра шестерни *1*.

Для поступательного движения шестерни *1* и рейки имеем: $T_1 = \dfrac{m_1}{2}\dot{x}^2$. Шестерня *2* движется плоскопараллельно:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}{V_A}^2 + \frac{J_A}{2}{\omega_2}^2, \quad J_A = \frac{m_2}{2}r^2, \quad \vec{V}_A = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

где алгебраические значения переносной и относительной скоростей есть соответственно $V_e = \dot{x}$ и $V_r = (R + r)\dot{\varphi}$. Аналогично задаче *5* (рис. 7) применяем теорему косинусов:

$$V_A^2 = V_e^2 + V_r^2 - 2V_eV_r\cos\left(180° - \beta\right), \quad \beta = \left(\widehat{\vec{V}_e, \vec{V}_r}\right),$$

$$V_A^2 = \dot{x} + \left(R + r\right)^2\dot{\varphi}^2 - 2\left(R + r\right)\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

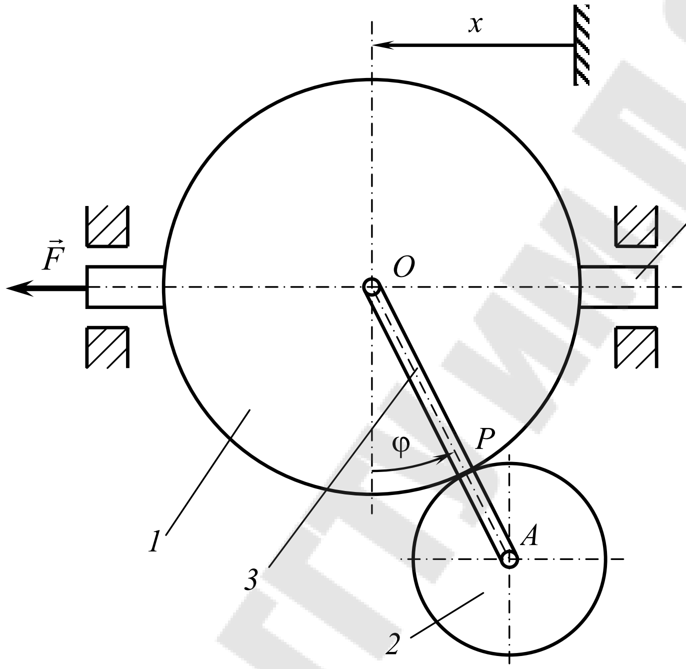


Рис. 9

Угловую скорость относительного вращения шестерни *2* вокруг *A* найдем из тех соображений, что точка *P* касания шестерен есть мгновенный центр скоростей для шестерни *2*, а линейная относительная скорость точки *A* равна $(R + r)\dot{\varphi}$:

$$\omega_2 = \frac{R + r}{r}\dot{\varphi}.$$

Проделав несложные преобразования, найдем кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m_2(R + r)^2\dot{\varphi}^2 - m_2(R + r)\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Вычислим необходимые для составления уравнений Лагранжа производные:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2 (R + r)\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} m_2 (R + r)^2 \dot{\varphi} - m_2 (R + r)\dot{x}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} - m_2 (R + r)\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2} m_2 (R + r)^2 \ddot{\varphi} - m_2 (R + r)(\ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 (R + r)(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi).$$

Чтобы найти обобщенную силу, соответствующую координате φ, мысленно закрепим рейку в направляющих ($\delta x = 0$) и дадим системе возможное перемещение $\delta\varphi$, отвечающее оставшейся степенеи свободы. На этом перемещении работу совершает сила тяжести $m_2 \vec{g}$ (весом водила пренебрегаем). При отклонении водила на угол φ точка A приложения силы $m_2 \vec{g}$ перемещается по вертикали на расстояние $h = (R + r)\,(1 - \cos\varphi)$ (рис. 9), тогда $\delta h = (R + r)\sin\varphi\,\delta\varphi$,

$$\delta A = -\,m_2 g\,\delta h, \quad Q_{\varphi} = -\,m_2 g\,(R + r)\sin\varphi.$$

Подсчет Q_{φ} затруднений не вызывает: фиксируем положение водила ($\delta\varphi = 0$) и даем возможное перемещение $\delta x \neq 0$. Тогда работа сил тяжести является нулевой и имеем: $\delta A_x = F\delta x$. Итак, $Q_x = F$.

Уравнения Лагранжа имеют вид:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 (R + r)\ddot{\varphi} + m_2 (R + r)\dot{\varphi}^2 \sin\varphi = F_0 \cos\omega t,$$

$$\frac{3}{2}(R + r)\ddot{\varphi} - \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0,$$

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Библиотека ГГТУ им.П.О.Сухого

Задача 8. Механическая система тел *1–6* движется под действием постоянных сил с моментом M. Найти уравнение движения системы при заданных начальных условиях.

Считаются известными следующие величины: $m_1 = 2m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$, $m_4 = m$; $M \equiv \text{const}$; радиус инерции ступенчатого блока *3* относительно оси вращения O_3x равен: $\rho_x = r\sqrt{2}$; $r_2 = r_3 = r$, $R_3 = R_4 = 2r$. Элементы *2*, *4* считаются сплошными однородными дисками. Массы нитей пренебрежимо малы. Силы трения не учитываются.

Решение. Система имеет две степени свободы: во-первых, она приводится в движение моментом M, при этом блок *2* опускается вместе с грузом *1*, во-вторых, независимо от названного движения, груз *1* может опускаться, разматывая нить, т. е. двигаясь относительно блока *2* (рис. 10).

За независимые обобщенные координаты примем φ – угол поворота диска *4* и расстояние s, которое проходит груз в движении относительно блока *2* (рис. 10).

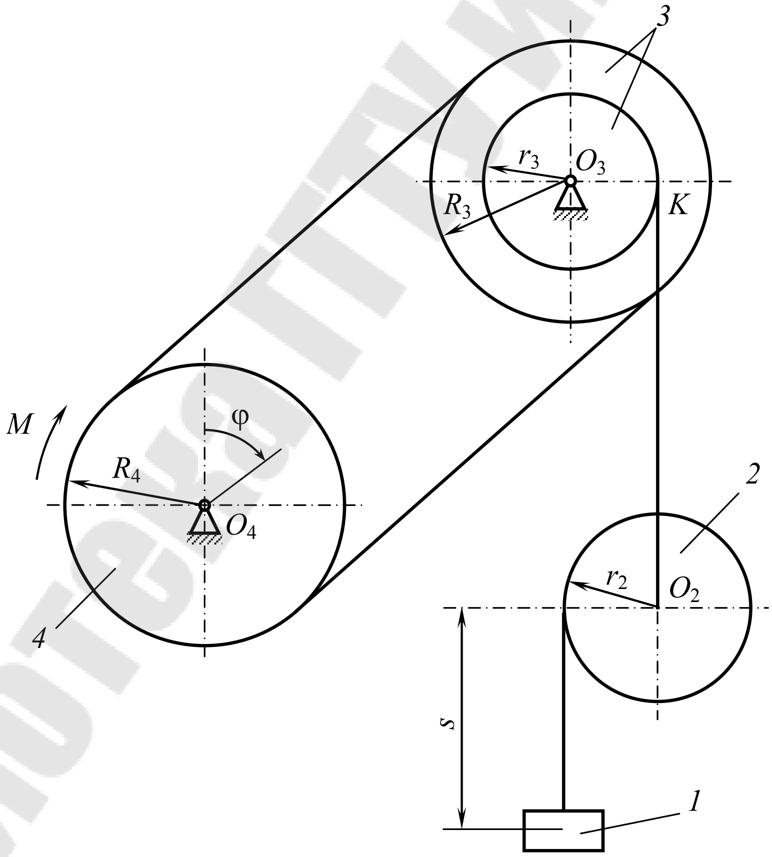


Рис. 10

Диски *3*, *4* имеют одинаковые радиусы и вращаются вокруг неподвижных осей O_3x, O_4x, перпендикулярных плоскости чертежа, с одинаковой угловой скоростью $\dot{\varphi}$, поэтому

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2, \quad J_3 = m_3 \rho_x^2, \quad \omega_3 = \dot{\varphi}, \quad T_3 = 3mr^2 \dot{\varphi}^2,$$

$$T_4 = \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2, \quad J_4 = \frac{m_4}{2} R_4^2, \quad \omega_4 = \dot{\varphi}, \quad T_4 = mr^2 \dot{\varphi}^2.$$

Груз движется поступательно, и его скорость в абсолютном движении слагается из переносной скорости $V_e = r\dot{\varphi}$, обусловленной вращением диска *4* и ступенчатого блока *3*, а также из относительной скорости $V_r = \dot{s}$. Для груза 1 векторы $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ направлены в одну сторону по вертикали, поэтому алгебраическая величина абсолютной скорости есть $V_1 = \dot{s} + r\dot{\varphi}$, следовательно,

$$T_1 = \frac{m_1}{2} V_1^2 = m(\dot{s} + r\dot{\varphi})^2.$$

Блок *2* совершает плоское движение, поэтому его кинетическая энергия равна

$$T_2 = \frac{m_2}{2} V_2^2 + \frac{J_2}{2} \omega_2^2, \quad J_2 = \frac{m_2}{2} r^2,$$

где V_2 – скорость центра масс блока *2*, причем $V_2 = V_x = r\dot{\varphi}$, поскольку нить считается нерастяжимой и на блоке не проскальзывает (точка *К* есть точка схода нити со ступени *3*). Угловая скорость ω_2 вращения блока *2* вокруг своей оси связана с относительной скоростью движения груза:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r} = \frac{\dot{s}}{r}.$$

Следовательно, получим

$$T_2 = m\left(r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{s}^2}{2} \right).$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Суммируем найденные значения кинетических энергий:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{3}{2}m\dot{s}^2 + 6mr^2\dot{\varphi}^2 + 2mr\dot{s}\dot{\varphi}. \qquad (21)$$

Для вычисления обобщенной силы Q_φ зафиксируем положение груза относительно блока *2* ($\delta s = 0$) и дадим системе возможное перемещение $\delta\varphi \neq 0$, соответствующее оставшейся степени свободы. На этом перемещении работу совершают силы $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ и момент M:

$$\delta A_\varphi = M\delta\varphi + (m_1 + m_2)g\delta h, \quad \delta h = r\delta\varphi.$$

Следовательно,

$$Q_\varphi = M + (m_1 + m_2)gr.$$

Далее зафиксируем положение диска 4 ($\delta\varphi = 0$) и дадим грузу возможное перемещение $\delta s \neq 0$, при этом, очевидно, точки приложения сил тяжести $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, $m_4\vec{g}$ не перемещаются, значит,

$$\delta A_3 = m_1 g\delta s, \quad Q_s = m_1 g.$$

Вычисляя с помощью (21) необходимые производные, составим уравнения Лагранжа:

$$2mr\ddot{s} + 12mr^2\ddot{\varphi} = M + 4mgr,$$

$$3\ddot{s} + 2r\ddot{\varphi} = 2g,$$

$$t = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad s = s_0, \quad \dot{s} = V_0.$$

Проинтегрировав дважды по времени оба эти уравнения, найдём общее решение:

$$2mrs + 12mr^2\varphi = \left(M + 4mgr\right)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \qquad (22)$$

$$3s + 2r\varphi = gt^2 + B_1 t + B_2.$$

Для конкретизации входящих сюда произвольных постоянных воспользуемся начальными условиями:

$$t = 0, \quad 2mrs_0 = C_2, \quad 3s_0 = B_2;$$

$$t = 0, \quad 2mrV_0 = C_1, \quad 3V_0 = B_1. \qquad (23)$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Разрешая соотношения (22) относительно s, φ и подставляя туда значения констант (23), получим зависимости, характеризующие движение изучаемой механической системы при $t \geq 0$:

$$\varphi = \frac{3M_1}{32mr^2}t^2, \quad M_1 = \frac{M}{2} + \frac{4}{3}mgr,$$

$$s = \left[\frac{g}{3} + \frac{M_1}{16mr}\right]t^2 + V_0 t + l_0.$$

Задача 9. Рейки *1* и *2* одинаковой массы m движутся в параллельных направляющих, расположенных в горизонтальной плоскости. К рейке *2* прикреплен конец пружины *4*, коэффициент жесткости которой c. Другой конец пружины закреплен неподвижно. Рейки находятся в зацеплении с однородным диском *3* массы m_3 и радиуса r. К диску приложена пара сил с моментом M. В начальный момент времени пружина была не деформирована. Составить дифференциальные уравнения движения системы.

Решение. Примем за обобщенные координаты расстояния x_1, x_2 (рис. 11), отвечающие двум степеням свободы этой механической системы. В самом деле, мысленно закрепив одну из реек, видим, что диск сохраняет способность двигаться совместно с другой свободной рейкой. Взяв же вторую дополнительную независимую связь, т. е. закрепив и эту рейку, лишим систему способности двигаться.

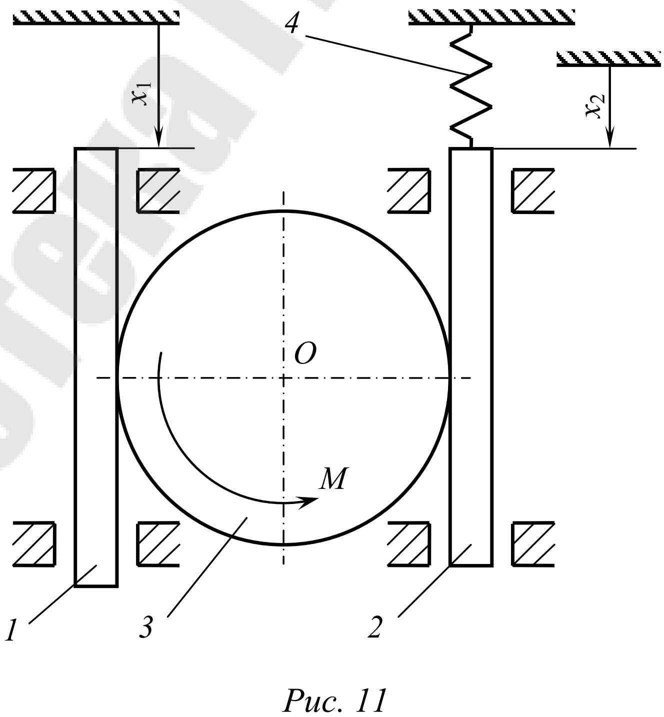


Рис. 11

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Кинетические энергии реек, движущихся поступательно, представляются в таком виде:

$$T_1 = \frac{m}{2}V_1^2, \quad T_2 = \frac{m}{2}V_2^2, \quad V_1 = \dot{x}_1, \quad V_2 = -\dot{x}_2,$$

причем в последней формуле учтено, что направление отсчета координаты x_2 противоположно движению рейки *2*.

Для диска, совершающего плоское движение, найдем положение мгновенного центра скоростей. Учтем, что качение диска по рейкам происходит без скольжения, так что $\vec{V}_A = \vec{V}_1$, $\vec{V}_B = \vec{V}_2$ (рис. 12). Соединим концы векторов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ прямой линией, тогда точка P пересечения её с AB и является мгновенным центром скоростей диска в каждый момент времени. Учитывая свойства мгновенного центра скоростей [1], [8], запишем пропорцию:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{AP}{BP} = \frac{r + OP}{r - OP},$$

из которой простыми вычислениями получим

$$OP = r\,\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} = r\,\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}. \tag{24}$$

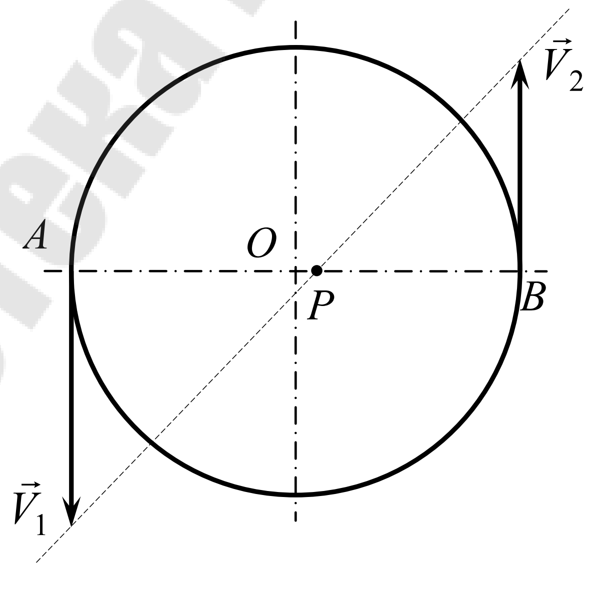


Рис. 12

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Угловая скорость вращения диска есть

$$\omega = \frac{V_1}{AP} = \frac{V_2}{BP}, \quad AP = r + OP.$$

Подставляя сюда формулу (24), находим

$$\omega = \frac{V_1 + V_2}{2r} = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2r}.$$

Момент инерции диска относительно оси Oy, перпендикулярной плоскости движения, равен $J_0 = m_3 r^2/2$, тогда по теореме Штейнера [1, с. 264] о моментах инерции относительно параллельных осей, найдем

$$J_P = J_0 + m_3\,(OP)^2, \quad J_P = m_3 r^2 \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}\right)^2\right].$$

Тогда кинетическая энергия диска дается зависимостью

$$T_3 = \frac{1}{2} J_P \omega^2 = \frac{m_3}{8}\left[\frac{1}{2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2\right].$$

В итоге имеем кинетическую энергию системы:

$$T \equiv T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{m_3}{8}\left[\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{3}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)\right].$$

Далее нам будут нужны такие производные:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left[m\dot{x}_1 + \frac{m_3}{8}\left(\dot{x}_2 + 3\dot{x}_1\right)\right] = \ddot{x}_1\left(m + \frac{3}{8}m_3\right) + \ddot{x}_2\,\frac{m_3}{8}, \qquad (25)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left[m\dot{x}_2 + \frac{m_3}{8}\left(\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2\right)\right] = \ddot{x}_2\left(m + \frac{3}{8}m_3\right) + \ddot{x}_1\,\frac{m_3}{8}.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Переходим к подсчету обобщенных сил Q_1, Q_2, соответствующих обобщенным координатам x_1, x_2. Механизм движется в горизонтальной плоскости, поэтому силы тяжести его элементов работу не совершают.

Закрепив рейку *2* ($\delta x_2 = 0$), дадим системе возможное перемещение $\delta x_1 \neq 0$. В этом случае диск совершает возможный поворот вокруг точки B касания диска с зафиксированной рейкой *2*, так что $\delta x_1 = 2r\delta\varphi_1$. Значит для элементарной работы получим

$$\delta A_1 = M\delta\varphi_1 = \frac{L}{2r}\delta x_1, \text{ т. е. } Q_1 = \frac{M}{2r}. \qquad (26)$$

Теперь зафиксируем положение рейки *1* ($\delta x_1 = 0$) и рассмотрим возможное перемещение $-\delta x_2 \neq 0$, на котором элементарную работу совершает момент M и сила упругости пружины, направленная вдоль рейки *2* в направлении отсчета координаты x_2:

$$\delta A_2 = M\delta\varphi_2 - cx_2\delta x_2, \quad -\delta x_2 = 2r\delta\varphi_2,$$

$$\delta A_2 = -\left(\frac{M}{2r} + cx_2\right)\delta x_2, \quad Q_2 = -\left(\frac{M}{2r} + cx_2\right). \qquad (27)$$

Располагая формулами (25)–(27), записываем уравнения Лагранжа:

$$\ddot{x}_1\left(8m + 3m_3\right) + \ddot{x}_2 m_3 = 4\frac{M}{r},$$

$$\ddot{x}_1 m_3 + \ddot{x}_2\left(8m + 3m_3\right) + 8cx_2 = -\frac{4M}{r},$$

$$t = 0, \quad x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_1^0, \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_2^0.$$

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

5. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Здесь представлены 108 вариантов схем механизмов. Каждый механизм приводится в движение силой $\vec{F}(t)$ либо парой сил с моментом $M(t)$. Упругий элемент обозначается на схеме пружиной; демпфер обозначается цилиндром, содержащим поршень.

Массы пружины, поршня, нитей и приводных ремней считаются пренебрежимо малыми. Массы остальных элементов механизма, включая зубчатую рейку, следует учитывать в постановке задачи.

Считаются заданными:

– функции $\vec{F}(t)$, $M(t)$, $t \geq 0$;

– геометрические размеры блоков и дисков (колес);

– радиусы инерции ступенчатых дисков (колес) относительно центральных осей, ортогональных плоскости вращения дисков;

– коэффициент жесткости пружины;

– коэффициент сопротивления $\beta > 0$ в формуле $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\beta\vec{V}$, характеризующей сопротивление движению поршня в цилиндре демпфера;

– моменты сил сопротивления в подшипниках;

– начальное положение и начальная скорость элементов системы.

Задача состоит в том, чтобы:

1) выбрать независимую обобщенную координату и составить уравнение Лагранжа второго рода;

2) проанализировать полученное уравнение, проинтегрировать его и удовлетворить начальным условиям;

3) построить графически функции $q(t)$, $T(t)$, $Q(t)$, $t \geq 0$, представляющих зависимости от времени обобщенной координаты, кинетической энергии системы и обобщенной силы.

Входные данные и числовые значения параметров студент выбирает самостоятельно, согласовав постановку задачи с преподавателем (конкретизация вида функций $\vec{F}(t)$, $M(t)$; принятие допущения о малых движениях системы и т. д.).

Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Литература

1. Добронравов, В. В. Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – Москва : Высш. шк., 1983. – 575 с.

2. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Москва : Наука, 1971. – 576 с.

3. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике. – Москва : Наука, 1981. – 480 с.

4. Сборник задач по теоретической механике / под ред. К. С. Колесникова. – Москва : Наука, 1983. – 320 с.

5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А. А. Яблонского. – Москва : Интеграл-Пресс, 2004. – 384 с.

6. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. – Москва : Мир, 1979. – 312 с.

7. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – Москва : Наука, 1969. – 424 с.

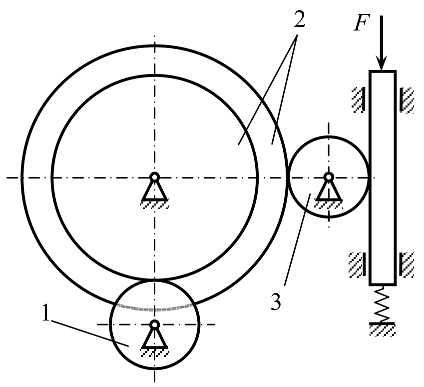
8. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский. – Москва : Высш. шк., 1977. – Ч. 2. – 439 с.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

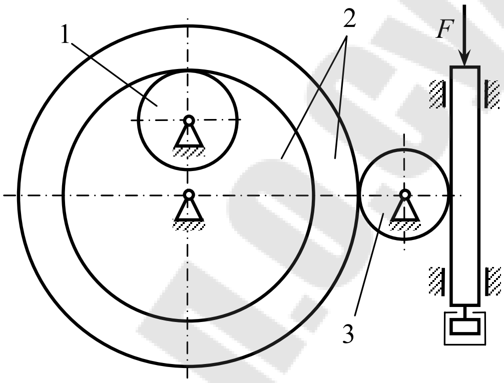
ПРИЛОЖЕНИЕ

Варианты индивидуальных заданий

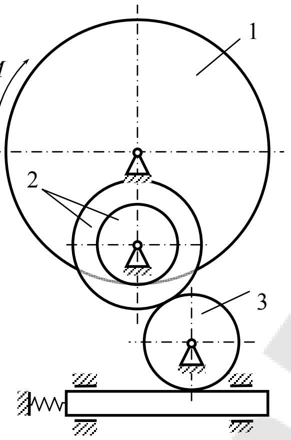
1



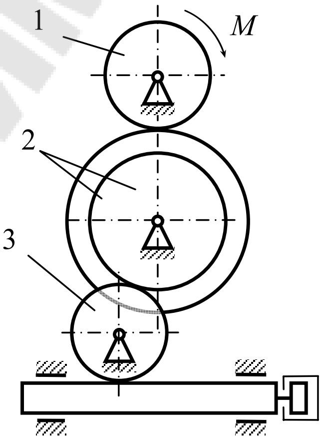
2



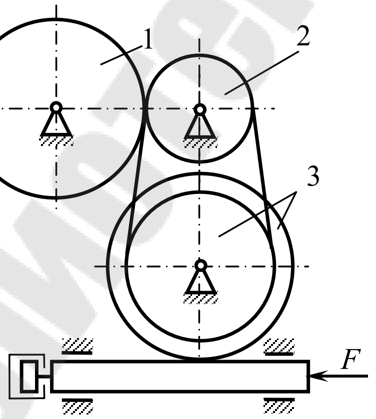
3



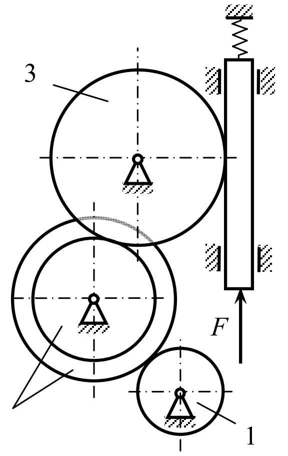
4



5

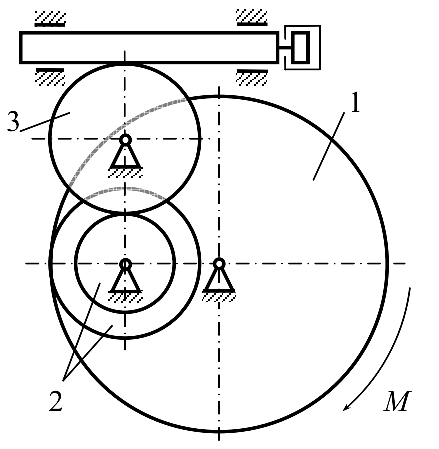


6

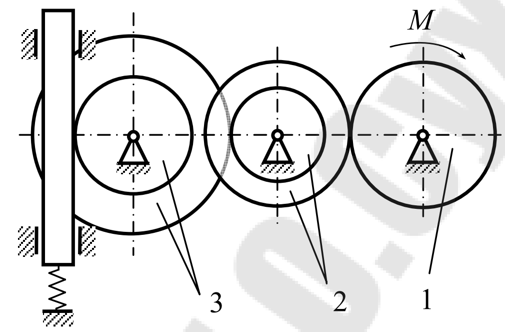


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

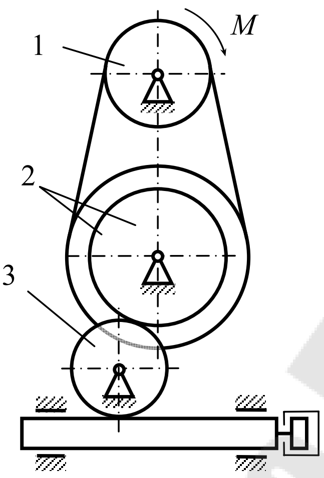
7



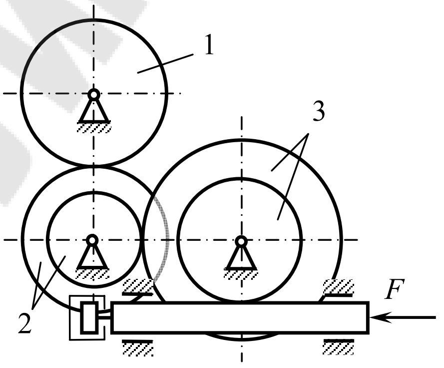
8



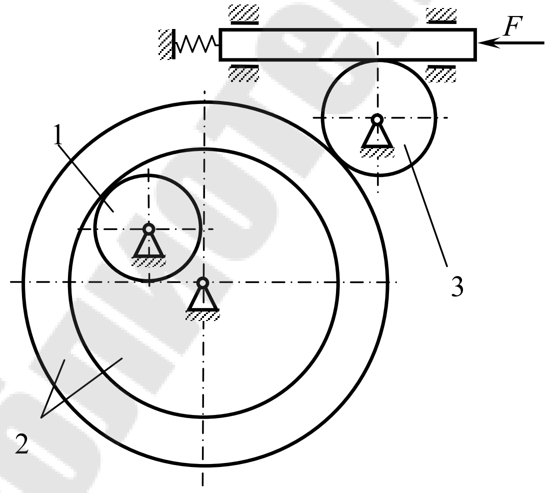
9



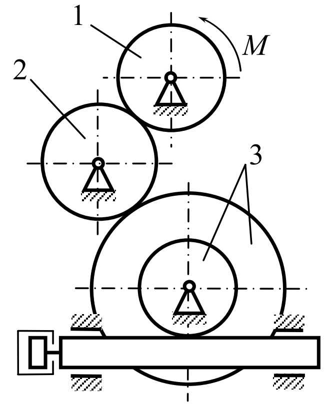
10



11

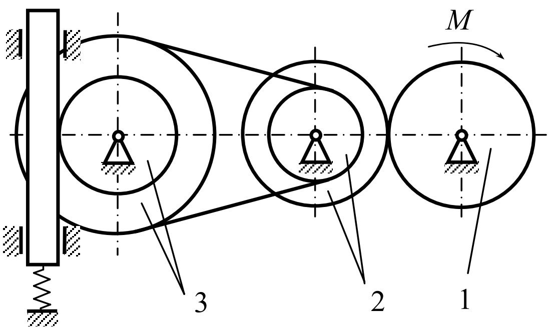


12

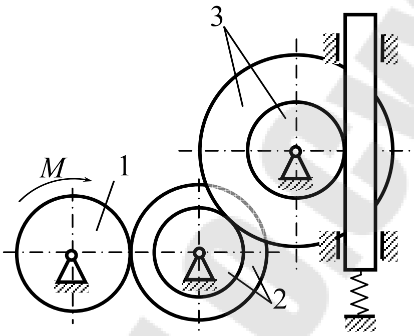


Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

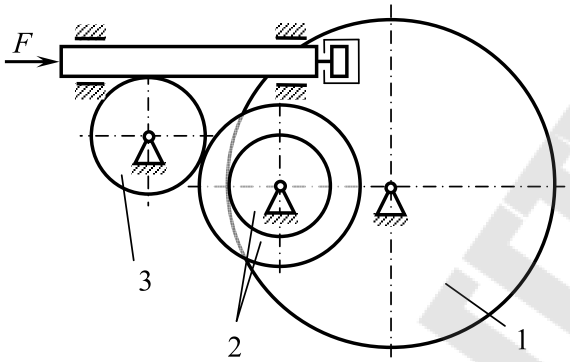
13



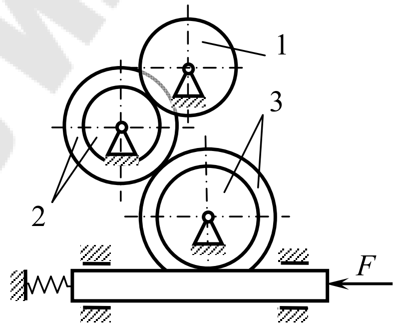
14



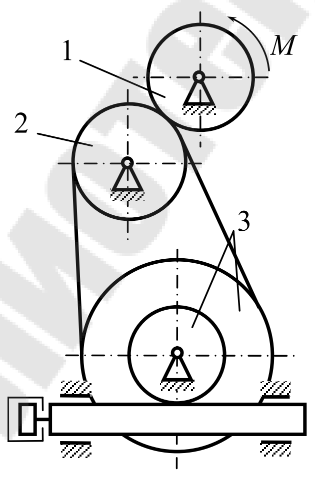
15



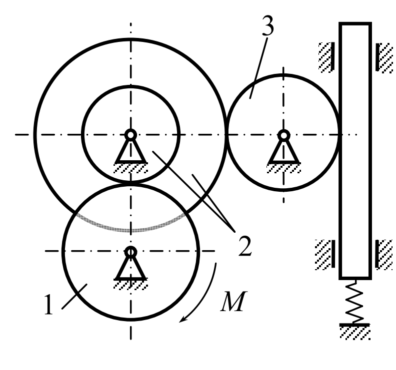
16



17

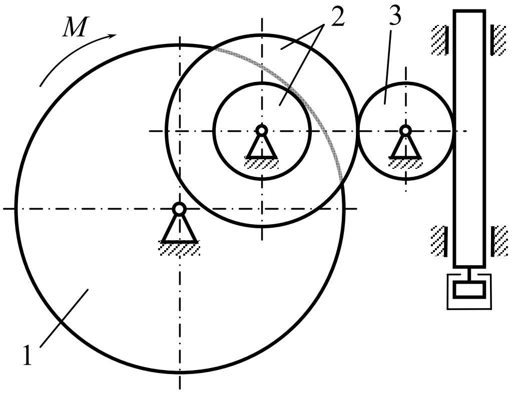


18

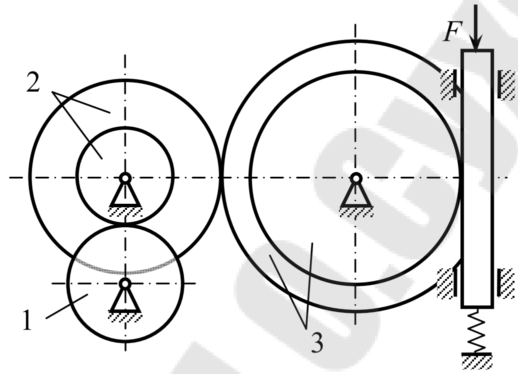


Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

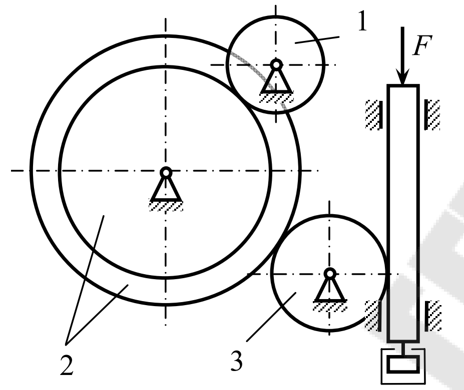
19



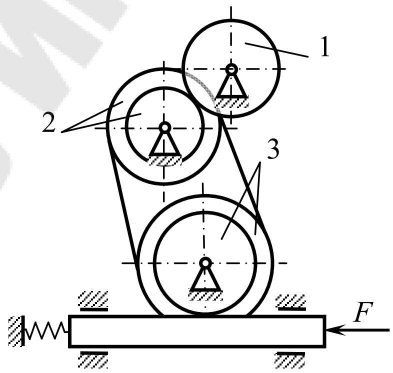
20



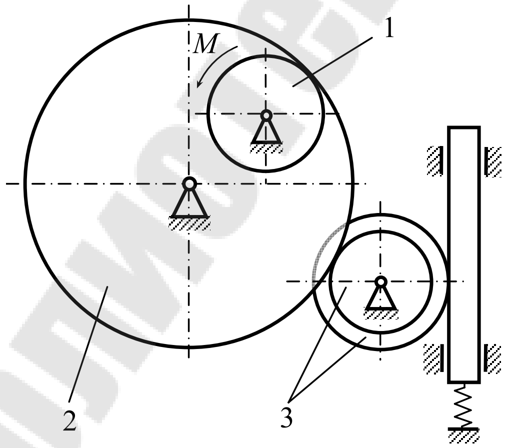
21



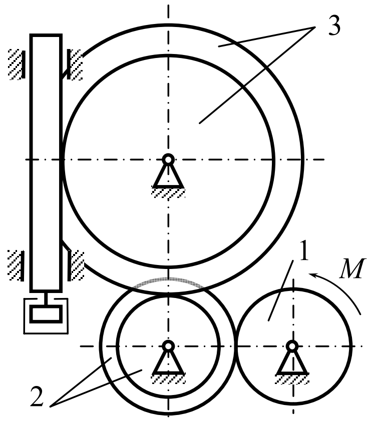
22



23

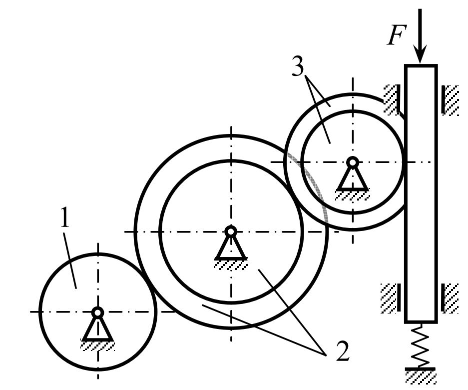


24

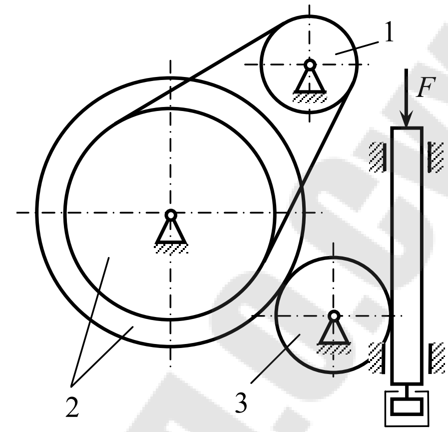


Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

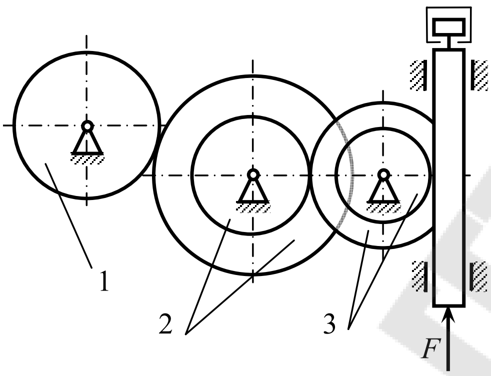
25



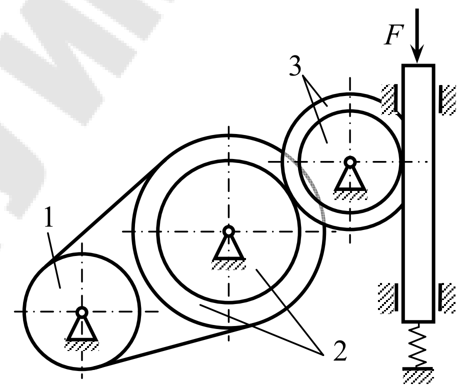
26



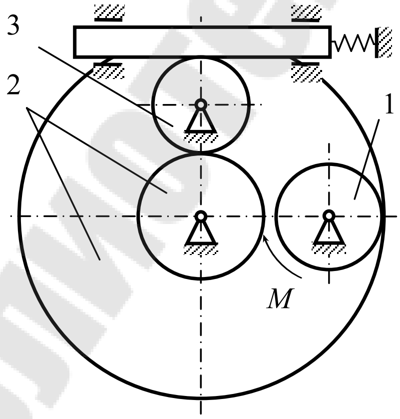
27



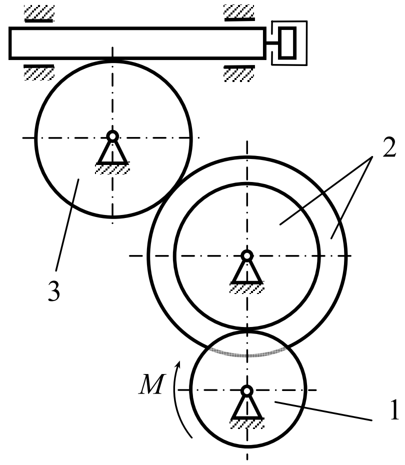
28



29

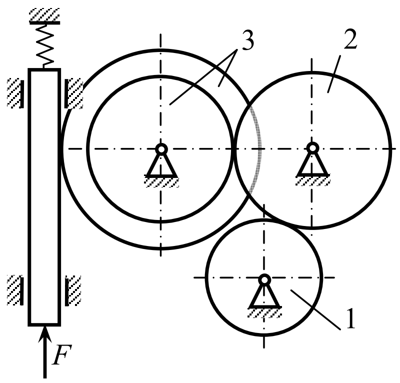


30

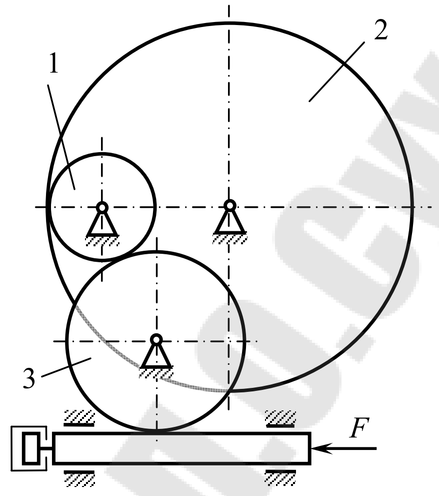


Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

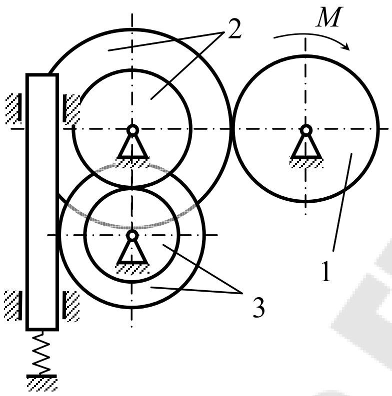
31



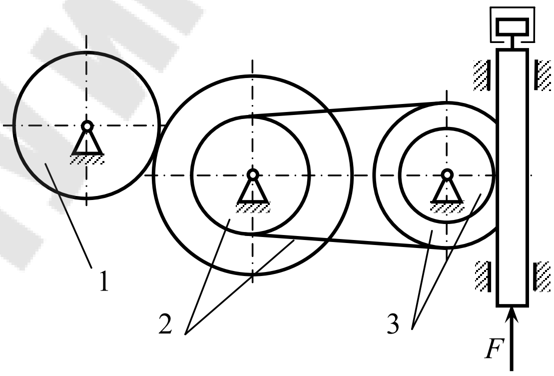
32



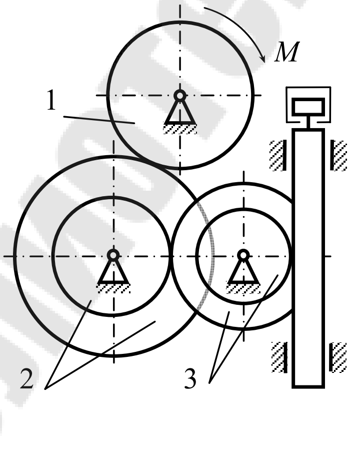
33



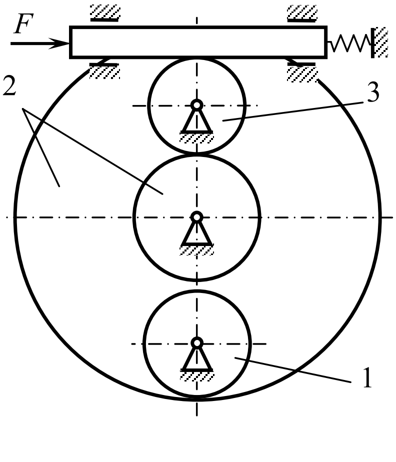
34



35

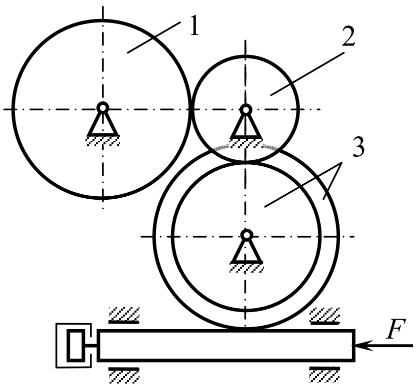


36

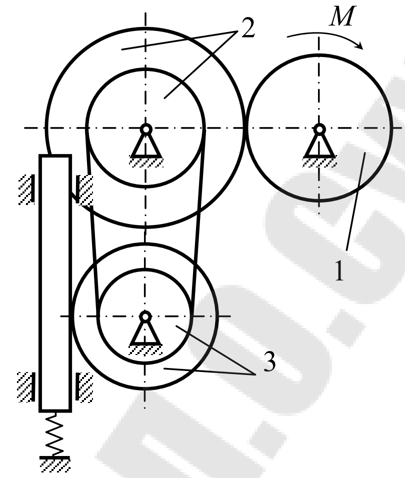


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

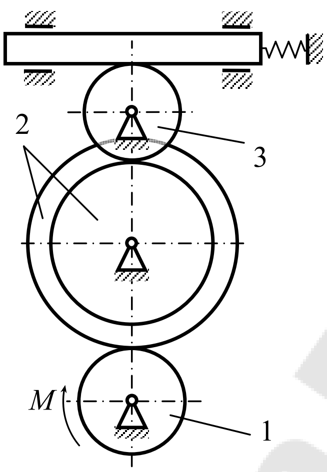
37



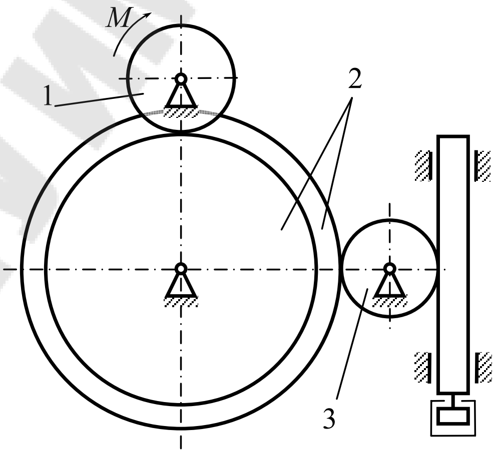
38



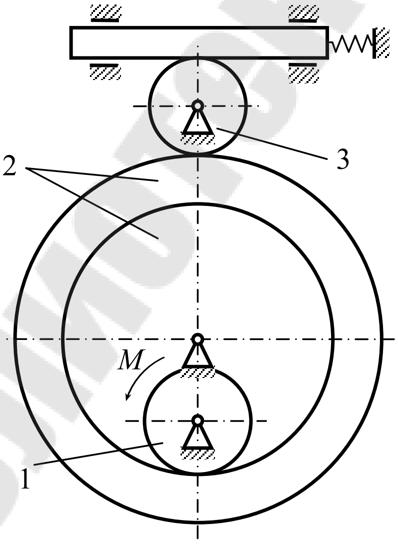
39



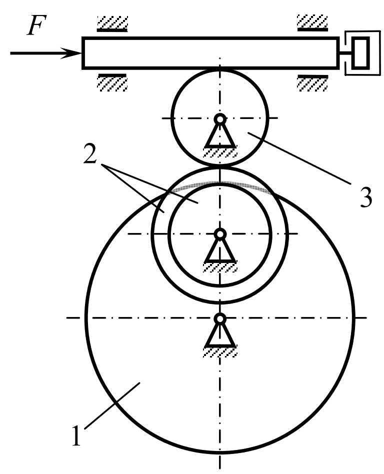
40



41

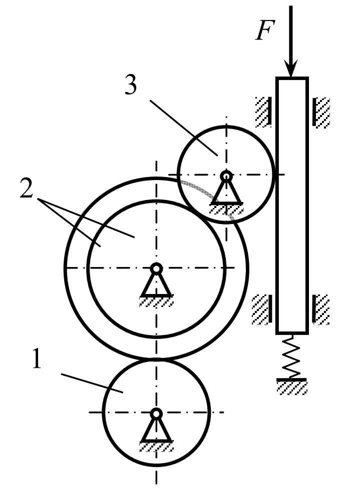


42

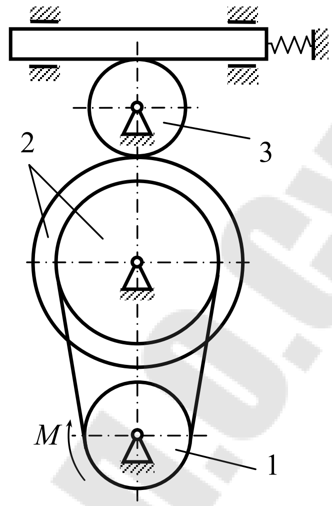


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

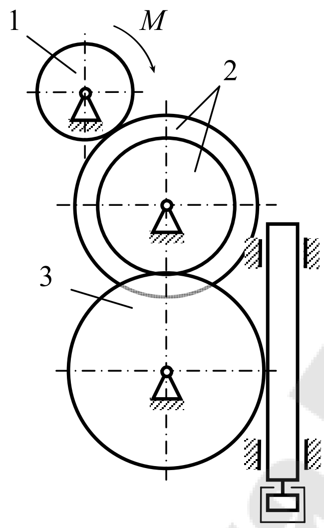
43



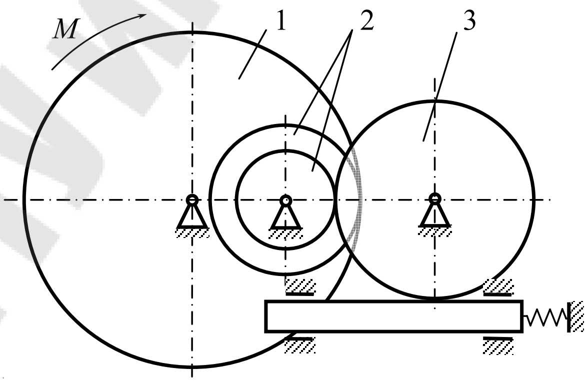
44



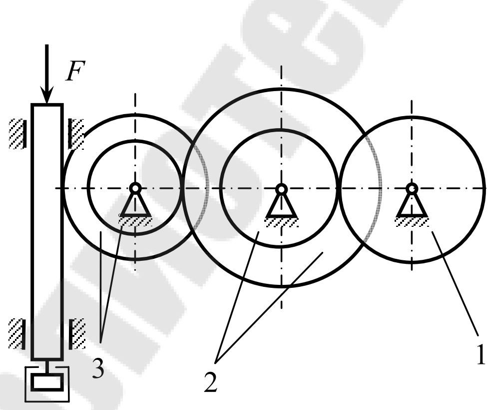
45



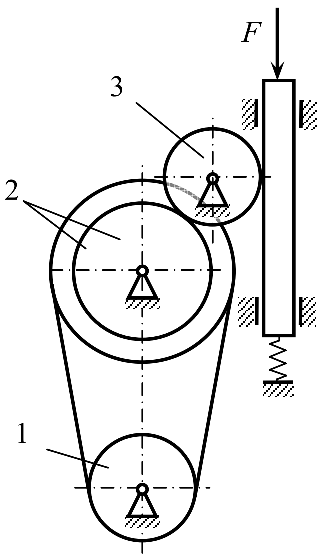
46



47

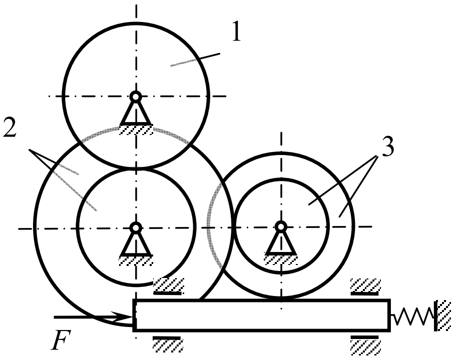


48

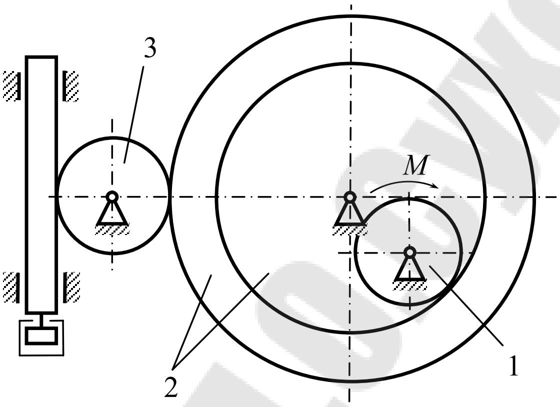


Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

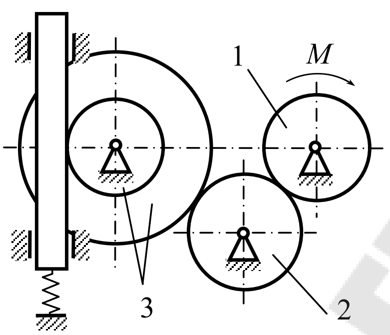
49



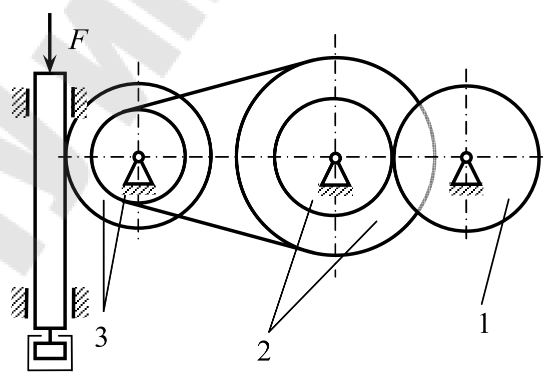
50



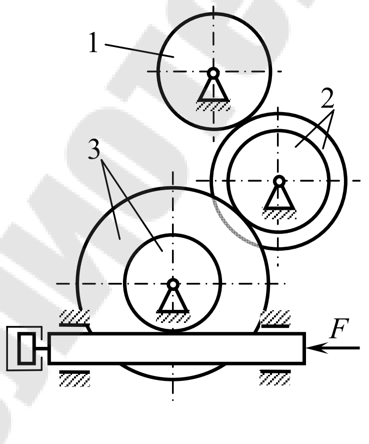
51



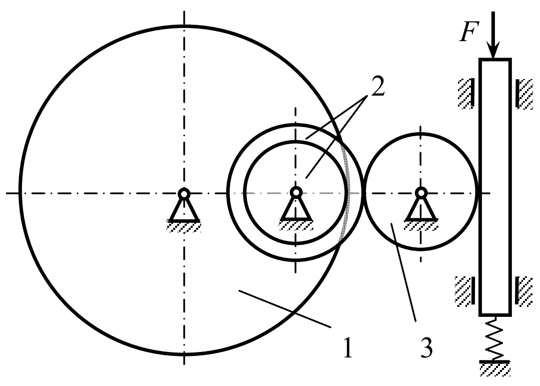
52



53

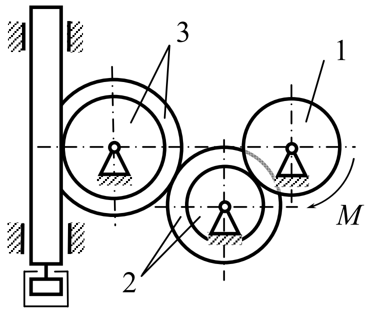


54

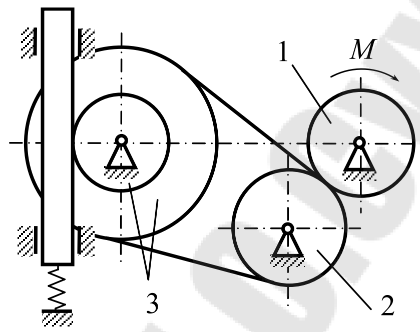


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

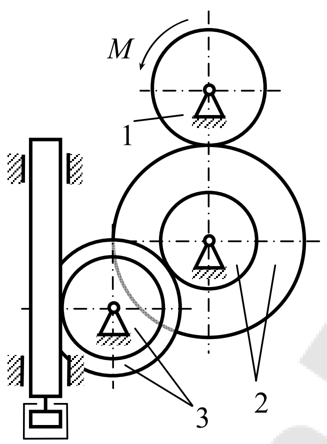
55



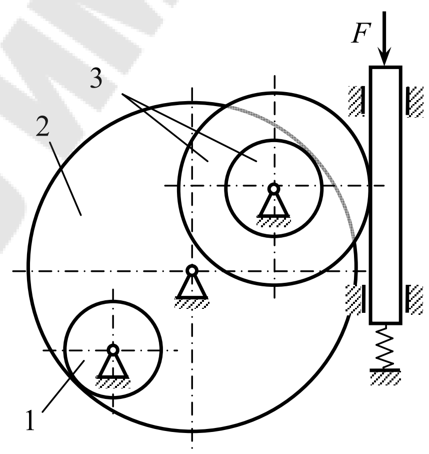
56



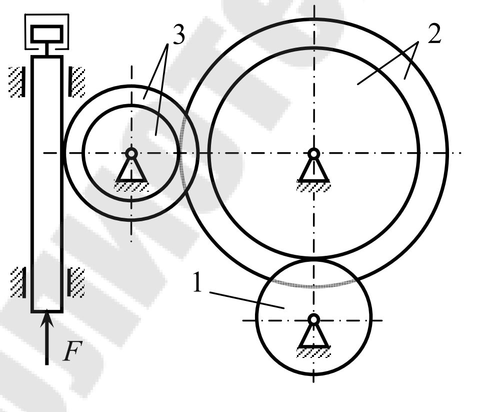
57



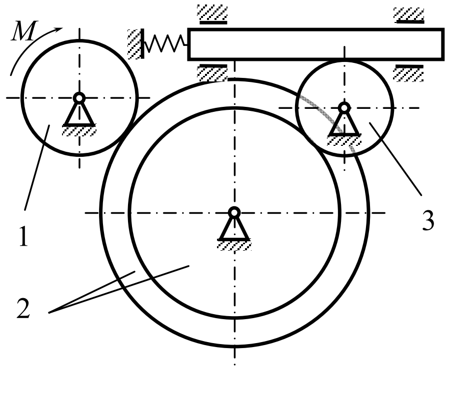
58



59

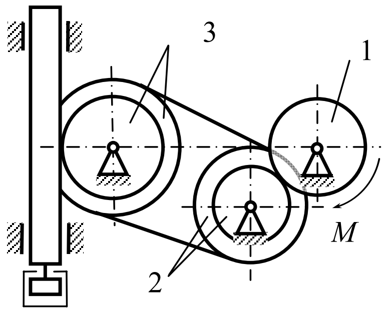


60

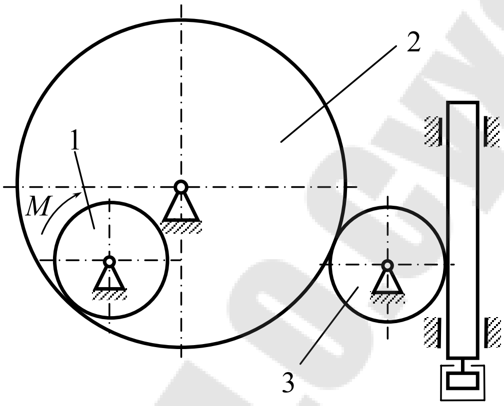


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

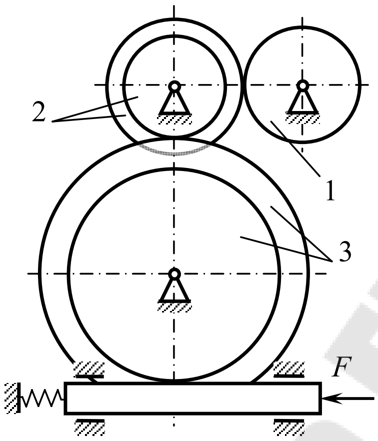
61



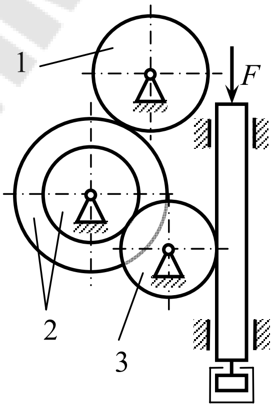
62



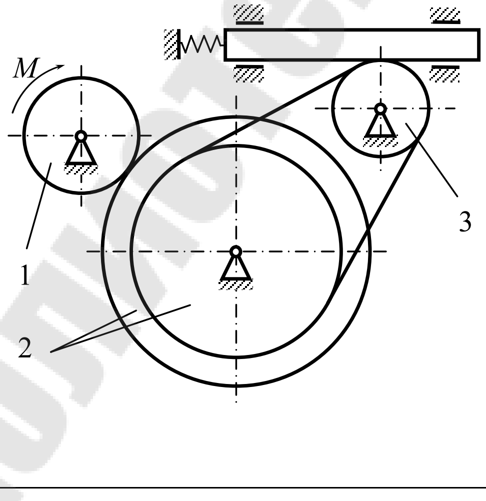
63



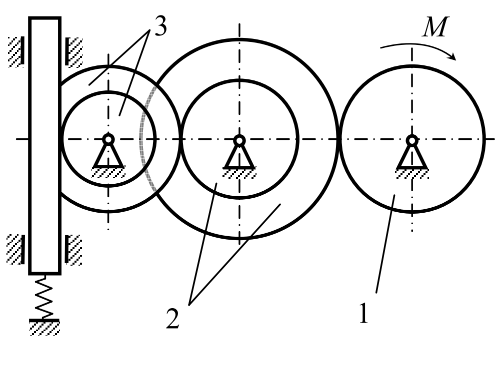
64



65

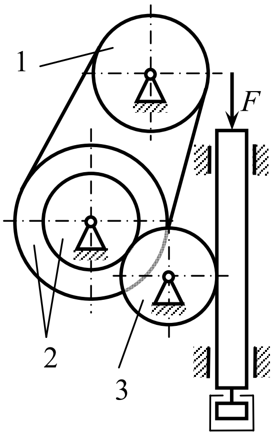


66

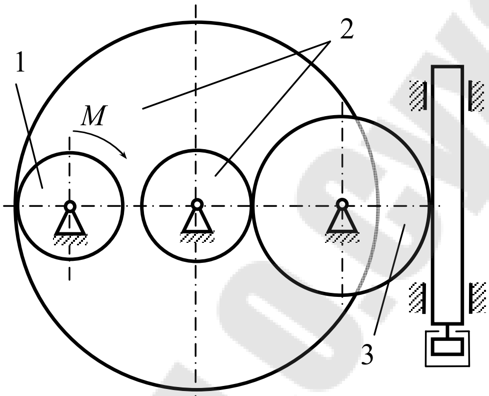


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

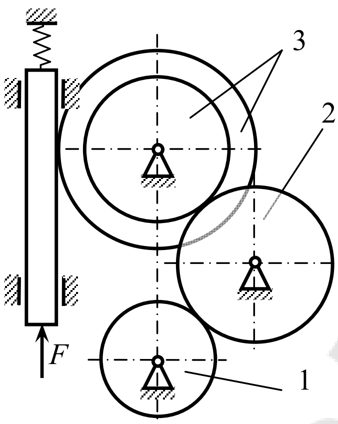
67



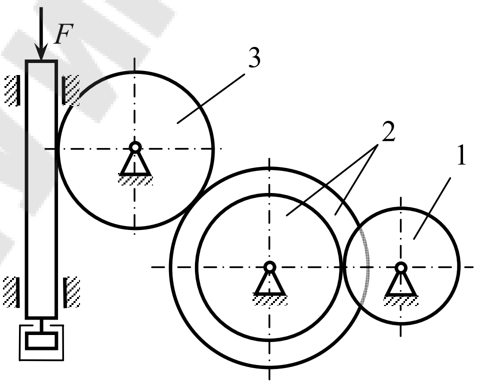
68



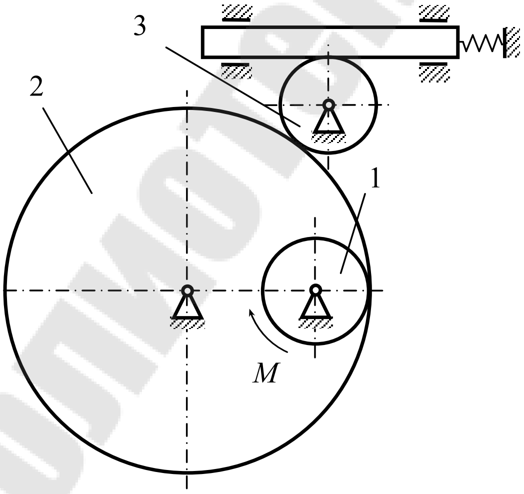
69



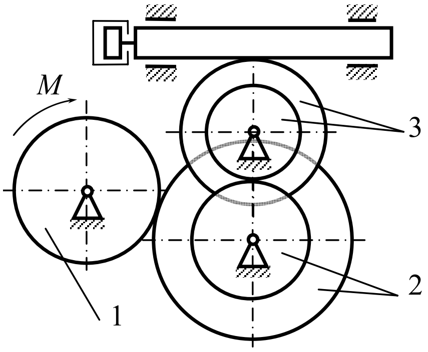
70



71

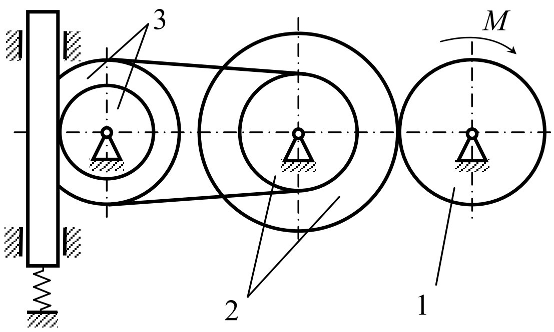


72

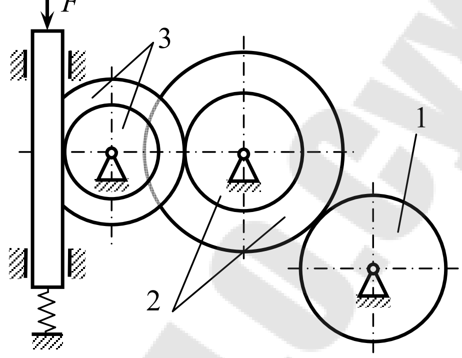


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

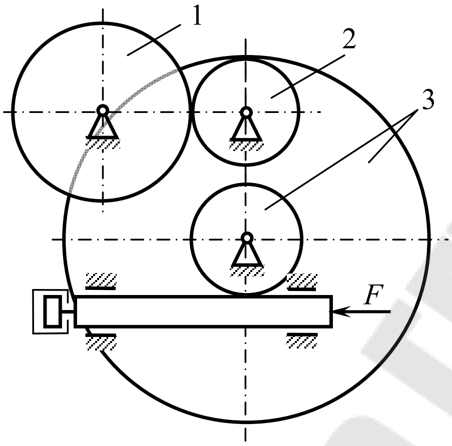
73



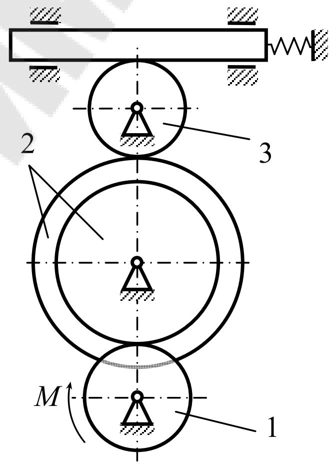
74



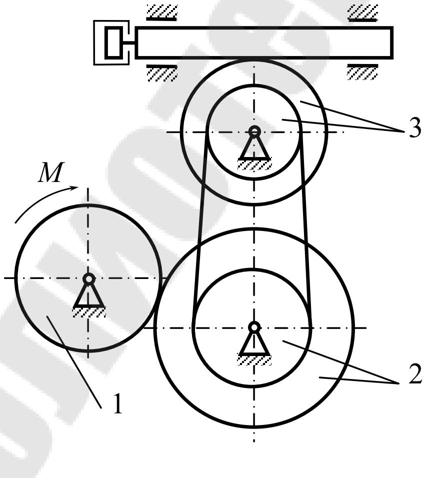
75



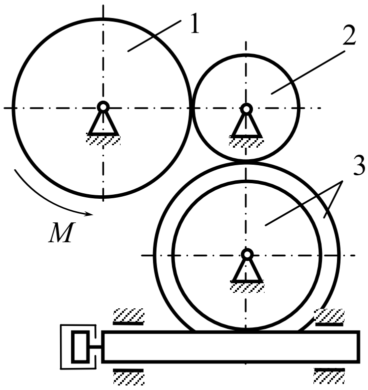
76



77

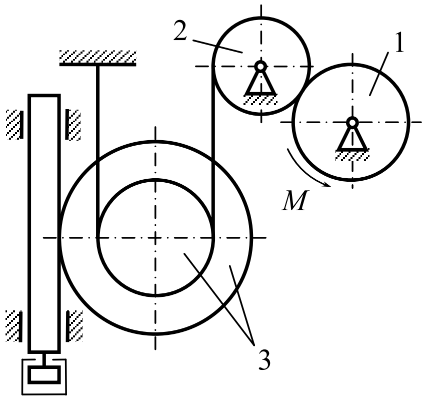


78

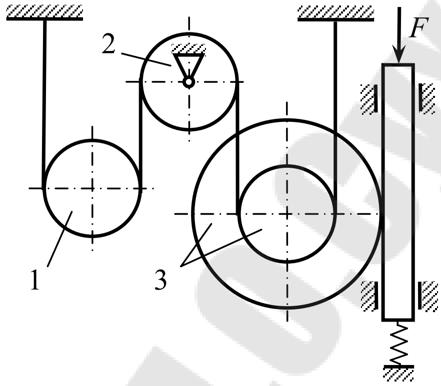


Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

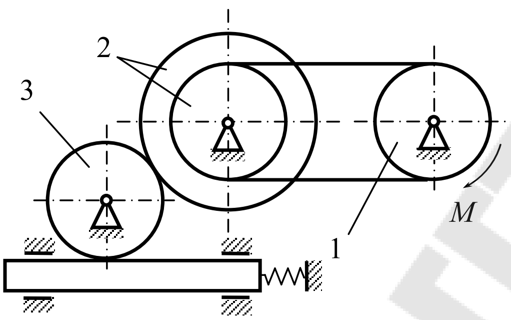
79



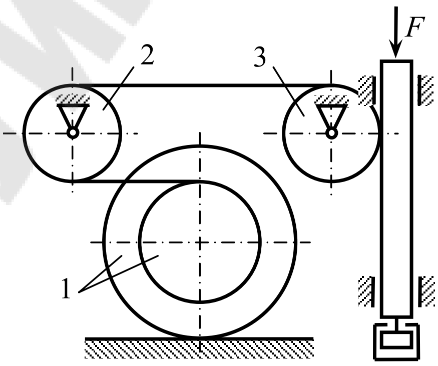
80



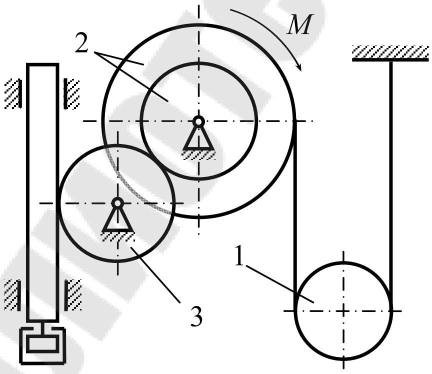
81



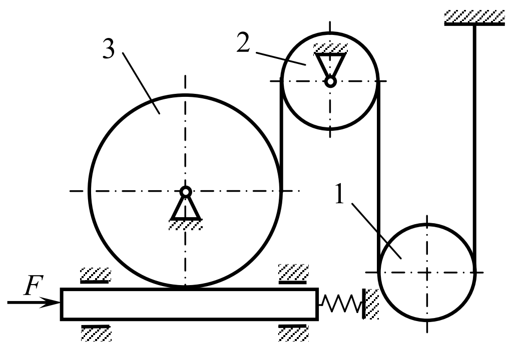
82



83

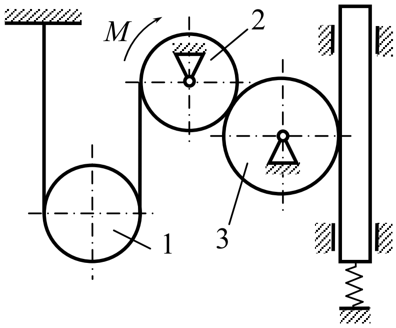


84

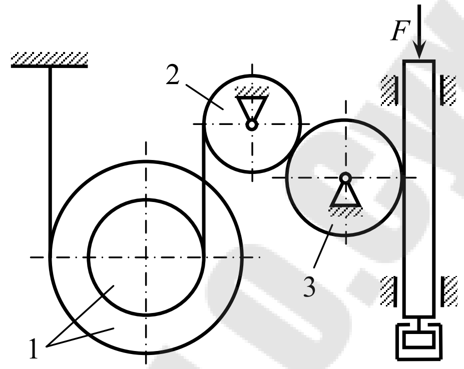


Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

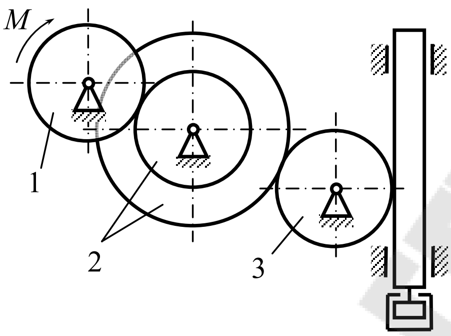
_85_



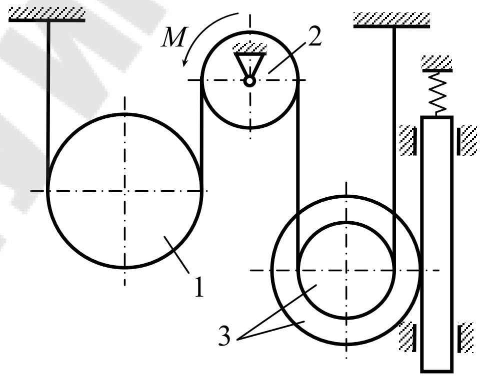
_86_



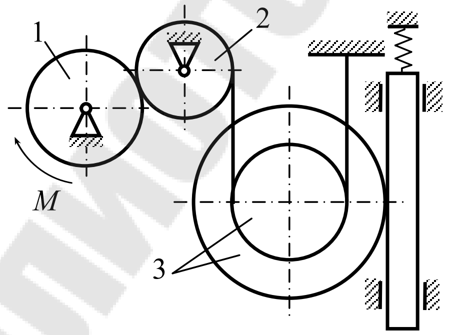
_87_



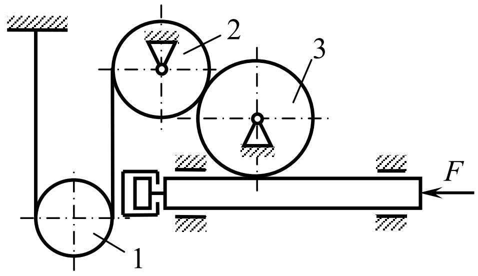
_88_



_89_

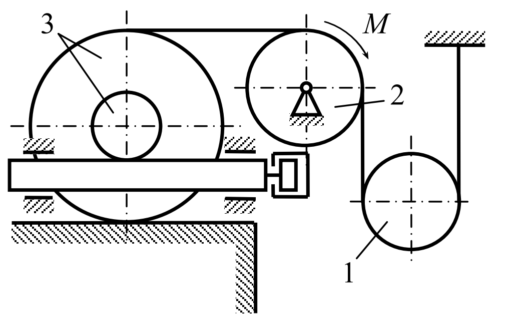


_90_

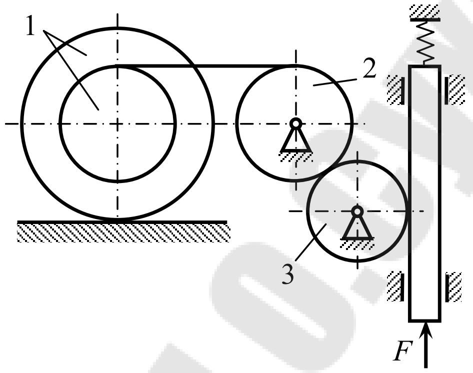


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

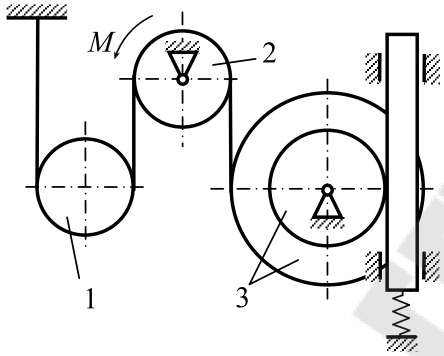
91



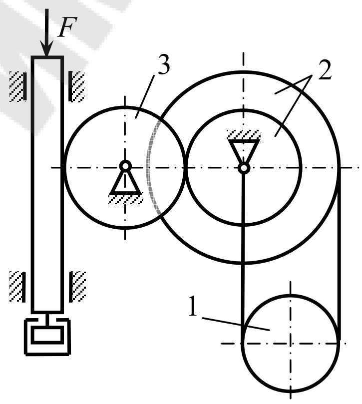
92



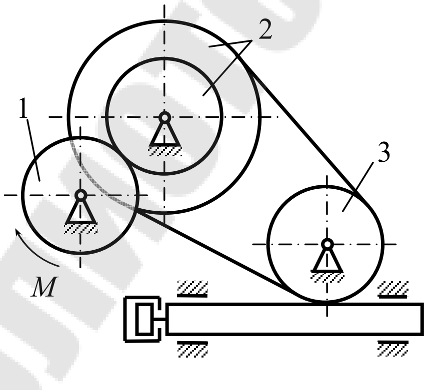
93



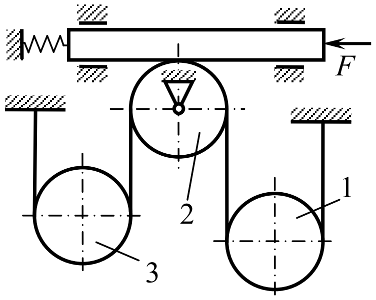
94



95

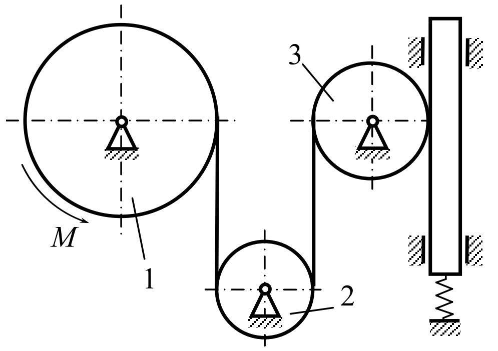


96

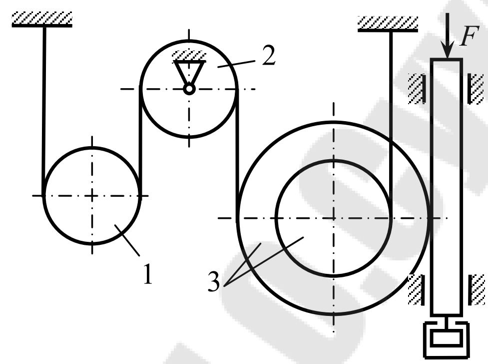


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

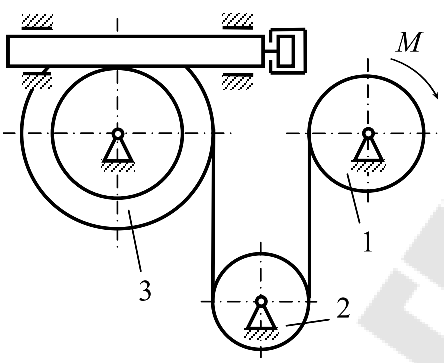
97



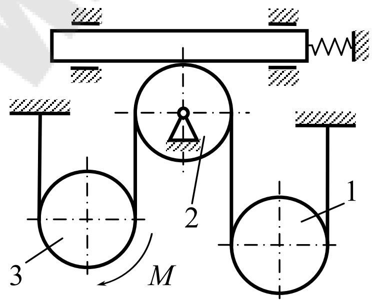
98



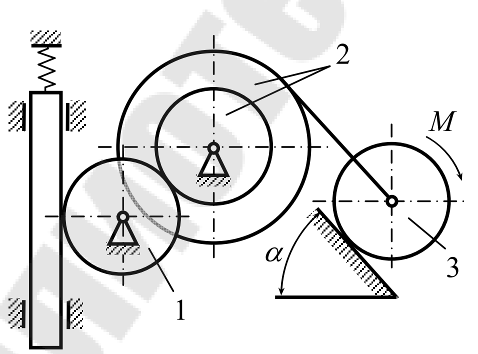
99



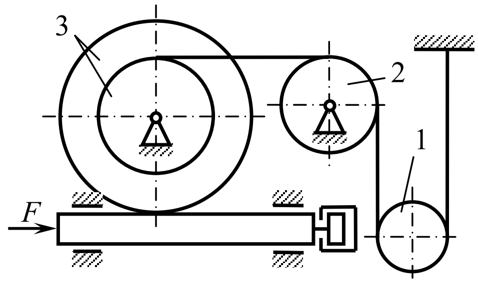
100



101

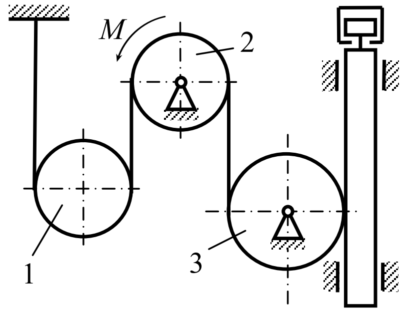


102

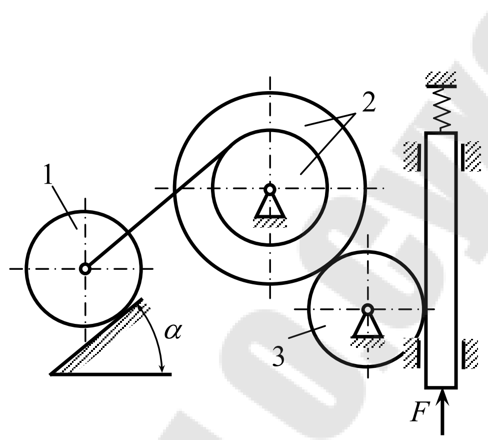


Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

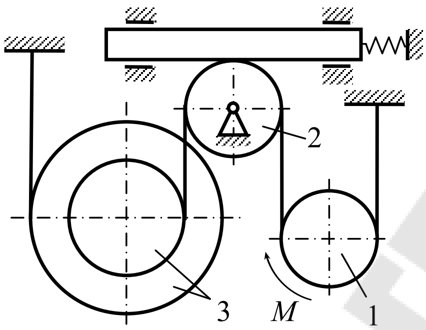
103



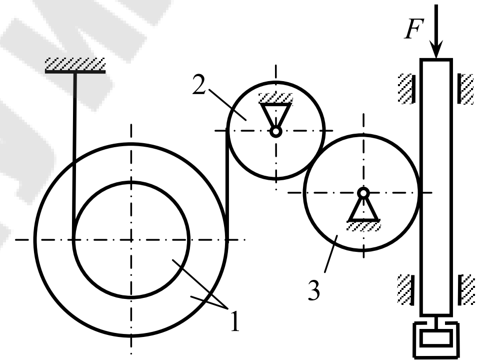
104



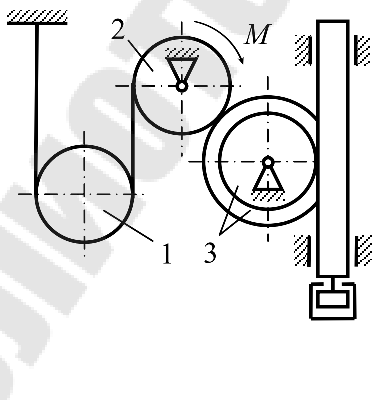
105



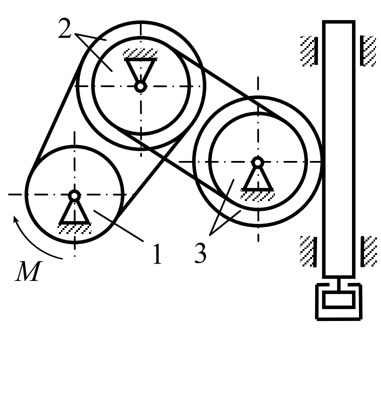
106



107



108



Библиотека ГГТУ им. П.О. Сухого

Содержание

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

ДИНАМИКА

Практикум
по курсу «Теоретическая механика»
для студентов инженерно-технических
специальностей

Авторы-составители: **Шабловский** Олег Никифорович
Лискович Михаил Ильч

Редактор Н. Г. *Мансурова*
Компьютерная верстка *Н. В. Широглазова*

Подписано в печать 03.01.07.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 3,12.
Изд. № 223.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр
Учреждения образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0133207 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48, т. 47-71-64.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого