Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

С. М. Евтухова, М. В. Задорожнюк, В. В. Кондратюк

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОСОБИЕ
по одноименным дисциплинам
для студентов специальностей
1-36 04 02 «Промышленная электроника»
и 1-40 01 01 «Информационные системы и технологии»
дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2011

УДК 519.854(075.8)
ББК 22.176я73
Е27

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 11 от 27.06.2011 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Высшая математика» ГГУ им. Ф. Скорины д-р физ.-мат. наук, проф. *В. Н. Семенчук*

Евтухова, С. М.

Е27 Основы дискретной математики. Специальные главы высшей математики : пособие по одноим. дисциплинам для студентов специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника» и 1-40 01 01 «Информационные системы и технологии» днев. и заоч. форм обучения / С. М. Евтухова, М. В. Задорожнюк, В. В. Кондратюк. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 66 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-031-7.

Рассмотрены такие понятия, как множество, отношения; элементы комбинаторного анализа и математической логики; булевы функции, их синтез и минимизация в классе ДНФ; взвешенный граф и его матричное задание, а также некоторые алгоритмы на графах, что позволяет напрямую связать абстрактную алгебраическую теорию с прикладными задачами автоматизации и управления.

Для студентов технических специальностей.

УДК 519.854(075.8)
ББК 22.176я73

ISBN 978-985-535-031-7

РАЗДЕЛ 1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества. Способы задания множеств и операции над ними

Множество – набор (совокупность, собрание) каких-либо объектов, обладающих общим для всех их (характеристическим) свойством. Сами объекты при этом называются ***элементами множества***.

Обозначения:

- $A, B, C, ..., X, Y, Z$ – множества;
- $a, b, c, ..., x, y, z$ – элементы множества;
- $x \in A$ – элемент x принадлежит множеству A;
- $x \notin A$ – элемент x не принадлежит множеству A.

Пример 1. $\{А, Б, В, Г, ..., Я\}$ – русский алфавит; $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ – натуральные числа.

Пример 2. Пусть A – множество делителей числа 12. Тогда $2 \in A$, а $5 \notin A$.

Множества бывают конечными, состоящими из конечного (фиксированного) числа элементов, или бесконечными. Конечные множества можно задать *полным списком элементов*: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. При этом число элементов $n(A) \equiv |A|$ называется ***мощностью*** конечного множества A. Бесконечные множества могут быть заданы либо описанием *характеристических свойств* элементов, составляющих множество: $A = \{x \mid P(x)\}$, либо с помощью определенной *порождающей процедуры*: $A = \{x \mid f\}$.

Встречаются множества, не содержащие ни одного элемента. Например, множество людей, чей рост составляет 10 м. Такие множества называются ***пустыми*** и обозначаются $\varnothing$.

Пример 3. Пусть A – множество первых десяти натуральных чисел. Так как множество конечное, то его можно задать полным списком элементов: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Также можно описать данное множество, указав характеристическое свойство его элементов: $A = \{n \mid n \in \mathrm{N}, n \le 10\}$. С помощью порождающей процедуры можно задать хорошо известную последовательность Фибоначчи $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, ...\}$ следующим образом:

$$\{x \mid x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, x_1 = 1, x_2 = 1\}.$$

Если каждый элемент множества A содержится во множестве B, то A называется ***подмножеством*** множества B. При этом пишут $A \subseteq B$. По определению пустое множество $\varnothing$ есть подмножество всякого множества, в том числе и пустого.

Пример 4. A – множество четных чисел, B – множество целых чисел, $A \subseteq B$.

Два множества A и B называются ***равными*** тогда и только тогда, когда они содержат одни и те же элементы (принцип равенства множеств). Принцип равенства всегда применим к конечным множествам. Однако для бесконечных множеств он становится формальным, т. к. невозможно перебрать бесконечное число элементов.

Пример 5. Рассмотрим множества $A = \left\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$ и $B = \{1, 2\}$. Тогда $A = B$, т. к. оба множества состоят из одних и тех же элементов.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется ***собственным подмножеством*** B. При этом пишут $A \subset B$.

В любом приложении теории множеств заранее понятна природа объектов, которые объединяются во множества. Все такие объекты объединяются в одно понятие – ***универсальное множество***, или ***универсум*** U.

Пусть A – некоторое конечное множество. Совокупность всех подмножеств множества A называется ***булеаном*** и обозначается $P(A)$. Если $|A| = n$, то число элементов его булеана $|P(A)| = 2^n$.

Пример 6. Пусть $A = \{2, 4\}$, тогда $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$, а именно $P(A) = \{\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}\} = \{\varnothing, \{2\}, \{4\}, A\}$.

Существуют следующие операции над множествами:

1) объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$;

2) пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$;

3) разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$;

4) дополнение множества A во множестве U:

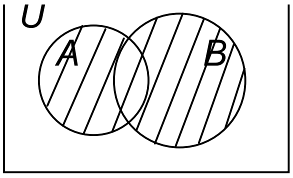
$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\} = U \setminus A;$$

5) разностная сумма: $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ или

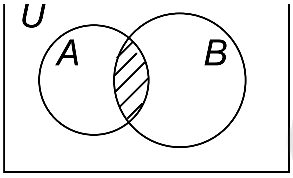
$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B):$$

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B, \text{ но } x \notin A \cap B\}.$$

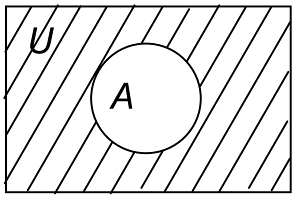
Для графического изображения теоретико-множественных операций и соотношений удобно использовать диаграммы Венна (круги Эйлера):



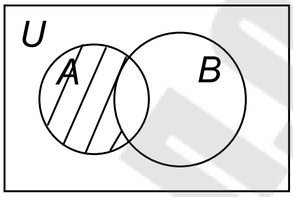
$\Leftarrow \quad A \cup B$



$\Leftarrow \quad A \cap B$



$\Leftarrow \quad \overline{A}$



$\Leftarrow \quad A \setminus B$

Пример 7. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Тогда $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$, $A \oplus B = \{1, 4, 5\}$.

Свойства операций над множествами:

1) коммутативность: $A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$;

2) ассоциативность: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3) дистрибутивность: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

4) законы де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

5) идемпотентность: $A \cup A = A$, $\quad A \cap A = A$;

6) законы поглощения: $A \cup (A \cap B) = A$, $\quad A \cap (A \cup B) = A$;

7) закон двойного дополнения: $\overline{\overline{A}} = A$;

8) операции с универсальным и пустым множествами:

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A, \quad A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Разностная сумма удовлетворяет таким свойствам, как коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность, а также для нее известны некоторые полезные соотношения:

$$A \cup B = A \oplus B \oplus (A \cap B), \quad A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C),$$

$$A \setminus B = A \oplus (A \cap B), \quad A \oplus \varnothing = A, \quad A \oplus A = \varnothing.$$

Свойства разностной суммы удобно использовать для решения систем теоретико-множественных уравнений.

Пример 8. Решите систему уравнений $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C, \end{cases}$ если $B \subseteq A$, $A \cap C = \varnothing$.

Решение. Из системы имеем $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = B \cup C \Rightarrow A \oplus X = B \cup C$. Тогда общее решение системы $X = A \oplus (B \cup C)$ или $X = (A \setminus (B \cup C)) \cup ((B \cup C) \setminus A)$. Учитывая условия задачи, имеем $(B \cup C) \setminus A = C$, а $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B$. Окончательно $X = (A \setminus B) \cup C$.

Ответ: $X = (A \setminus B) \cup C$.

Пусть A, B и C – конечные множества. Тогда для числа элементов множества $A \cup B$ и $A \cup B \cup C$ справедливы следующие формулы (**принцип включения-исключения**):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) -$$
$$- n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Пример 9. Из 40 учащихся класса 23 занимаются в математическом кружке, а 27 – в литературном. Каким может быть число учащихся: а) занимающихся и в математическом, и в литературном кружках; б) занимающихся хотя бы в одном из кружков?

Решение. Введем обозначения: U – множество учащихся класса; B – множество учащихся, занимающихся в математическом кружке и C – в литературном кружке; $B \cap C$ – множество учащихся, занимающихся и в математическом и в литературном кружках; $B \cup C$ – множество учащихся, занимающихся хотя бы в одном кружке. По условию задачи $n(U) = 40$, $n(B) = 23$, $n(C) = 27$. Множества B и C таковы, что $B \cap C \neq \varnothing$. Если допустить, что $B \cap C = \varnothing$, то $n(B \cup C) = n(B) + n(C) = 23 + 27 = 50$, что невозможно, т. к. в классе 40 учащихся. Значит, возможны следующие случаи: $B \cap C \neq \varnothing$ и $B \subseteq C$. Очевидно, что $n(B \cap C)$ будет минимальным, когда $n(B \cup C) = n(U)$, т. е. когда $n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C) = 23 + 27 - 40 = 10$. Это число может увеличиваться до тех пор, пока множество B не станет подмножеством множества C, и тогда $n(B \cap C) = 23$. При этом число учащихся, занимающихся хотя бы в одном из кружков, уменьшится от 40 до 27. Таким образом, число учащихся, занимающихся и в математическом, и в литературном кружках, может изменяться от 10 до 23, а число учащихся, занимающихся хотя бы в одном кружке, – от 27 до 40.

Ответ: а) $[10, 23]$; б) $[27, 40]$.

Пример 10. Сколько натуральных чисел из первых 100 не делятся одновременно на 2, 3 и 5?

Решение. Введем обозначения: A – множество натуральных чисел, делящихся на 2, B – множество натуральных чисел, делящихся на 3 и C – множество натуральных чисел, делящихся на 5. Тогда количество чисел, делящихся на 2, найдем как $|A| = \left[\frac{100}{2}\right] = 50$. Аналогично находим $|B| = \left[\frac{100}{3}\right] = 33$, $|C| = \left[\frac{100}{5}\right] = 20$. Количество чисел, делящихся на 2 и 3 одновременно, равно $|A \cap B| = \left[\frac{100}{6}\right] = 16$, количество чисел, делящихся одновременно на 2 и 5, а также на 3 и 5, соответственно, равны $|A \cap C| = \left[\frac{100}{10}\right] = 10$, $|B \cap C| = \left[\frac{100}{15}\right] = 6$. Количество чисел, делящихся сразу на все три множителя, $|A \cap B \cap C| = \left[\frac{100}{30}\right] = 3$. Теперь можем определить число элементов, делящихся хотя бы на одно число $|A \cup B \cup C| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$. Окончательно количество натуральных чисел, которые не делятся одновременно на 2, 3 и 5, равно $X = 100 - 74 = 26$.

Ответ: 26.

Задания

1. Задайте разными способами B – множество четных чисел.

2. Докажите следующие законы для разностей:
а) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; б) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

3. Докажите равносильности:
а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
в) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; г) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B$.

4. Укажите, какие из приведенных включений справедливы и почему: а) $a \in \{2, x, a\}$; б) $2 \in \{1, \{2, 3, 4\}, 5\}$; в) $5 \subset \{1, 3, 5\}$;
г) $x \in \{1, \sin x\}$; д) $\{x, y\} \subset \{a, \{x, y\}, b\}$; е) $\{5\} \subset \{1, \{3, 4\}, 5\}$.

5. Пусть $U = \{$множество всех животных$\}$, $M = \{$множество всех млекопитающих$\}$, $D = \{$множество всех собак$\}$, $C = \{$множество всех кошек$\}$, $L = \{$множество всех овчарок$\}$. Проверьте истинность утверждений:

а) $L \subset D \subset M \subset U$; б) $C \subset D \subset M \subset U$; в) $C \cap D = \varnothing$;

г) $D \setminus L \subset C$; д) $U \setminus M \subset D$; е) $D \setminus C = D$.

6. Составьте булеан множества $P(A)$:

а) $A = \{1, 3, 4\}$; б) $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$.

7. Составьте булеан множества корней уравнения $x^2 - 16 = 0$, если универсальное множество:

а) $U = Q$; б) $U = N$; в) $U = R$.

8. Укажите множество корней уравнения $x^4 - 1 = 0$ для следующих универсальных множеств:

а) $U = Q$; б) $U = N$; в) $U = Z$; г) $U = R$; д) $U = C$.

9. Решите системы уравнений: а) $\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$ если $B \subseteq A \subseteq C$;

б) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$ если $B \subseteq A \subseteq C$; в) $\begin{cases} A \cap X = B \setminus X, \\ C \cup X = X \setminus A. \end{cases}$

10. Можно ли узнать, сколько человек в классе, если в нем:

а) 17 мальчиков и 15 девочек; б) 17 мальчиков и 23 пионера?

11. В классе 40 человек. Играют в баскетбол 26 человек, занимаются плаванием 25, ходят на лыжах 27, одновременно плаванием и баскетболом занимаются 15 человек, баскетболом и лыжами – 16, плаванием и лыжами – 18. Один из учащихся освобожден от занятий по физкультуре. Сколько человек занимается всеми видами спорта? Сколько человек занимается только одним видом спорта?

12. В период отпуска 80 % дней была теплая погода, 80 % дней было облачно и 60 % дней было ветрено. Подсчитайте минимальное число дней в процентах, когда одновременно было тепло, облачно и ветрено.

13. Экзамены по физике, математике и химии сдавали 75 студентов. Экзамен по физике успешно сдали 51 человек, по химии – 40, по математике – 35. По физике или химии сдали экзамены 61 студент, 60 – по физике или математике, 53 – по химии или математике, а 7 студентов не сдали ни одного экзамена. Сколько студентов сдали все три экзамена?

14. Известно, что из 200 сотрудников института 52 человека посетили Италию, 62 – Германию, 90 человек – Францию, Италию и

Германию посетили 3 человека, Италию и Францию – 4, Германию и Францию – 10, все три страны – 2 человека. Сколько сотрудников посетило: а) только Италию; б) только Францию?

15. В группе 30 студентов, из них 18 увлекаются физикой, а 17 – химией. Каким может быть число студентов: а) увлекающихся двумя предметами; б) увлекающихся хотя бы одним предметом?

16. В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. Результаты таковы: задачу по алгебре решили 20 учащихся, по геометрии – 18, по тригонометрии – 18, по алгебре и геометрии – 7, по алгебре и тригонометрии – 8, по геометрии и тригонометрии – 9. Известно также, что трое не справились ни с одной задачей. Сколько учащихся решили все три задачи? Сколько решили ровно две задачи?

17. В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике – 50, по информатике – 48. Когда учеников опросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем «в одной», а «в трех» – втрое меньше, чем «в одной». Сколько всего учеников участвовало в этих олимпиадах?

18. A – подмножество натуральных чисел, каждый элемент множества A есть число, кратное или 2, или 3, или 5. Найти число элементов во множестве A, если среди них 70 чисел, кратных 2; 60 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратных 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15 и 20 чисел, кратных 30.

19. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги А, В и С. Результаты опроса оказались таковы: книгу А читали 25 учащихся, книгу В – 22, книгу С – также 22. Книгу А или В читали 33 ученика, А или С – 32, В или С – 31, все три книги прочли 10 человек. Сколько учащихся прочло только по одной книге? Сколько не читало ни одной из этих книг?

20. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, «отлично» получили: по математике – 48 абитуриентов, по физике – 37, по русскому языку – 42, по математике или физике – 75, по математике или русскому языку – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

21. Каждый из учеников класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли А, В и С посмотрели соответственно 25, 12 и 23 учащихся. Сколько учеников в классе? Сколько из них видело спектакли А и В, А и С, В и С?

1.2. Бинарные отношения

Декартовым* (*прямым*) *произведением $A \times B$ двух непустых множеств называется совокупность упорядоченных пар вида (a, b), где $a \in A$, а $b \in B$, т. е. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Например, декартово произведение множеств $A = \{2, 3\}$ и $B = \{1, 7, 9\}$ равно $A \times B = \{(2,1), (2,7), (2,9), (3,1), (3,7), (3,9)\}$.

Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество картежей длины n вида $(a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_i \in A_i$.

Теорема 1. Если множество A содержит m элементов, а множество B – n элементов, то декартово произведение $A \times B$ содержит $m \cdot n$ элементов: $|A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot n$.

Пример 11. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 5, 6, 7, если цифры в записи числа: 1) могут повторяться; 2) не повторяются?

Решение. 1. Если цифры могут повторяться, то способов выбора первой 3, второй – тоже 3, третьей – 3. В этом случае можно составить $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ чисел. 2. Если цифры не повторяются, то способов выбора первой цифры 3, второй – 2, третьей – 1. В этом случае можно составить $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ трехзначных чисел.

Ответ: 1) 27; 2) 6.

С помощью декартова произведения легко ввести важное понятие – бинарное отношение, которое отражает связь между объектами, элементами, предметами и т. п.

Бинарным отношением R, определенным на множествах A и B, называется всякое подмножество их декартового произведения: $R \subseteq A \times B$.

Если $(a, b) \in R$, то пишут aRb, т. е. a находится в отношении R к b. Иногда отношение R заменяется специальным символом, например, <, >, =, ~ и т. п. В случае если $A = B$, то говорят, что отношение R определено на множестве A, при этом $R \subset A^2$, где A^2 – декартов квадрат на множестве A.

Пример 12. Пусть A – множество слов русского языка, B – множество слов английского языка. Тогда бинарное отношение $R \subseteq A \times B$ можно рассматривать как русско-английский словарь.

Над бинарными отношениями, как над множествами, определены все теоретико-множественные операции. Например, если $a(R \cup S)b$, то или aRb, или aSb. В частности, если R = «x является отцом y», а S = «x является матерью y», $R \cup S$ = «x является родителем y».

Пусть R есть отношение между A и B. Тогда вводятся следующие отношения:

– *обратное отношение* – $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$, $R^{-1} \subseteq B \times A$;

– *дополнение отношения* – $\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$, $\overline{R} \subseteq A \times B$, $R \cap \overline{R} = \varnothing$, $R \cup \overline{R} = U$;

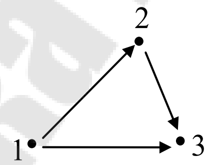
– *тождественное отношение* – $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$, $I \subseteq A^2$;

– *универсальное отношение* – $U = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$, $U = A \times B$.

Задать отношение можно *перечислив* все пары элементов, связанных этим отношением. Кроме того, отношения можно задать *графически* или в *матричной* форме. При изображении отношения графически элементам множеств сопоставляют точки плоскости, а парам $(a,b) \in R$ – стрелки (дуги), идущие из a в b. Матрица бинарного отношения $R \subseteq A \times B$ вводится следующим образом:
$$(M_R)_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i R b_j; \\ 0, \text{ если } a_i \overline{R} b_j. \end{cases}$$

Пример 13. Рассмотрим на множестве $A = \{1, 2, 3\}$ отношение «меньше». Зададим это отношение различными способами: 1) перечисление $R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$; 2) матричная форма $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3) графическая форма



Пусть $R_1 \subseteq A \times B$ [illegible] два бинарных отношения. Тогда их ***композицией*** называется отношение $R = R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$, состоящее только из тех пар $(a,c) \in R$, для которых найдется элемент $b \in B$ такой, что aR_1b и bR_2c. Например, $R_1 = \{(1,2),(2,1),(1,3),(2,3)\}$, $R_2 = \{(1,1),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$, тогда их композиция равна $R_1 \circ R_2 = \{(1,1),(1,3),(2,1),(1,2),(2,2)\}$.

Рассмотрим некоторые важнейшие ***типы отношений***. Пусть $R \subseteq A^2$. Тогда отношение R называется:

– ***рефлексивным***, если для $\forall a \in A$, aRa;

– ***симметричным***, если для $\forall a,b \in A$, $aRb \Rightarrow bRa$, т. е. $R^{-1} = R$;

– ***антисимметричным***, если для $\forall a,b \in A,\ aRb, bRa \Rightarrow a=b$;

– ***транзитивным***, если для $\forall a,b,c \in A,\ aRb, bRc \Rightarrow aRc$;

– ***полным***, если для $\forall a,b \in A,\ a=b$ или aRb или bRa.

Установить тип отношения легко и по матрице отношения:

– R – рефлексивно $\Rightarrow M_R$ на диагонали содержит 1;

– R – симметрично $\Rightarrow M_R^T = M_R$;

– R – антирефлексивно $\Rightarrow M_R$ на диагонали содержит 0;

– R – полно $\Rightarrow M_R$ состоит из 1.

Пусть $R \subseteq A^2$. Тогда если отношение R рефлексивно, симметрично и транзитивно, то R называется ***отношением эквивалентности***. Примеры отношений эквивалентности: быть параллельными для прямых, быть подобными для треугольников, быть равными для функций, выражений и т. п.

Теорема 2. Если на множестве A задано отношение эквивалентности, то оно разбивает это множество на попарно непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности).

Верно и обратное утверждение: если какое-либо отношение, заданное на множестве *A*, определило разбиение этого множества на классы, то это отношение есть отношение эквивалентности.

Бинарное отношение $R \subseteq A^2$ называется ***отношением порядка***, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Примеры отношений порядка: $\subseteq$, $\leq$, «*x* делит y на множестве *N*».

Если на множестве *A* задано отношение порядка *R*, то множество называется ***упорядоченным***. Но являясь отношением порядка, различные отношения упорядочивают множество по-разному. Отношение порядка на множестве *A*, для которого любые два элемента сравнимы (т. е. либо xRy, либо $yRx\ \ \forall x,y \in A$), называется отношением ***линейного порядка***. Если во множестве есть элементы, несравнимые между собой, то говорят, что задан ***частичный порядок***. Упорядоченное множество удобно изображать с помощью *диаграмм Хассе*, в которых сравнимые элементы, непосредственно следующие друг за другом, изображаются точками, соединенными отрезками.

Задания

22. Докажите, что $(A \cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$.

23. Выполняется ли для множеств $A=\{3,5,7,8,9\}$, $B=\{8,9\}$ и $C=\{0,1,2\}$ равенство $(A \setminus B)\times C = (A\times C)\setminus(B\times C)$?

24. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 6, 8, если цифры не повторяются? Сколько из них начинаются с цифры 2?

25. В классе изучается 10 предметов. В понедельник 5 уроков, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

26. Изобразите на координатной плоскости декартово произведение множеств $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$; б) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [3, 5]$;

в) $A = [1, 3]$, $B = [3, 5]$; г) $A = R$, $B = [3, 5]$;

д) $A = R$, $B = R$.

27. Выпишите явно отношение $R \equiv x \mid y$= «x делит y», определенное на множестве $C = \{2, 3, 6, 10, 15\}$.

28. На множестве $A = \{1, 2, 3\}$ различными способами задайте отношения R_1 = «меньше или равно» и R_2 = «равно».

29. Найдите $R \cap S$, $R \cup S$, $R^{-1} \cap S$ для отношений $R = \{(1,1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$ и $S = \{(1,1), (1,3), (2,1), (3,3)\}$.

30. Для отношения $R = \{(1,1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ найдите R^{-1}, $R \circ R$ и $R^{-1} \circ R$.

31. Найдите композицию $R \circ R$ для отношения R= «x взаимно просто с y», определенного на множестве $B = \{3, 4, 6, 8, 9\}$.

32. Установите, является ли отношение S рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным, где $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$.

33. Установите, является ли отношение R = «x взаимно просто с y», определенное на множестве $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным.

34. На множестве дробей $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right\}$ задано отношение равенства. Постройте граф этого отношения. Какими свойствами обладает это отношение?

35. Отношение T = «иметь одно и то же число делителей» задано на множестве $\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$. Покажите, что T – отношение эквивалентности, и запишите все классы эквивалентности.

36. Установите, является ли эквивалентным отношение R= «x знаком с y», определенное на множестве студентов университета.

37. На множестве $A=\{3,6,9,12,15\}$ задано отношение «*x* делитель *y*». Покажите, что это отношение упорядочивает множество *A*. Чем этот порядок отличается от того, который устанавливается во множестве *A* при помощи отношения «больше».

38. Рассмотрим следующие отношения: A_1 – быть отцом, A_2 – быть матерью, A_3 – быть ребенком, A_4 – быть братом, A_5 – быть сестрой, A_6 – быть мужем, A_7 – быть женой. Выразите с их помощью отношения:

а) быть родителем (B); б) быть внуком (C);
в) быть невесткой (D); г) быть тещей (E);
д) быть свекровью (F).

39. На множестве $A=\{2,3,4,5,8,9,10,15\}$ задано отношение порядка $R\equiv x\mid y=$ «*x* делит *y*». Постройте диаграмму Хассе. Укажите наименьший, наибольший, максимальный и минимальный элементы.

40. На множестве $B=\{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24\}$ задано отношение порядка $R=$ «*x* кратно *y*». Постройте диаграмму Хассе. Укажите наименьший, наибольший, максимальный и минимальный элементы.

41. На булеане множества $A=\{1,3,6,9\}$ частичный порядок может быть установлен с помощью отношения включения подмножеств $\subseteq$. Постройте соответствующую диаграмму Хассе. Укажите наибольший и наименьший элементы.

1.3. Элементы комбинаторного анализа

Пусть $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – конечное множество. Любой *упорядоченный* набор $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}\right)$ из n различных элементов множества X называется ***перестановкой*** и обозначается $P_n=n!$. Любой *упорядоченный* набор $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}\right)$ из m $(m\le n)$ различных элементов называется ***размещением*** из n элементов по m: $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$. В частности, для $n=m$ размещение будет перестановкой. Любой *неупорядоченный* набор, т. е. подмножество $\left\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}\right\}$ из m $(m\le n)$ различных элементов множества X называется ***сочетанием*** из n элементов по m: $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Если в размещении и сочетании из n элементов по m убрать требование наличия *различных* элементов и разрешить повторение, то такие размещения и сочетания называются с ***повторением*** и соответственно равны: $\widetilde{A}(n,m)=n^m$, $\widetilde{C}(n,m)=C_{n+m-1}^{m}=\dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$.

Пример 14. Сколькими способами:

1) можно расставить на полке 5 книг? $P_5=5!=120$;

2) можно расставить на полке 3 книги из имеющихся 5? $A_5^3=\dfrac{5!}{3!}=60$;

3) можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеются 80 солдат и 3 офицера? $N=C_3^1\cdot C_{80}^3=246480$;

4) можно составить наборы из 7 пирожных, если в продаже имеются 4 сорта? $C_{4+7-1}^7=C_{10}^7=120$.

Число различных ***разбиений*** конечного множества X на k подмножеств с фиксированным числом элементов равно

$$C(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Например, сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? Слово «математика» состоит из 10 букв, имеющим состав (2, 3, 2, 1, 1, 1): буква «м» входит два раза, буква «а» входит три раза, буква «т» входит два раза, буквы «е», «и», «к» входят по одному разу. Значит, при перестановках букв получится $C(10;2,3,2,1,1,1)=\dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=151200$ слов.

С числами C_n^k связано функциональное тождество, называемое ***формулой бинома Ньютона***:

$$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^na^0b^n.$$

При этом коэффициенты $C_n^0,C_n^1,C_n^2,\ldots,C_n^n$ называются ***биномиальными коэффициентами***. Из элементарной математики хорошо известны частные случаи этой формулы – формулы сокращенного умножения.

Поскольку $C_n^k=C_n^{n-k}$, то биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов в формуле бинома Ньютона, равны.

Пример 15. Проверьте равенство $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

На самом деле, $C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = \dfrac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + \dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-m)!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right) = \frac{n(n-1)!}{m(m-1)!(n-m)(n-1-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Часто решение одной комбинаторной задачи удается свести к решению аналогичных задач меньшей размерности с помощью некоторого соотношения, называемого ***рекуррентным***. Тем самым решение сложной задачи можно получить, последовательно находя решения более легких задач. Формула вида $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$ называется рекуррентным соотношением между элементами последовательности чисел $a_1, a_2, ..., a_n$.

Пример 16. Рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ задает так называемые числа Фибоначчи. Зная $a_1 = 1$ и $a_2 = 1$, можно найти $a_3 = 2$ и т. д.: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… Иногда удается получить из рекуррентного соотношения общую формулу для вычисления a_n по номеру n. Тогда можно сразу вычислить окончательный результат без вычисления всех предыдущих результатов. Например, будем искать формулу для вычисления числа Фибоначчи в виде $a_n = \lambda^n$. Тогда из рекуррентного соотношения имеем: $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$ или $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, $(\lambda \neq 0)$ откуда $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, решением будет линейная комбинация

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Из начальных условий $(a_1 = a_2 = 1)$ находим значения констант C_1 и C_2: $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Окончательно искомая формула будет иметь вид: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Это выражение известно как формула Бине.

Рассмотренный пример позволяет сформулировать общий прием решения линейных рекуррентных соотношений, напоминающий соответствующий прием из теории дифференциальных уравнений.

Задания

42. Вычислите: а) $\dfrac{A_8^3 + A_7^4}{A_6^3}$; б) $\dfrac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$; в) $\dfrac{P_6 - P_4}{P_3}$; г) $\dfrac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$.

43. Проверьте равенства: а) $C_{15}^{10} = \dfrac{A_{15}^5}{P_5}$; б) $C_6^2 = \dfrac{A_m^{m-8}}{P_{m-8}}$.

44. Решите уравнения: а) $A_{x+1}^2 = 30$; б) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$;

в) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$; г) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$; д) $C_x^3 = \dfrac{5x(x-3)}{4}$;

е) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; ж) $C_{x+1}^5 = \dfrac{3A_x^3}{8}$; з) $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$.

45. Решите следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} A_x^y = 10A_x^{y-1}, \\ C_x^y = \dfrac{5}{3}C_x^{y-1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$ в) $\begin{cases} A_{2n}^{3x} = 8A_{2n}^{3x-1}, \\ C_{2n}^{3x} = \dfrac{8}{9}C_{2n}^{3x-1}. \end{cases}$

46. Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем ящикам, так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?

47. В технической библиотеке имеются книги по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Сколько наборов из четырех заказов можно составить по 16 разделам науки?

48. Найдите: а) четвертый член разложения $(a+3)^7$;

б) четвертый член разложения $\left(a+\sqrt{b}\right)^{12}$;

в) восьмой член разложения $\left(a^2+b^3\right)^{13}$;

г) средний член разложения $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^8$;

д) средний член разложения $\left(x\sqrt{x}-1\right)^{14}$;

е) два средних члена разложения $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{13}$.

49. Определите x из условия, что третий член разложения бинома $\left(x + x^{\lg x}\right)^5$ равен 1000000.

50. Найдите тот член разложения бинома $\left(z\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m$, который после упрощения содержит z^5, если сумма биномиальных коэффициентов этого разложения равна 128.

51. Получите формулы для биномиальных коэффициентов при:

а) $a=b=1$; б) $a=1,\ b=-1$.

52. Получите формулу n-го члена последовательности, если задано соотношение $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$ и известны $a_1=1,\ a_2=3$.

53. Получите формулу n-го члена последовательности, задаваемой соотношением $a_{n+3}=4a_{n+2}-5a_{n-1}+2a_n$, если $a_0=1,\ a_1=3,\ a_2=6$.

РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Логика высказываний

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором вполне определенно можно сказать истинно оно или ложно.

Например:

- «$2\times 2=5$» – ложное высказывание.
- «$21<23$» – истинное высказывание.
- «Который час?» – высказыванием не является.
- «Город X – столица страны Y» – высказыванием не является.

Следовательно, высказывание – величина, которая может принимать только одно из двух значений: «истина» или «ложь», которые сокращенно обозначают «*И*» или «*Л*» (1 и 0, T и F) соответственно.

Высказывания обычно обозначают буквами латинского алфавита – большими или маленькими, с индексами или без.

Различают простые или сложные (составные) высказывания. Сложные высказывания получают из простых с помощью логических операций.

Отрицанием высказывания x называется высказывание истинное тогда и только тогда, когда x – ложно.

Обозначение: $\bar{x}, \neg x$.

Отрицание есть операция, которая соответствует союзу «не».

Конъюнкцией высказываний x и y называется высказывание истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначение: $x\wedge y$, $x\,\&\,y$.

Конъюнкция есть операция, которая соответствует союзу «и».

Дизъюнкцией высказываний x и y называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания.

Обозначение: $x \vee y$.

Дизъюнкция есть операция, которая соответствует союзу «или».

Импликацией высказываний x и y называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда x – истина, а y – ложно.

Обозначение: $x \Rightarrow y$.

Импликация есть операция, которая соответствует связке «если …, то…». Высказывание x называется посылкой, а y – следствием (заключением).

Эквиваленцией высказываний x и y называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда x и y принимают одинаковые значения.

Обозначение: $x \sim y$.

Эквиваленция есть операция, которая соответствует связке «x тогда и только тогда, когда y», «x является необходимым и достаточным для y».

Новые высказывания могут быть образованы при помощи нескольких логических операций и составлять формулы. Например,

• ***Штрих Шеффера***, или антиконъюнкция:

$$x \mid y = \overline{x \wedge y} = \neg(x \wedge y).$$

• ***Стрелка Пирса***, или антидизъюнкция:

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \neg(x \vee y).$$

• ***Сумма по модулю два***, или антиэквиваленция:

$$x \oplus y = \overline{x \sim y} = \neg(x \sim y).$$

Удобной формой представления действий логических операций являются таблицы истинности:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \sim y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Для упрощения формул принято опускать внешние скобки, а также все те скобки, которые становятся необязательными, если считать, что логические операции выполняются в следующем порядке: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \sim$.

Две формулы A и B называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений элементарных высказываний.

Обозначение: $A \equiv B$.

Пример 1. Проверьте равносильность формул: $A = x \Rightarrow y$, $B = x \wedge \bar{y} \Rightarrow (\bar{x} \vee y)$.

Решение. Составим таблицу истинности.

x	y	$x \Rightarrow y$	$\bar{y}$	$x \wedge \bar{y}$	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \wedge \bar{y} \Rightarrow (\bar{x} \vee y)$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1
		A					B

$\Rightarrow A \equiv B$.

Основные равносильности:

1. Закон идемпотентности: $x \wedge x \equiv x$, $x \vee x \equiv x$.
2. Закон коммутативности: $x \wedge y \equiv y \wedge x$, $x \vee y \equiv y \vee x$.
3. Закон ассоциативности: $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$,
$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$.
4. Закон дистрибутивности: $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
5. Закон двойного отрицания (инволюции): $\bar{\bar{x}} \equiv x$.
6. Закон поглощения $x \wedge (x \vee y) \equiv x$, $x \vee (x \wedge y) \equiv x$.
7. Закон де Моргана: $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$, $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.
8. Закон склеивания (расщепления): $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \equiv x$,
$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$.
9. Действия с логическими константами 0 и 1:

$$x \vee \bar{x} \equiv 1, \quad x \vee 0 \equiv x, \quad x \vee 1 \equiv 1,$$

$$x \wedge \bar{x} \equiv 0, \quad x \wedge 0 \equiv 0, \quad x \wedge 1 \equiv x.$$

10. $x \sim y \equiv (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)$.
11. $x \Rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y \equiv \overline{x \wedge \bar{y}}$.

Пример 2. Решите уравнения:

а) $((P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (\overline{Q} \Rightarrow R)) \Rightarrow \overline{Q} = 0$; б) $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \vee P$.

Решение

а) $((P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (\overline{Q} \Rightarrow R)) \Rightarrow \overline{Q} = 0$.

По определению импликации имеем:

$$\begin{cases} \overline{Q} = 0 \\ (P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (\overline{Q} \Rightarrow R) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = 1 \\ (P \Rightarrow 1 \wedge R) \Rightarrow (0 \Rightarrow R) = 1. \end{cases}$$

Так как $1 \wedge R \equiv R$, $0 \Rightarrow R \equiv 1$ и $(P \Rightarrow R) \Rightarrow 1 = 1$ выполняется для любых P и R из множества $\{0, 1\}$, следовательно, решением данного уравнения будут следующие наборы:

$$(P, Q, R) = \{(1,1,1), (1,1,0), (0,1,1), (0,1,0)\};$$

б) $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \vee P$.

Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} P \Rightarrow Q = 1 \\ \overline{Q} \vee P = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} P \Rightarrow Q = 0 \\ \overline{Q} \vee P = 0. \end{cases}$$

По определению импликации получаем:

$$\begin{cases} P = 0 \\ \overline{Q} \vee P = 1 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} Q = 1 \\ \overline{Q} \vee P = 1 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} P = 1 \\ Q = 0 \\ \overline{Q} \vee P = 0. \end{cases}$$

Третья система противоречит определению дизъюнкции, а из первой и второй получим решения данного уравнения: $(P, Q) = \{(1,1), (0,0)\}$.

Замечание. Решение уравнений также можно находить при помощи таблиц истинности.

Формула логики высказываний называется:

– ***общезначимой*** (тождественно истинной, тавтологией), если во всех своих интерпретациях она принимает значение «истина»;

– ***невыполнимой*** (тождественно ложной, противоречием), если во всех своих интерпретациях она принимает значение «ложь»;

– ***нейтральной***, если она не является ни тавтологией, ни противоречием;

– ***выполнимой***, если она является тавтологией или нейтральной;

– ***необщезначимой***, если она невыполнимая или нейтральная.

Пример 3. Упростить формулу $(x \vee y) \wedge (\bar{z} \Rightarrow x) \wedge (z \vee \bar{x})$, используя правила равносильностей.

Решение

$$(x \vee y) \wedge (\bar{z} \Rightarrow x) \wedge (z \vee \bar{x}) \overset{11}{\equiv} (x \vee y) \wedge (\bar{\bar{z}} \vee x) \wedge (z \vee \bar{x}) \overset{5}{\equiv}$$

$$\equiv (x \vee y) \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee \bar{x}) \overset{8}{\equiv} (x \vee y) \wedge z.$$

Пример 4. Определите, является ли данная формула тавтологией, противоречием, нейтральной, выполнимой, необщезначимой

$$((A \sim B) \Rightarrow \overline{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow A \wedge B).$$

Решение. Составим таблицу истинности для данной формулы.

$(A$	$\sim$	$B)$	$\Rightarrow$	$\neg$	$A)$	$\Rightarrow$	$(A$	$\Rightarrow$	A	$\wedge$	$B)$
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Так как в выделенном столбце присутствуют и «1», и «0», то данная формула является нейтральной, выполнимой и необщезначимой.

Пример 5. Проанализируйте рассуждение: «Если число составное, то оно нейтральное и больше единицы. Если число натуральное и больше единицы, то оно имеет хотя бы один простой делитель. Значит, если число составное, то оно имеет хотя бы один простой делитель».

Решение. Обозначим: A – «число составное», B – «число натуральное», C – «число больше единицы», D – «число имеет хотя бы один простой делитель». Структура рассуждения: $A \Rightarrow B \wedge C$, $B \wedge C \Rightarrow D$, $A \models D$.

Предположим, что данное рассуждение неверно, т. е. $A \Rightarrow B \wedge C$, $B \wedge C \Rightarrow D$, $A \not\models D$, тогда хотя бы при одном наборе значений (A, B, C, D) должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} A \Rightarrow B \wedge C \\ B \wedge C \Rightarrow D \\ A = 1 \\ D = 0. \end{cases}$$

По определению импликации: из первого уравнения получаем $B \wedge C = 1$, а из второго $B \wedge C = 0$. То есть система условий не имеет решения, значит, предположение не верно. Вывод: исходное рассуждение верное.

Задания

54. Проверьте равносильность формул A и B.

а) $A = P \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$, $B = (P \wedge R) \vee (P \wedge Q)$;

б) $A = (P \sim Q) \Rightarrow P \wedge R$, $B = (P \wedge R) \vee (P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{P})$;

в) $A = (P \vee Q \vee R) \wedge (Q \vee P \vee S) \wedge (R \vee S \vee P)$,
$B = P \vee ((Q \vee R \wedge S) \wedge (S \vee R))$;

г) $A = P \Rightarrow (Q \oplus R)$, $B = (P \Rightarrow Q) \oplus (P \Rightarrow R)$;

д) $A = P \mid (Q \Rightarrow R)$, $B = (P \mid Q) \Rightarrow (P \mid R)$;

е) $A = P \downarrow (Q \sim R)$, $B = \overline{(P \downarrow Q) \sim (P \downarrow R)}$.

55. Решите уравнения:

а) $P \wedge \overline{(\overline{Q} \Rightarrow R)} = 1$;

б) $P \wedge Q \wedge R \Rightarrow \overline{P} \vee Q \vee \overline{R} = 0$;

в) $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow P \vee R) = 0$;

г) $(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (\overline{Q} \Rightarrow S) \wedge (S \wedge P \Rightarrow \overline{R}) \Rightarrow Q = 0$;

д) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) = P \wedge R \Rightarrow \overline{Q}$;

е) $P \sim R \wedge \overline{Q} = R \downarrow Q \Rightarrow P$;

ж) $P \mid Q \vee \overline{R} = \overline{P} \downarrow R \Rightarrow Q$;

з) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P) = \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

56. Упростите данные формулы, используя правила равносильностей.

а) $(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (\overline{Q} \Rightarrow S) \wedge (S \wedge P \Rightarrow \overline{R}) \Rightarrow Q$;

б) $(P \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge \overline{R}) \vee (Q \wedge R) \vee Q \vee R$;

в) $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge \overline{Q})$;

г) $\neg((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow \neg P))$;

д) $(P \Rightarrow \neg Q) \vee \neg(P \vee Q)$;

е) $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee ((P \Rightarrow Q) \wedge P)$.

57. Определите, являются ли данные формулы тавтологиями, противоречиями, нейтральными, выполнимыми, необщезначимыми?

а) $Q \vee R \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow P \vee R)$;

б) $\neg(P \Rightarrow (P \Rightarrow Q \sim Q))$;

в) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow S) \wedge (\overline{P} \vee \overline{S}) \Rightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$;

г) $P \wedge Q \sim P \downarrow R$;

д) $P \vee P \wedge Q \sim \overline{P}$;

е) $(P \wedge Q \Rightarrow R) \sim (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

58. Проанализируйте рассуждения:

а) Он сказал, что придет, если будет хорошая погода. Но погода плохая, значит, он не придет.

б) Если число дробное, то оно рациональное. Если число рациональное, то оно действительное. Следовательно, если число дробное, то оно действительное.

в) Если я пойду завтра на первую лекционную пару, то должен буду встать рано, а если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то я буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Следовательно, я должен или пропустить завтра первую пару или не ходить на танцы.

г) Если он принадлежит к нашей компании, то он храбр и на него можно положиться. Он не принадлежит к нашей компании. Значит, он не храбр или же на него нельзя положиться.

д) Если все посылки истинны и рассуждение проведено по законам логики, то и заключение истинно. В данном рассуждении заключение ложно. Следовательно, не все посылки истинны, или рассуждение проведено не по правилам логики.

е) Если Елена прочитала книгу «Милый друг» Мопассана, то она передала ее Сергею. Елена не прочитала книгу «Милый друг». Следовательно, она не передала книгу Сергею.

2.2. Булевы функции

Обобщением понятия сложного высказывания является понятие булевой функции (функции алгебры логики).

Всякое отображение вида $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется ***булевой функцией от n переменных***, т. е. $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,n}$, x_i – булевы переменные и $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \{0,1\}$.

Каждый элемент множества $\{0,1\}^n$ называют набором значений булевых переменных. Очевидно число таких различных наборов 2^n. Удобно наборы записывать в *лексикографическом* порядке, т. е. в порядке возрастания соответствующего двоичного числа. Так как на каждом наборе булева функция может принимать два значения (0 или 1), то существует 2^{2^n} различных булевых функций n переменных.

В частности, при $n=1$ получаем $2^{2^1}=4$ функции, а при $n=2$ – $2^{2^2}=16$ функций. Функции одной и двух переменных называются «элементарными» и с их помощью можно определить функции большего количества переменных.

Булевы функции можно задавать при помощи таблиц истинности. Рассмотрим таблицы истинности для «элементарных» функций.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
x	0	x	$\bar{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$\Rightarrow$

$f_1(x)$ – константа 0,
$f_2(x)$ – тождественная функция,
$f_3(x)$ – отрицание x,
$f_4(x)$ – константа 1.

				функция запрета		функция запрета		сложение по mod 2	
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
x_1	x_2	0	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \leftarrow x_2$	x_1	$x_1 \rightarrow x_2$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

		стрелка Пирса						штрих Шеффера	
		f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_2 \Rightarrow x_1$	$\bar{x}_1$	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Иногда при задании булевой функции ограничиваются указанием набора ее значений. Например, $f_{12}=(1011)$.

Наборы элементов, на которых $f=1$, называются ***единичными***. Две булевы функции называются ***равными***, если их таблицы истинности одинаковы.

Для булевых функций справедливы равенства, аналогичные формулам, сформулированным для высказываний, и логические операции имеют тот же приоритет.

Из множества всех булевых функций (P_2) выделяют некоторые классы (подмножества) функций, называемые **классами Поста**.

• T_0 – класс булевых функций, ***сохраняющих константу 0***, т. е. $f(0,0, ...,0)=0$.

• T_1 – класс булевых функций, ***сохраняющих константу 1***, т. е. $f(1,1, ...,1)=1$.

• M – класс ***монотонных*** функций.

Два набора $a=(a_1,a_2, ...,a_n)$ и $b=(b_1,b_2, ...,b_n)$ называются ***сравнимыми***, если выполнены условия $a_i \le b_i$, $\forall i=\overline{1,n}$. Например, наборы $(0,0)$ и $(1,0)$ сравнимы, а наборы $(1,0)$ и $(0,1)$ – нет.

Булева функция $f(x_1,x_2, ...,x_n)$ называется ***монотонной***, если для любых наборов a и b таких, что $a \le b$ следует $f(a) \le f(b)$.

• S – класс ***самодвойственных*** функций.

Булева функция f^* называется ***двойственной*** к функции f, если $f^*(x_1,x_2, ...,x_n)=\overline{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2, ...,\bar{x}_n)$. Булева функция f называется ***самодвойственной***, если она совпадает с двойственной, т. е. $f=f^*$.

Критерий самодвойственности функции. Для самодвойственности функции необходимо и достаточно, чтобы на любых двух противоположных наборах значений переменных функция принимала различные значения (т. е. все равноудаленные от концов строки значений функции числа – противоположны).

• L – класс ***линейных*** функций.

Булева функция f называется ***линейной***, если она может быть записана в виде

$$f(x_1,x_2, ...,x_n)=C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus ... \oplus C_nx_n,$$

где $C_i \in \{0,1\}$, $\forall i=\overline{0,n}$.

Для того чтобы определить является данная булева функция линейной или нет, ее надо представить в виде линейного многочлена (полинома) Жегалкина.

Многочленом Жегалкина называется многочлен, являющийся суммой константы и различных одночленов, в которые каждая из переменных входит не выше, чем в первой степени.

Например, многочлен Жегалкина булевой функции трех переменных имеет вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)=C_0\oplus C_1x_1\oplus C_2x_2\oplus C_3x_3\oplus C_{12}x_1x_2\oplus$$
$$\oplus C_{13}x_1x_3\oplus C_{23}x_2x_3\oplus C_{123}x_1x_2x_3.$$

Многочлен Жегалкина называется ***нелинейным***, если он содержит конъюнкции переменных, и ***линейным***, если конъюнкции переменных не содержит.

Теорема 1. Каждая булева функция может быть единственным образом представлена многочленом Жегалкина.

Существует несколько алгоритмов построения многочлена Жегалкина для булевых функций: с помощью треугольника Паскаля, метода неопределенных коэффициентов и др. Также иногда используют следующие формулы:

$$x\oplus 0=x,\quad \bar{x}=x\oplus 1,$$
$$x\oplus x=0,\quad x\vee y=x\oplus y\oplus xy.$$

Пример 6. Постройте многочлен Жегалкина функции $f(x,y,z)=(01011001)$.

Решение

x	y	z	$f(x,y,z)$	Треугольник Паскаля	Слагаемые
0	0	0	0	0 1 0 1 1 0 0 1	1
0	0	1	1	1 1 1 0 1 0 1	z
0	1	0	0	0 0 1 1 1 1	y
0	1	1	1	0 1 0 0 0	yz
1	0	0	1	1 1 0 0	x
1	0	1	0	0 1 0	xz
1	1	0	0	1 1	xy
1	1	1	1	0	xyz

Поясним, как заполняется таблица. Первые четыре столбца взяты из условия. В пятом столбце строится треугольник Паскаля. Верхняя строка такого треугольника есть строка значений исходной функции.

В шестом столбце указаны конъюнкции переменных, значения которых в одном из первых трех столбцов равны единице. Набору (000) соответствует 1.

Левая строка треугольника Паскаля равна 01001010. Единицам этой строки соответствуют слагаемые z, x, xy из 6-го столбца. Поэтому многочлен Жегалкина для функции $f(x,y,z)$ равен $z \oplus x \oplus xy$. Так как многочлен Жегалкина содержит нелинейное слагаемое xy, то функция $f(x,y,z)$ не является линейной.

Пусть имеется система булевых функций:

$$f(x_1,...,x_m), f_1(x_1,...,x_m), f_2(x_1,...,x_m),..., f_n(x_1,...,x_m). \qquad (2.1)$$

Функция $f(x_1,...,x_m) = f_1(x_1,...,x_m), f_2(x_1,...,x_m),..., f_n(x_1,...,x_m)$ называется ***суперпозицией функции системы* (2.1)**.

Класс булевых функций называется ***замкнутым***, если вместе с любыми своими функциями он содержит и любую их суперпозицию.

Теорема 2. Каждый класс Поста является замкнутым.

Набор булевых функций $M = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$ называется ***полной системой***, если любая булева функция выражается через них при помощи операции суперпозиции в конечном числе раз.

Теорема 3 (теорема Поста). Система булевых функций полна в множестве булевых функций тогда и только тогда, когда эта система не содержится целиком ни в одном из классов Поста.

Пример 7. Установите, являются ли булевы функции $f_1(x_1,x_2) = (x_1 \wedge x_2) \Rightarrow x_1$ и $f_2(x_1,x_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \oplus x_2$ монотонными, линейными, сохраняющими 0, сохраняющими 1, самодвойственными. Образуют ли они полную систему?

Решение. Составим таблицы истинности данных функций.

$(x_1$	$\wedge$	$x_2)$	$\Rightarrow$	x_1
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

$(x_1$	$\wedge$	$\bar{x}_2)$	$\oplus$	x_2
0	0	1	0	0
0	0	0	1	1
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1

Из таблиц получаем, что функция $f_1(x_1,x_2)$ не сохраняет 0, сохраняет 1, несамодвойственная, монотонная, а функция $f_2(x_1,x_2)$ сохраняет 0, сохраняет 1, несамодвойственная, монотонная.

Нетрудно убедиться, что многочлен Жегалкина для функции $f_1 = 1$, и она линейная, а для $f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$, и она нелинейная.

Чтобы определить, является ли система булевых функций $D = \{f_1, f_2\} = \{(x_1 \wedge x_2) \Rightarrow x_1, (x_1 \wedge \bar{x}_2) \oplus x_2\}$ полной, составим таблицу Поста (критериальную таблицу).

	T_0	T_1	S	M	L
$(x_1 \wedge x_2) \Rightarrow x_1$	–	+	–	+	+
$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \oplus x_2$	+	+	–	+	–

В клетках данной таблицы пишем «+» или «–», в зависимости от того, входит функция, стоящая в данной строке, в соответствующий класс или нет.

Так как система D целиком принадлежит классам T_1 и M, то по теореме Поста не является полной.

Любая формула вида x или $\bar{x}$, где x – произвольная переменная называется ***литералом***. Используют следующее обозначение:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1 \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Формула вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$ $(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$, где $\sigma_i = \{0,1\}$, $i = \overline{1, n}$, а среди переменных x_i могут быть совпадающие, называется ***элементарной конъюнкцией*** (***элементарной дизъюнкцией***).

Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ***дизъюнктивной нормальной формой*** (ДНФ). Всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций называется ***конъюнктивной нормальной формой*** (КНФ).

Например,

$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_3 \wedge x_2) \vee \bar{x}_3$ – ДНФ;

$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge x_2$ – КНФ;

$(x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)) \wedge x_3$ – не ДНФ, не КНФ.

Теорема 4. Для любой формулы A можно найти ее ДНФ и КНФ.

Любая булева функция может иметь много представлений в виде ДНФ и КНФ. Особое место среди этих представлений занимают совершенные ДНФ и КНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и любая переменная x_i, $i = \overline{1, n}$ входит ровно один раз (либо сама x_i, либо ее отрицание $\bar{x}_i$) в каждую элементарную конъюнкцию.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и любая переменная x_i, $i = \overline{1, n}$ входит ровно один раз (либо сама x_i, либо ее отрицание $\bar{x}_i$) в каждую элементарную дизъюнкцию.

Теорема 5. Всякая булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, не равная тождественно нулю (единице), представляется единственным образом в виде своей СДНФ (СКНФ):

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n} \text{ – СДНФ},$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0} x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} ... x_n^{\bar{\sigma}_n} \text{ – СКНФ},$$

где дизъюнкция берется по единичным наборам функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, а конъюнкция по нулевым.

Из теоремы следует, что СДНФ и СКНФ можно строить по таблице истинности. Любая СДНФ является ДНФ, а СКНФ – КНФ, обратное не верно.

Пример 8. Для заданной булевой функции найдите СДНФ, СКНФ с помощью таблицы истинности: $(x \sim y) \vee (y \sim z)$.

Решение. Составим таблицу истинности.

$(x$	$\sim$	$y)$	$\vee$	$(y$	$\sim$	$z)$
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Для построения СДНФ в результирующем столбце выбираем строки, где функция принимает значение 1, а для построения СКНФ – 0 и воспользуемся формулой (2.2) и теоремой 5.

СДНФ: $(x^0 \wedge y^0 \wedge z^0) \vee (x^0 \wedge y^0 \wedge z^1) \vee (x^0 \wedge y^1 \wedge z^1) \vee (x^1 \wedge y^0 \wedge z^0) \vee$
$\vee (x^1 \wedge y^1 \wedge z^0) \vee (x^1 \wedge y^1 \wedge z^1) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz.$

СКНФ: $(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}}) \wedge (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}) = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$

Часто СДНФ и СКНФ, которые строятся по таблице истинности, оказываются сложными (используется большое число элементарных операций). Форму записи булевой функции, в которой использовано наименьшее число элементарных операций по сравнению с другими формами записи этой же функции, называют ***абсолютно минимальной***. Задачу поиска наиболее простой записи булевой функции называют ***задачей минимизации***.

Так как наиболее распространенной формой представления булевой функции является ДНФ, то задачу упрощения булевых функций обычно формулируют в классе ДНФ.

Пусть имеется ДНФ булевой функции:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_s,$$

где K_i, $i = \overline{1, s}$ – элементарные конъюнкции. Число s называется ***длиной*** ДНФ.

ДНФ булевой функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется ***кратчайшей***, если она содержит наименьшее число s элементарных конъюнкций по сравнению с другими ДНФ этой же функции.

Рассмотрим некоторую элементарную конъюнкцию

$$K = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_r^{\sigma_r}.$$

Число r переменных в конъюнкции называется ее ***рангом***. Тогда ДНФ можно охарактеризовать числом $R = r_1 + r_2 + ... + r_s$, которое называется ***суммарным рангом ДНФ*** булевой функции.

ДНФ булевой функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется ***минимальной***, если ей соответствует наименьший суммарный ранг R по сравнению с другими ДНФ этой же функции.

Следовательно, задача минимизации булевой функции сводится к отысканию кратчайшей или минимальной ДНФ заданной функции. Если число переменных булевой функции $n \leq 4$, то минимальная и кратчайшая ДНФ совпадают. При $n \geq 5$ эти ДНФ могут быть различными, однако поиск минимальной ДНФ проводится среди кратчайших ДНФ.

Булеву функцию g назовем ***импликантом*** булевой функции f, если для любых наборов значений аргументов этих функций из равенства $g = 1$ следует равенство $f = 1$.

Если отбрасывание любой переменной импликанта приводит к тому, что полученная функция перестает быть импликантом, то такой импликант называется ***простым***.

Если функция g представима в форме ДНФ, то в качестве имплицирующей функции f может выступать любая элементарная конъюнкция из ДНФ.

Например, для функции $f(x, y, z) = (01100100)$ СДНФ $f = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z$. Функция $g_1 = \bar{x}y\bar{z}$ – простой импликант функции f, а $g_2 = x\bar{y}z$ – импликант, не являющийся простым (т. к. при отбрасывании в функции g_2 переменной x мы снова получим импликант $\bar{y}z$ функции f).

Сокращенная ДНФ функции f есть дизъюнкция всех простых импликантов функции f.

Теорема 6. Всякая булева функция реализуется своей сокращенной ДНФ. Для всякой булевой функции, не равной тождественно нулю, существует и единственная сокращенная ДНФ.

Существуют различные методы построения сокращенной ДНФ: табличный, геометрический, Блейка, Нельсона и т. д. Однако все они основаны на выполнении двух операций: склеивания ($xA \vee \bar{x}A = A$) и поглощения ($A \vee A \wedge B = A$). Различие в методах состоит в способе исходного представления булевой функции и организации нахождения всех простых импликантов.

ДНФ, из которой нельзя удалить ни одного импликанта, называется ***тупиковой***.

Теорема 7. Любая минимальная ДНФ булевой функции является тупиковой.

Однако не всякая тупиковая ДНФ является минимальной.

Общая схема минимизации булевых функций:

1) построение сокращенной ДНФ;

2) нахождение тупиковых ДНФ;

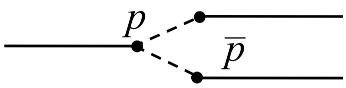
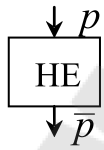
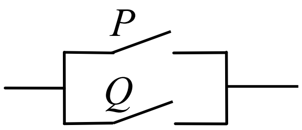
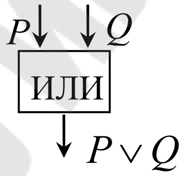
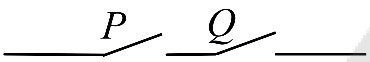
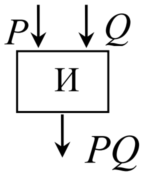
3) нахождение минимальной ДНФ.

В некоторых случаях возникает задача минимизации частично определенных функций, когда не для всех возможных наборов значений входящих в функцию переменных указаны значения функции.

В начале XX века французский физик Эренфест предложил использовать аппарат алгебры логики в технике. Первыми объектами применения алгебры логики были контактные схемы (электрические цепи, содержащие только контакты). В дальнейшем появилось много различных устройств, реализующих булевы функции, например, электронные (логические) схемы.

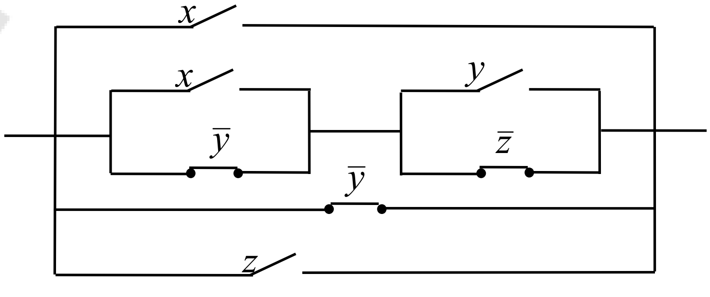
При построении математической модели используют следующие правила, представленные в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Контактная схема	**Логическая схема**	**Функция**
 разомкнуто	Сигнал низкого напряжения	0
замкнуто	Сигнал высокого напряжения	1
 инверсия контакта p		$\neg p$
 параллельное соединение контактов		$P \vee Q$
 последовательное соединение контактов		$P \wedge Q$

Поскольку одна и та же булева функция может быть выражена различными формулами, то ее реализация схемами неоднозначна. Из множества эквивалентных схем путем упрощения формул выделяют наиболее простую схему, т. е. задача сводится к минимизации булевой функции.

Пример 9. Упростите контактную схему.

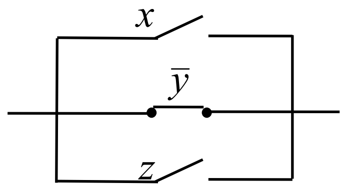


Решение. Данной схеме соответствует формула $x \vee (x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee z$. Упростим ее:

$$x \vee (x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee z = x \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z}) \vee$$

$$\vee \bar{y} \vee z = x \wedge (1 \vee y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \wedge (y \vee \bar{y} \vee 1) \vee z = x \vee \bar{y} \vee z.$$

Получаем упрощенную схему:



С помощью булевых функций, кроме реализации ими контактных и логических схем, можно решать логические задачи. По данным условия задачи составляется подходящая функция, которая равносильными преобразованиями приводится к более простому виду, который, как правило, и позволяет дать ответ на вопрос задачи.

Пример 10. Владимир, Роман, Андрей и Сергей заняли на математической олимпиаде четыре первых места. На вопрос о распределении мест были получены следующие ответы: 1) Роман – первый, Сергей – второй; 2) Роман – второй, Владимир – третий; 3) Андрей – второй, Владимир – четвертый. В каждом из ответов только одно утверждение истинно. Определите, как распределились места.

Решение. Обозначим простые высказывания через x_y, где x – первая буква имени участника, а y – номер занятого места. Тогда высказывания можно записать следующим образом: 1) $P_1 \vee C_2$; 2) $P_2 \vee B_3$; 3) $A_2 \vee B_4$.

Так как все дизъюнкции истинны, то истинной будет и конъюнкция этих дизъюнкций, т. е. $1 = (P_1 \vee C_2) \wedge (P_2 \vee B_3) \wedge (A_2 \vee B_4)$. Раскроем скобки: $(P_1P_2 \vee C_2P_2 \vee P_1B_3 \vee C_2B_3) \wedge (A_2 \vee B_4)$.

Так как $P_1P_2 = 0$ (Роман не мог занять два места одновременно), а $C_2P_2 = 0$ (Роман и Сергей не могли быть оба на втором месте), то

$$(P_1B_3 \vee C_2B_3) \wedge (A_2 \vee B_4) = P_1B_3A_2 \vee C_2B_3A_2 \vee P_1B_3B_4 \vee C_2B_3B_4 =$$

$$= P_1B_3A_2 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = P_1B_3A_2 = 1,$$

т. е. Роман – первый, Андрей – второй, Владимир – третий. Тогда Сергей – четвертый.

Задания

59. Найдите многочлен Жегалкина для формул:

а) $f(x,y,z)=(01111110)$; д) $f(x,y,z)=(x\,|\,y)\downarrow z$;

б) $f(x,y,z)=(00001001)$; е) $f(x,y,z)=(x\Rightarrow y)\wedge(y\downarrow z)$;

в) $f(x,y,z)=(10000001)$; ж) $f(x,y,z)=((x\Rightarrow y)\vee\bar{z})\,|\,x$;

г) $f(x,y,z)=(10110000)$; з) $f(x,y,z)=(x\Rightarrow y)\oplus(\bar{x}\sim z)$.

60. Установите, являются ли булевы функции $f_1(x_1,x_2)$ и $f_2(x_1,x_2)$ монотонными, линейными, сохраняющими 0, сохраняющими 1, самодвойственными. Образуют ли они полную систему.

а) $f_1(x_1,x_2)=x_1\Rightarrow x_2$, $f_2(x_1,x_2)=x_1\wedge\bar{x}_2$;

б) $f_1(x_1,x_2)=\bar{x}_1\wedge x_2$, $f_2(x_1,x_2)=x_1\sim x_2$;

в) $f_1(x_1,x_2)=\bar{x}_1\oplus\bar{x}_2$, $f_2(x_1,x_2)=\bar{x}_2\Rightarrow x_1$;

г) $f_1(x_1,x_2)=(x_1\oplus x_2)\vee x_1$, $f_2(x_1,x_2)=x_1\vee x_2\oplus\bar{x}_1$;

д) $f_1(x_1,x_2)=(x_1\downarrow\bar{x}_2)$, $f_2(x_1,x_2)=x_1\vee\bar{x}_2\oplus\bar{x}_1$;

е) $f_1(x_1,x_2)=(1010)$, $f_2(x_1,x_2)=(0111)$.

61. Выясните, полно ли множество булевых функций F:

а) $F=\{f_1=\bar{x}, f_2=x\wedge(y\sim z)\sim y\wedge z, f_3=x\oplus y\oplus z\}$;

б) $F=\{f_1=x\wedge y\oplus y\wedge z\oplus z\wedge t, f_2=0, f_3=1, f_4=x\vee y\}$;

в) $F=\{f_1=(0110), f_2=(11000011), f_3=(10010110)\}$;

г) $F=\{f_1=x\vee y, f_2=(1001101111110110)\}$.

62. Для заданных булевых функций найдите ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ с помощью равносильных преобразований и сделайте проверку с помощью таблицы истинности.

а) $(\bar{x}\Rightarrow\bar{y})\Rightarrow(y\wedge z\Rightarrow x\wedge z)$; е) $\overline{x\wedge y\Rightarrow x}\vee x\wedge(y\vee z)$;

б) $(x\oplus y)\Rightarrow(y\wedge z)$; ж) $\overline{x\wedge(y\vee z)}\Rightarrow(x\wedge y\vee z)$;

в) $(x\sim y)\Rightarrow(x\vee y\wedge z)$; з) $((x\,|\,y)\downarrow z)\Rightarrow(x\sim z)$;

г) $(x\Rightarrow(y\downarrow z))\Rightarrow(x\vee y)$; и) $x\wedge y\Rightarrow x\sim x\wedge\bar{z}\Rightarrow\bar{y}$;

д) $(x\Rightarrow y)\Rightarrow(\overline{z\vee x}\Rightarrow y)$; к) $x\Rightarrow(y\Rightarrow z)\wedge x\wedge y\wedge\bar{z}$.

63. Найдите минимальные ДНФ для функций:

а) $f=(01101001)$; г) $f=(0000110010101111)$;

б) $f=(10010011)$; д) $f=(1111100001001100)$;

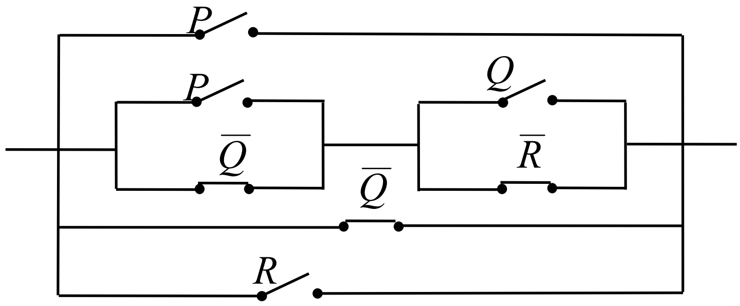
в) $f=(01111110)$; е) $f=(0000001111111101)$.

64. Задана функция f, значение * свидетельствует о том, что функция не определена при соответствующих значениях переменных. Минимизировать функцию f в классе ДНФ.

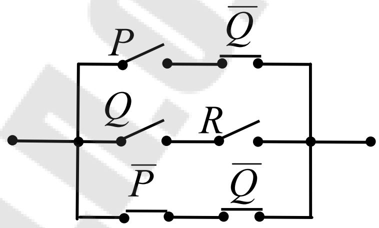
а) $f=(10*0*110)$; в) $f=(10*0*011)$;

б) $f=(01*1*000)$; г) $f=(10*1*001)$.

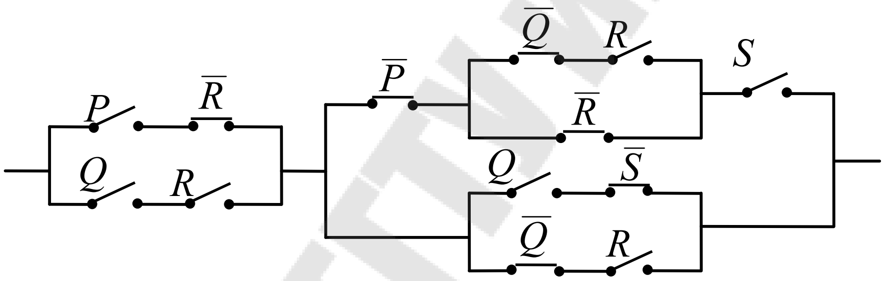
65. Упростите контактные схемы.



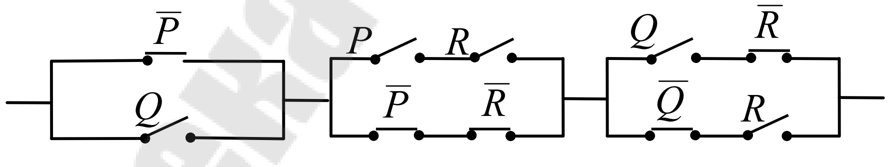
а)



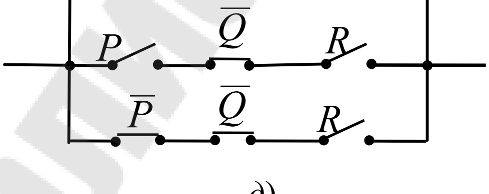
б)



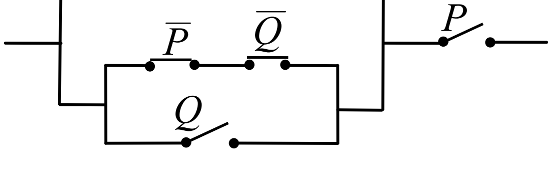
в)



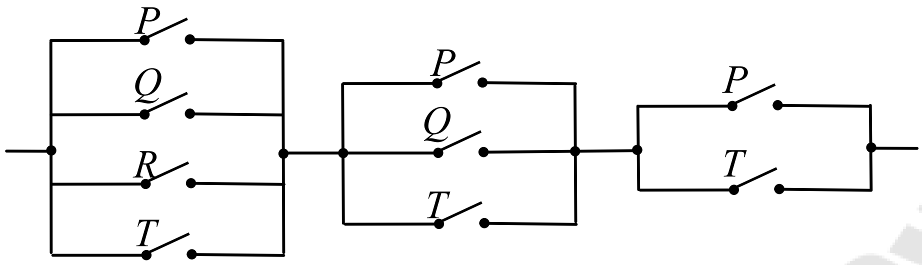
г)



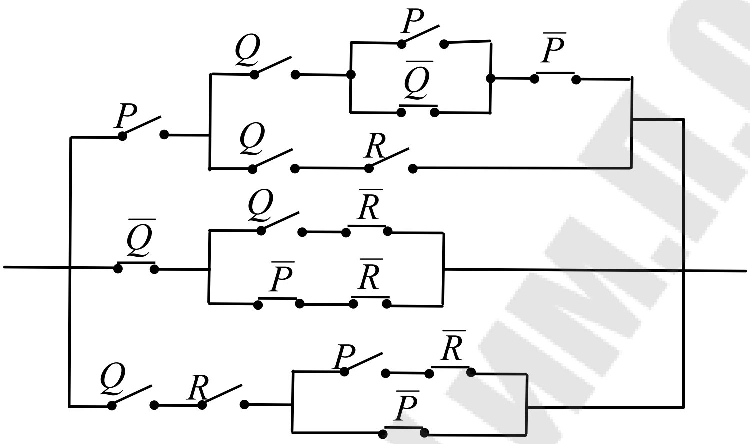
д)



е)



ж)



з)

66. Постройте контактную схему, реализующую схему голосования жюри из трех человек (каждый член жюри голосует «за», нажимая свою кнопку, и «против», не нажимая ее; лампочка зажигается лишь в том случае, если большинство членов жюри голосует «за»).

67. Постройте контактную схему, реализующую схему голосования жюри из четырех человек. Предложение считается принятым, если за него проголосовало большинство членов жюри или если голоса разделились поровну и за предложение проголосовал председатель жюри.

68. Постройте контактную схему, позволяющую зажигать и тушить лампочку с помощью трех независимых переключателей. Существует ли решение аналогичной задачи для n переключателей?

69. Следователь допрашивал одновременно трех свидетелей. Их показания противоречили друг другу. При этом каждый из свидетелей обвинял кого-нибудь во лжи. Первый свидетель утверждал, что обманывает второй. Второй – третий, а третий – первый и второй. Кто из свидетелей говорил правду?

70. Встретились скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные и

один рыжие волосы, но ни у одного нет волос того цвета, на который указывает его фамилия», – заметил черноволосый. «Ты прав», – сказал Белов. Определите, какой цвет волос у художника.

71. Установите, кто из четырех подозреваемых участвовал в ограблении, если известно:

1) что если A участвовал, то и B участвовал;

2) если B участвовал, то или C участвовал, или A не участвовал;

3) если D не участвовал, то A участвовал, а C не участвовал;

4) если D участвовал, то A тоже участвовал.

72. На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал логику?

2.3. Логика предикатов

Различными конкретными предикатами мы широко пользуемся в математике, других дисциплинах, в повседневной жизни. Например:

- «x написал роман «Мать» – есть предикат одной переменной x или одноместный предикат;
- «$x+2y=23$» – двуместный предикат;
- «$x^2+y^2\le z^2$» – трехместный предикат.

***n*-местным предикатом** $p(x_1,x_2,...,x_n)$, заданным на множестве D, называется всякое предложение, содержащее переменные $x_1,x_2,...,x_n$ и превращающееся в высказывание всякий раз, когда мы вместо этих переменных подставляем в предикат некоторые конкретные элементы из D.

Со всяким предикатом связана функция вида $D^n=\{1,0\}$, которая называется ***n*-местной логической функцией**, D – ***область определения***, $\{1,0\}$ – ***область значений логической функции***. Множество $E\subset D^n$, на котором функция принимает значение 1, называется ***областью истинности*** логической функции.

К предикатам, определенным на одном и том же множестве, можно применять операции алгебры высказываний: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sim$ и получать новые предикаты, области истинности которых можно изображать на диаграмме Венна. Также для предикатов справедливы основные законы булевой алгебры.

Помимо операций алгебры высказываний, в логике предикатов есть две операции, которые связаны с природой предикатов. Пусть $p(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве D.

Квантор общности $\forall$ превращает предикат $p(x)$ в высказывание $\forall x\ p(x) =$ «для всякого элемента x высказывание $p(x)$ истинно».

Квантор существования $\exists$ превращает предикат $p(x)$ в высказывание $\exists x\ p(x) =$ «существует элемент x такой, что высказывание $p(x)$ истинно».

Пример 11. Даны предикаты: $p(x) = \{x^2 \geq 25\}$, $q(x) = \{x \leq 1\}$, $r(x) = \{x > 2\}$, где $x \in R$. Оцените истинность каждого из следующих выражений для заданного x:

а) $p(x) \sim q(x) \wedge r(x)$, $x = 1$; б) $r(x) \Rightarrow \neg\, p(x)$, $x = 5$.

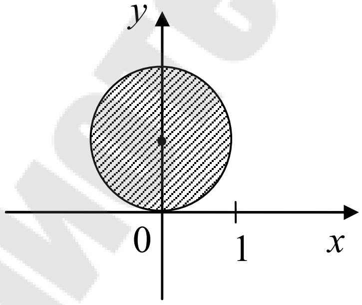
Решение

1. Так как $p(2) = 0$, $q(2) = 1$, $r(2) = 0$, то данная формула принимает значения: $0 \sim 1 \wedge 0 = 1$, т. е. предикат $p(x) \sim q(x) \wedge r(x)$ истинностный для $x = 1$.

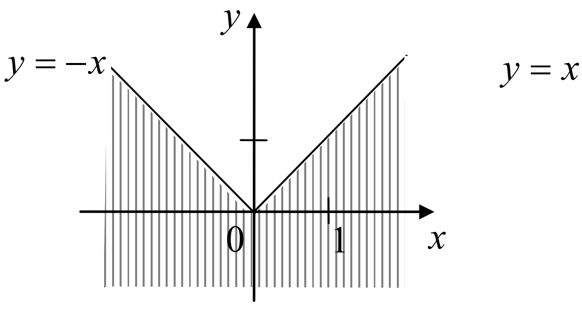
2. Так как $r(5) = 1$, $p(5) = 1$, то формула принимает значения: $1 \Rightarrow \neg 1 = 0$, т. е. предикат $r(x) \Rightarrow \neg\, p(x)$ ложный для $x = 5$.

Пример 12. Для заданных двуместных предикатов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ укажите (заштрихуйте) на плоскости области истинности предикатов: $P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$ и $P(x, y) \sim Q(x, y)$, если $P(x, y) = \{x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, $Q(x, y) = \{y \leq |x|\}$.

Решение. Первоначально изобразим на плоскости области истинности предикатов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

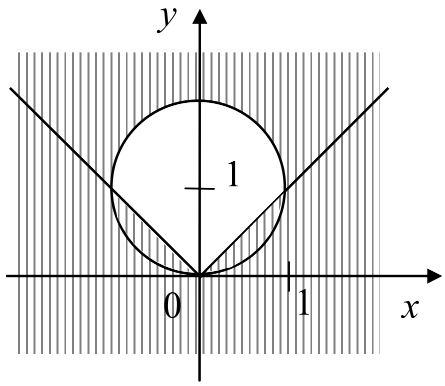


$P(x, y)$

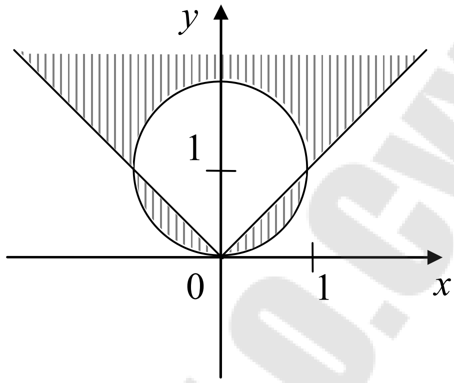


$Q(x, y)$

Следовательно,



$P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)$



$P(x,y) \sim Q(x,y)$

Задания

73. Пусть $P(x)$, $R(x)$, $Q(x)$, $S(x,y)$ обозначают предикаты «x – простое число», «x – четное число», «x – нечетное число», «y делится на x» соответственно. Перевести на русский язык.

а) $P(7)$;
б) $R(2) \wedge P(2)$;
в) $\forall x(S(2,x) \Rightarrow R(x))$;
г) $\exists x(R(x) \wedge S(x,6))$;
д) $\forall x(\neg R(x) \Rightarrow \neg S(2,x))$;
е) $\forall x(R(x) \wedge \forall y(S(x,y) \Rightarrow P(y)))$;
ж) $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(R(y) \wedge S(x,y)))$;
з) $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(P(y) \Rightarrow \neg S(x,y)))$;
и) $\exists x(R(x) \wedge P(x)) \wedge \neg \exists x((R(x) \wedge P(x)) \wedge \exists y(x \neq y) \wedge R(y) \wedge P(y)))$.

74. Даны предикаты: $p(x) = \{x^2 \geq 1\}$, $g(x) = \{x > 3\}$, $r(x) = \{x = 4\}$, $s(x,y) = \{x^2 + y^2 \geq 3\}$, $d(x,y) = \{2x - 3y = 1\}$. Оцените истинность каждого из следующих выражений для заданных значений переменных:

а) $p(x) \vee q(x) \Rightarrow r(x)$, $x = 2$;
б) $\neg r(x) \wedge p(x) \sim q(x)$, $x = -1$;
в) $p(x) \vee q(x) \wedge r(x) \sim \neg g(x) \vee p(x)$, $x = 4$;
г) $s(x,y) \Rightarrow \neg d(x,y)$, $x = -1$, $y = 0$;
д) $s(x,y) \wedge d(x,y) \sim \neg s(x,y) \Rightarrow d(x,y)$, $x = 2$, $y = 1$;
е) $s(x,y) \vee d(x,y) \Rightarrow d(x,y)$, $x = -2$, $y = 3$.

75. Для заданных двумерных предикатов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ укажите (заштрихуйте) на плоскости области истинности предикатов:

1) $P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)$;
2) $P(x,y) \sim Q(x,y)$;
3) $Q(x,y) \Rightarrow P(x,y)$,

если: а) $P(x,y)=\{(x-1)^2+(y-1)^2\le 1\}$, $Q(x,y)=\{y\le |x|\}$;

б) $P(x,y)=\{x^2+(y+1)^2\ge 2\}$, $Q(x,y)=\{x+y\le 1\}$;

в) $P(x,y)=\{(x+2)^2+y^2\le 4\}$, $Q(x,y)=\{y\le |x+1|\}$;

г) $P(x,y)=\{x^2+y^2\ge 3\}$, $Q(x,y)=\{y\le x^2\}$;

д) $P(x,y)=\{(x-1)^2+y^2\ge 1\}$, $Q(x,y)=\{x+2y\le 1\}$;

е) $P(x,y)=\{x^2+(y-2)^2\le 4\}$, $Q(x,y)=\{|x|+|y|\le 1\}$.

76. Даны два предиката $p(x)=\{x^2-5x+6\ge 0\}$ и $q(x)=\{|x|<1\}$, где $x\in R$. Найдите множества истинности предикатов:

а) $p(x)\wedge q(x)$; в) $\neg p(x)\Rightarrow q(x)$; д) $\neg p(x)\vee q(x)$;

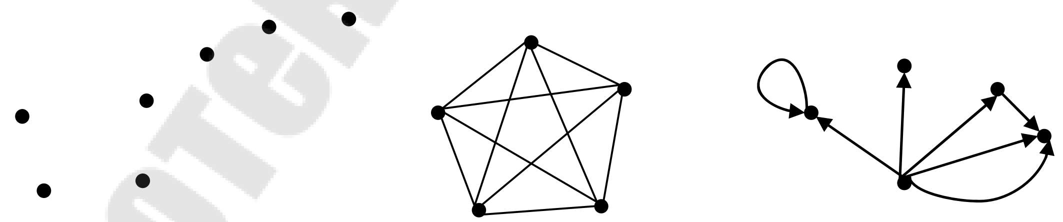
б) $p(x)\vee q(x)$; г) $p(x)\sim q(x)$; е) $\neg q(x)\Rightarrow p(x)$.

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

3.1. Основные понятия теории графов

Граф представляет собой непустое конечное множество вершин V и набор E неупорядоченных или упорядоченных пар вершин. Обозначается граф через $G(V,E)$. Неупорядоченная пара вершин называется ***ребром***, упорядоченная – ***дугой***. Граф, содержащий только ребра, называется ***неориентированным*** (неографом); граф, содержащий только дуги, – ***ориентированным*** (орграфом).

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек.



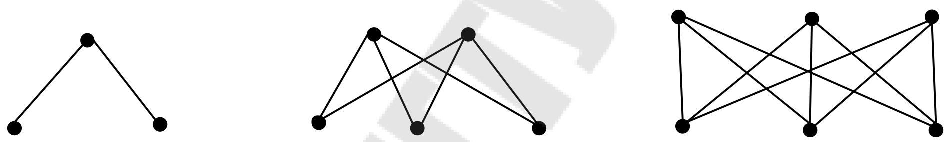
а) *б)* *в)*

Рис. 3.1

Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами (дугами одного направления). Такие ребра (дуги) называют ***кратными***. Если ребро (дуга) начинается и заканчивается в одной и той же точке, то оно называется ***петлей***. Граф, в котором допускаются кратные ребра, назовем ***мультиграфом***, а в котором допускаются кратные ребра и петли – ***псевдографом*** (рис. 3.1, *в*). Далее под графом будем понимать граф без петель и кратных ребер.

Вершины, соединенные ребром или дугой, называются ***смежными***. Ребра, имеющие общую вершину, также называются ***смежными***. Ребро (дуга) и любая из двух его вершин называются ***инцидентными***. Вершина, не принадлежащая ни одному ребру, называется ***изолированной***. Граф, состоящий только из изолированных вершин, называют ***нуль-графом*** (рис. 3.1, *а*).

Граф называется ***полным***, если любые две его вершины соединены одним и только одним ребром (рис. 3.1, *б*). Полный граф с n вершинами обозначается через K_n. Если множество V вершин графа можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 так, что в каждом подмножестве нет смежных вершин, а любые две вершины $u \in V_1$ и $v \in V_2$ смежны, то граф называется ***полным двудольным*** и обозначается $K_{m,n}$, где m и n – число элементов множеств V_1 и V_2 соответственно (рис. 3.2).



$K_{1,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

а) *б*) *в*)

Рис. 3.2

Способы задания графов

До сих пор мы задавали графы с помощью рисунков. Однако более распространенными способами описания графа, пригодными для практических вычислений с использованием ЭВМ, являются матрицы.

Граф (неориентированный или ориентированный) может быть представлен в виде матрицы B размерности $n \times m$, где n – число вершин, m – число ребер (или дуг). Для неориентированного графа элементы этой матрицы задаются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-я вершина инцидентна } j\text{-му ребру,} \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Для ориентированного графа элементы матрицы задаются так:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{если для } i\text{-й вершины } j\text{-я дуга выходящая,}\\ -1, \text{если для } i\text{-й вершины } j\text{-я дуга заходящая,}\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$$

Матрицу (b_{ij}), определенную указанным образом, называют ***матрицей инцидентности***, или ***матрицей инциденций***.

Пример 1. Для неориентированного графа, изображенного на рис. 3.3 и орграфа на рис. 3.4, матрицы инцидентности будут иметь вид $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&0&0&-1\\0&-1&1&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$ соответственно.

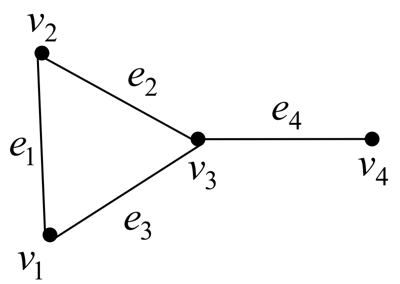


Рис. 3.3

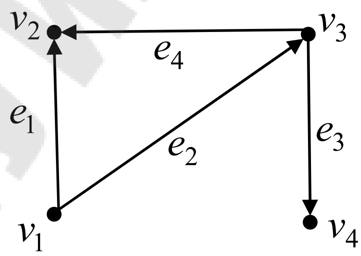


Рис. 3.4

Если граф содержит петли, то элементы матрицы инцидентности, соответствующие дугам, образующим петли, одновременно равны 1 и –1, что приводит к неоднозначности матрицы инцидентности. Кроме того, в каждом столбце матрицы находятся только два ненулевых элемента, что делает такой способ представления неэкономным при большом количестве вершин.

Другой матричной структурой, представляющей граф, является ***матрица смежности*** вершин. Это квадратная матрица A порядка n, элементы которой определяют следующим образом:

– для неориентированного графа:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{если } i\text{-я и } j\text{-я вершины смежные,}\\ 0, \text{иначе;}\end{cases}$$

– для ориентированного графа:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю ведет дуга,} \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 2. Матрицы смежности графов, изображенных на рис. 3.3 и 3.4, имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ соответственно.

Матрица смежности является достаточно эффективным способом представления графа, но эту матрицу удобно строить по графу, уже заданному каким-либо образом, например, рисунком. Во многих задачах граф создается динамически, т. е. в процессе решения меняется множество вершин и множество ребер. В этом случае эффективным способом машинного представления графа являются ***списки смежности***. Задать для любой вершины v ее список смежности $L(v)$ означает поместить в произвольном порядке в данные элементов списка номера тех вершин u, для которых в графах есть дуга (ребро) из v в u.

Пример 3. Граф на рис. 3.3 может быть задан списками смежности $L(v_1)=\{v_2, v_3\}, L(v_2)=\{v_1, v_3\}, L(v_3)=\{v_1, v_4\}, L(v_4)=\{v_3\}$. Для графа на рис. 3.4 списки смежности имеют вид: $L(v_1)=\{v_2, v_3\}$, $L(v_2)=\varnothing$, $L(v_3)=\{v_2, v_4\}, L(v_4)=\varnothing$.

Части графа. Операции над графами

Язык теории множеств очень удобен как для выделения частей графа, так и для ввода операций над ними.

Граф $G'(V', E')$ называется ***подграфом*** графа $G(V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ и множество ребер E' графа G' образовано теми и только теми ребрами графа G, обе концевые вершины каждого из которых принадлежат множеству V'. Подграф G' называется ***собственным***, если он отличен от самого графа G. Подграф G' называется ***остовным***, если $V' = V$, $E' \subseteq E$.

На рис. 3.5 изображен граф G, его собственный подграф G' и остовной подграф G''.

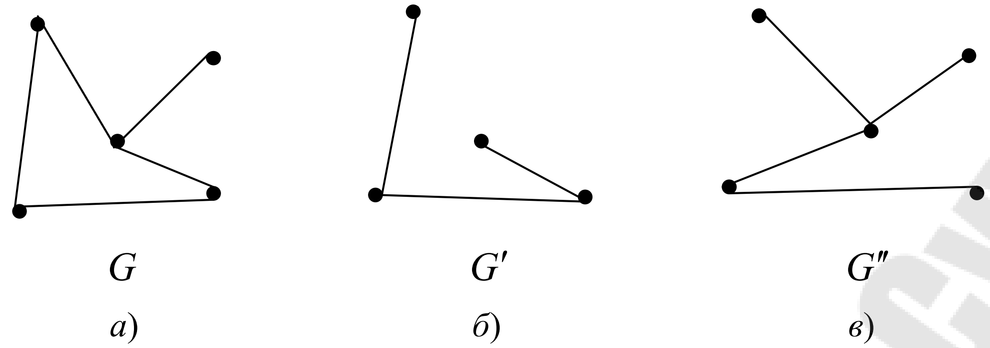


Рис. 3.5

На графах выполняются основные теоретико-множественные операции: объединение, пересечение, разность, дополнение, разностная сумма.

Пример 4. Для графов G_1 и G_2, изображенных на рис. 3.6, постройте пересечение $G_1 \cap G_2$, объединение $G_1 \cup G_2$, дополнение $\overline{G_1}$.

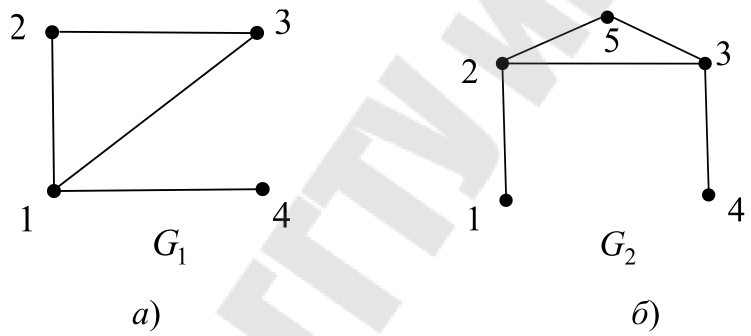
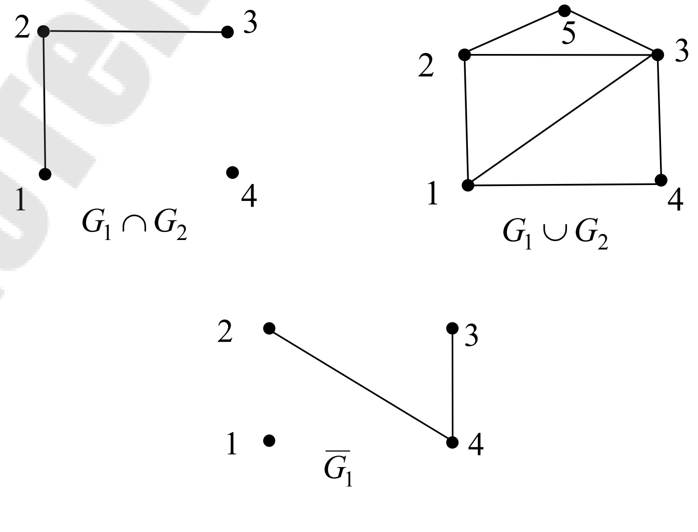


Рис. 3.6

Решение



На графах определяют и некоторые другие операции, используемые при разработке алгоритмов: композицию, удаление вершины, удаление ребра, стягивание ребра. Так, операция ***удаления вершины*** v из графа G приводит к построению графа $G'(V',E')=G\setminus\{v\}$, где $V'=V\setminus\{v\}$, а множество ребер E содержит те и только те ребра, которые не инцидентны вершине v.

Операция ***стягивания ребра*** состоит в удалении ребра между вершинами $x, y \in V$ и отождествлении этих вершин в одну, например, в вершину v; множество ребер, инцидентных вершинам x и y, в новом графе полагают инцидентными вершине v; остальные вершины и ребра в результирующем графе остаются такими же, как в исходном графе.

Степени вершин

Степенью вершины v (обозначается $\deg(v)$) в неориентированном графе называется количество ребер, инцидентных этой вершине. Вершина v называется четной, если $\deg(v)$ – четное число, и нечетной, если $\deg(v)$ – нечетное число. Граф называется *однородным степени* n, если степень любой его вершины равна n.

Теорема 1 («*лемма о рукопожатиях*»). В графе сумма степеней всех вершин есть число четное, равное удвоенному количеству ребер графа.

Следствие. Количество нечетных вершин графа четно.

Теорема 2. В любом графе с n вершинами ($n \geq 2$) всегда найдутся по меньшей мере 2 вершины с одинаковыми степенями.

Теорема 3. Если в графе с n вершинами ($n \geq 3$) в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n-1$.

Пример 5. Известно, что в озере 7 островов, из каждого из них ведет 1, 3 или 5 мостов. Докажите, что хотя бы один из мостов ведет на берег.

Доказательство. Докажем методом от противного. Предположим, что ни один из мостов на берег не ведет. Тогда имеем граф с семью вершинами, причем степень каждой из вершин нечетна, что противоречит теореме 1.

В ориентированном графе различают полустепень захода и полустепень выхода. ***Полустепенью захода*** вершины v в ориентированном графе называют число $\deg^{-}(v)$ заходящих в нее дуг, а ***полустепенью выхода*** вершины v – число $\deg^{+}(v)$ исходящих из нее дуг. ***Степень вершины*** определяется как сумма полустепеней захода и выхода:

$$\deg(v) = \deg^{+}(v) + \deg^{-}(v).$$

Связность графов

Маршрутом M в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер

$$M = \{v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1}\}$$

такая, что $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Иногда маршрут задают либо только последовательностью составляющих его ребер, либо только последовательностью вершин, через которые он проходит. Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз. ***Длиной*** маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Если в маршруте нет совпадающих ребер, то он называется ***цепью***, а если различны как ребра, так и вершины, то ***простой цепью***. Замкнутая цепь ненулевой длины, в которой совпадают начальная и конечная вершины, называется *циклом.* В ориентированном графе цепь называют также ***путем***, а цикл – ***контуром***.

Пример 6. Для графа, изображенного на рис. 3.7, маршрут $M = \{e_1, e_4, e_2, e_3, e_5, e_6\}$ является цепью, маршрут $M_1 = \{e_1, e_4, e_6\}$ – простой цепью, а $M_2 = \{e_1, e_4, e_5, e_3\}$ – циклом.

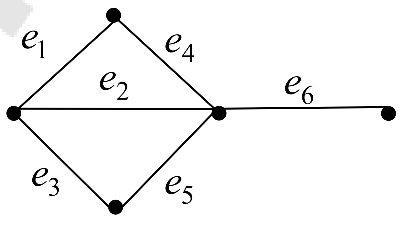


Рис. 3.7

Граф $G(V, E)$ называется ***связным***, если между любыми двумя его различными вершинами существует маршрут. ***Компонентой связности*** (или просто ***компонентой***) графа G называется любой его максимальный связный подграф, т. е. подграф, который сам является связным и не содержится ни в каком связном собственном подграфе графа G.

Компоненты неориентированного графа не пересекаются, а компоненты орграфа могут пересекаться.

Пример 7. На рис. 3.8, *а* изображен несвязный неориентированный граф, имеющий две компоненты связности $K_1 = \{v_1, v_2\}$ и $K_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$, $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Граф, изображенный на рис. 3.8, *б*, является связным орграфом и состоит из одной компоненты $K = \{v_1, v_2, v_3\}$. Ориентированный граф на рис. 3.8, *в* не является связным, т. к. из вершины v_1 нельзя попасть, например, в вершину v_4. Этот граф имеет две компоненты связности: $K_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ и $K_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, причем эти компоненты пересекаются, $K_1 \cap K_2 = \{v_2, v_3\}$.

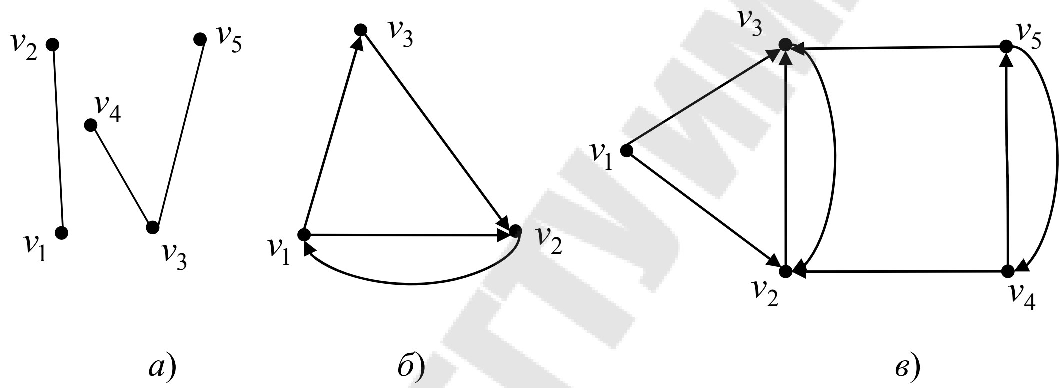


Рис. 3.8

Для ориентированного графа можно определить понятия сильной и слабой связности. Ориентированный граф G называется ***сильно связным***, если между любыми двумя различными вершинами u и v существуют пути из u в v и из v в u. ***Бикомпонентой*** орграфа G называется его максимальный сильно связный подграф.

Неориентированный граф $G'(V', E')$ называется ***ассоциированным*** с орграфом $G(V, E)$, если $V' = V$, а пара (u, v) образует ребро графа G' тогда и только тогда, когда $u \neq v$ и в графе G существует дуга (u, v) или (v, u). Орграф называется ***слабо связным***, если ассоциированный с ним граф связный. Так, граф на рис. 3.8, *б* является сильно связным, а граф на рис. 3.8, *в* – слабо связным. Он содержит три бикомпоненты: $B_1 = \{v_1\}$, $B_2 = \{v_2, v_3\}$ и $B_3 = \{v_4, v_5\}$.

Задания

77. Изобразите графы K_3, K_4, $K_{2,2}$, $K_{1,5}$.

78. В соревнованиях по круговой системе с 12 участниками провели все встречи. Сколько встреч было сыграно?

79. Сколько ребер имеет полный граф с n вершинами?

80. Существует ли полный граф с 40 ребрами?

81. Задайте граф, изображенный на рисунке, матрицами смежности и инцидентности, а также списками смежности:

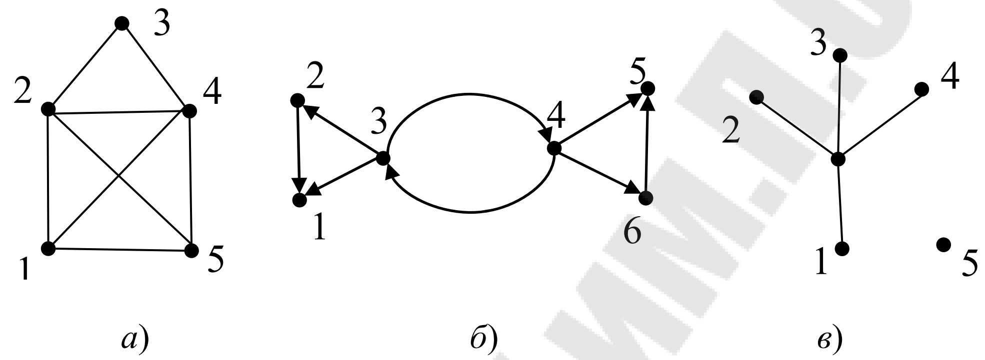


Рис. 3.8

82. По заданной матрице смежности изобразите граф:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

83. Задана матрица инцидентности. Запишите матрицу смежности:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$
\text{в)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{г)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

84. Для графа, заданного списками смежности, запишите матрицу смежности и инцидентности:

а) $L(v_1)=\{v_2, v_3, v_4\}, L(v_2)=\{v_1\}, L(v_3)=\varnothing, L(v_4)=\varnothing$;

б) $L(v_1)=\{v_2, v_3\}, L(v_2)=\{v_1, v_3\}, L(v_3)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,
$L(v_4)=\{v_3, v_5\}, L(v_5)=\{v_3, v_4\}$.

85. Для графов G_1 и G_2, заданных матрицами смежности A и B соответственно, постройте их объединение, пересечение, разность, дополнение, симметрическую разность и запишите матрицы смежности полученных графов. Сделайте вывод.

$$
\text{а) } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{б) } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

86. Постройте композицию графов $G_1 \circ G_2$ и $G_2 \circ G_1$ из № 85.

87. Изобразите однородный граф степени 3 с шестью вершинами.

88. Найдется ли граф с 5 вершинами, у которого одна вершина изолирована, а другие – степени 4?

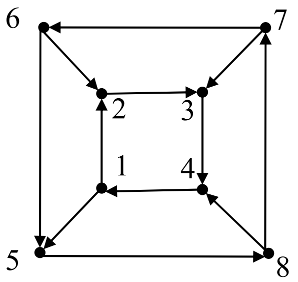
89. Существует ли граф, у которого есть вершины степеней 7, 4, 3, 2 и нет вершин других степеней? Какое наименьшее число вершин может быть в таком графе?

90. Расположите в пространстве пять одинаковых шаров так, чтобы каждый из них касался ровно трех других.

91. Может ли быть 50 дорог между населенными пунктами, если известно, что из каждого населенного пункта выходит ровно три дороги?

92. Насыщенным углеводородом называется соединение углерода C, имеющего валентность 4, и водорода H, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

93. Определите компоненты и бикомпоненты следующих графов.

а) 

; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

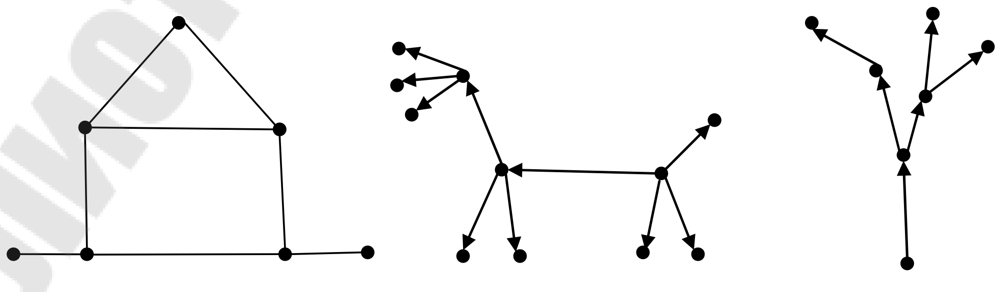
Найдите все вершины, достижимые из вершины 1 по пути длины 2; длины 3. Постройте матрицу достижимости.

3.2. Некоторые специальные типы графов

Деревья

Деревом называывается связный граф, не имеющий циклов. ***Ориентированным деревом*** называется бесконтурный граф, у которого полустепень захода любой вершины не больше 1 и существует ровно одна вершина, называемая корнем, полустепень захода которой равна нулю. Ориентированное дерево называется ***бинарным***, если полустепень выхода любой его вершины не больше 2.

Пример 8. Граф на рис. 3.9, *а* не является деревом, на рис. 3.9, *б* изображено дерево, а на рис. 3.9, *в* – бинарное дерево.



а) *б*) *в*)

Рис. 3.9

Эйлеровы и гамильтоновы графы

В различных приложениях большое значение имеют понятия эйлерова и гамильтонова графа.

Эйлеровой цепью (***циклом***) в графе называется цепь (цикл), содержащая все ребра графа. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называют ***эйлеровым графом***.

В настоящее время существуют эффективные алгоритмы поиска эйлеровых цепей в графе. Следующие теоремы дают необходимые и достаточные условия существования таких цепей.

Теорема 4. Граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда он является связным и все его вершины четные.

Теорема 5. Граф G обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связный и ровно две его вершины имеют нечетную степень.

Теорема 6. Ориентированный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и полустепень захода каждой его вершины равна ее полустепени выхода.

Гамильтоновой цепью (***циклом***) в графе называется простая цепь (цикл), проходящая через каждую вершину графа. Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется ***гамильтоновым графом***.

В отличие от эйлеровых графов, простых критериев распознавания гамильтоновых графов не существует до сих пор.

Планарные графы

Граф называется ***планарным*** (***плоским***), если он может быть изображен на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались ни в каких других точках, кроме вершин. ***Гранью*** плоского графа называется максимальный участок плоскости, такой, что любые две точки этого участка могут быть соединены кривой, не пересекающей ребро графа. Внешняя часть графа также является гранью.

Пример 9. На рис. 3.10 изображен полный граф K_4 и его плоское представление.

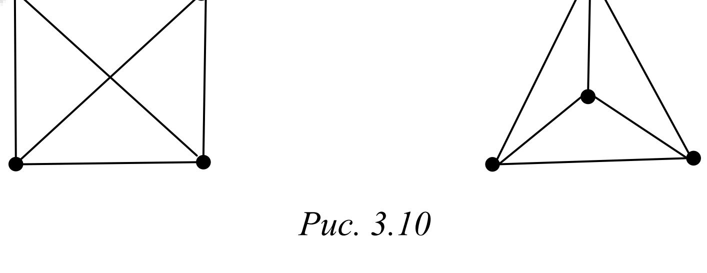


Рис. 3.10

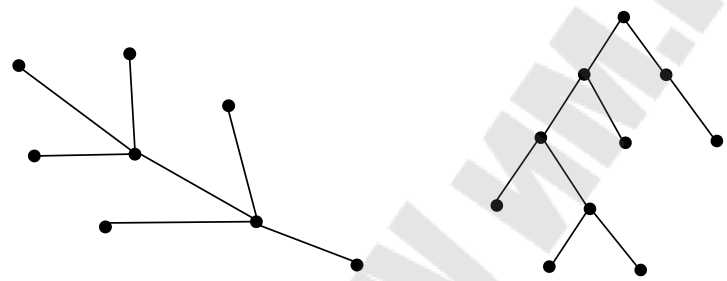
Теорема 7 (формула Эйлера). Если G – связный плоский граф, содержащий B вершин, P ребер и $Г$ граней, то справедливо равенство: $B-P+Г=2$.

Следствие. Для связного планарного графа с количеством вершин $B \geq 3$ справедливо неравенство: $P \leq 3B-6$.

Теорема 8 (критерий планарности Понтрягина–Куратовского). Неориентированный граф G планарен тогда и только тогда, когда он не содержит в себе подграф, стягиваемый хотя бы к одному из графов $K_{3,3}$ и K_5.

Задания

94. Запишите бинарный код дерева, изображенного на рисунке:



а) *б*)

95. Изобразите дерево по его бинарному коду:

а) 001011100001011011;

б) 010101000010000111111.

96. Сколько ребер имеет дерево с *n* вершинами?

97. Какое максимальное число разрезов можно сделать в волейбольной сетке размером 20 × 10 так, чтобы она не распалась?

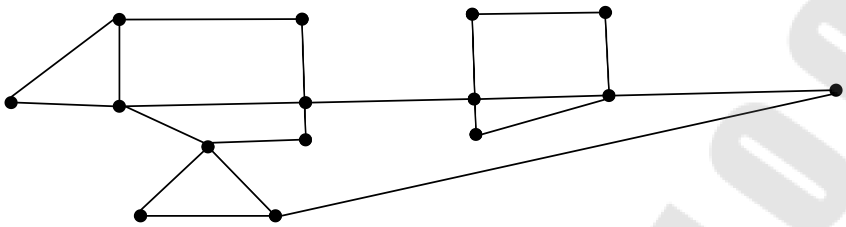
98. Спортсмен делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право еще на 2 выстрела. Определите число попаданий в цель, если известно, что спортсмен выстрелил 25 раз.

99. Пете дали конфету. Он ее съел, конфета ему понравилась, и ему дали еще две конфеты. Дальше события развивались следующим образом: если съеденная конфета нравилась Пете, то он получал еще две, а если нет – не получал ничего. Сорок третья конфета не понравилась Пете и на этом конфеты закончились. Сколько всего конфет не понравилось Пете?

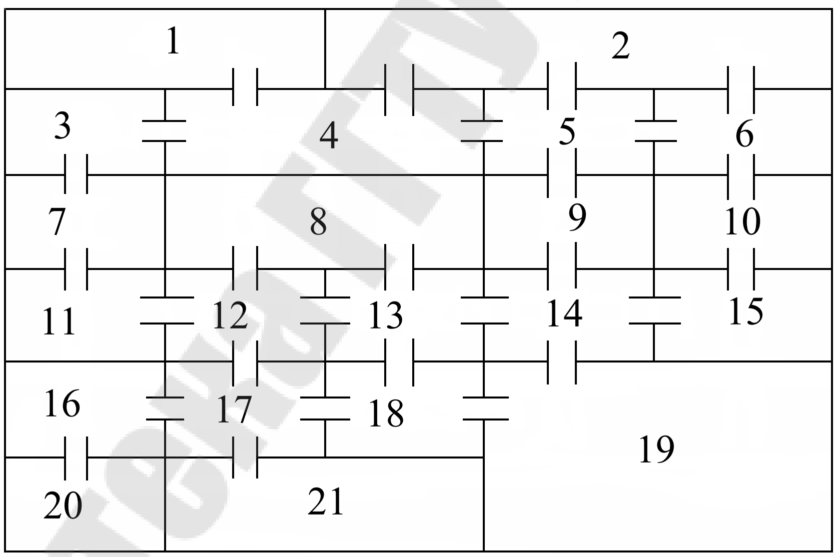
100. Камень, падающий со скалы, разбивается о препятствие на 3 части. Упав на дно ущелья, осколки могут разбиться на 4 части, могут разбиться на 2, а могут и не разбиться. Образовалось 102 камня. Опре-

делите число делений, если известно, что число камней, разбившихся на 2 части, в 6 раз больше числа камней, разбившихся на 4 части.

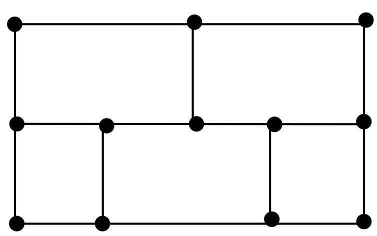
101. На рисунке представлена схема зоопарка. Найдите маршрут, по которому экскурсовод мог бы провести посетителей, показав им всех зверей и не проходя более одного раза ни одного участка.



102. На рисунке представлен план подземелья, в одной из комнат которого скрыты сокровища. В завещании указано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате скрыты сокровища?



103. Проведите, если это возможно, линию, которая пересекает каждый отрезок фигуры ровно один раз.



104. Нарисуйте граф с восемью вершинами, который:

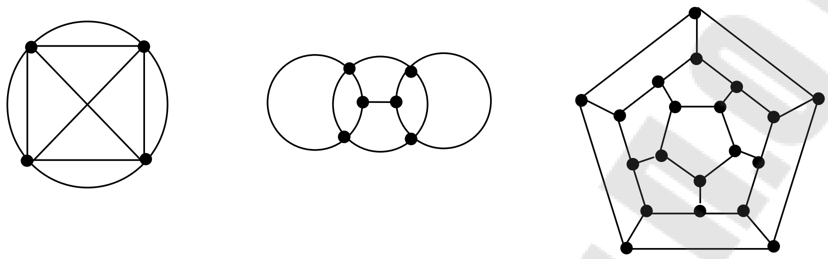
а) имеет эйлеров цикл;

б) имеет эйлерову цепь;

в) не имеет ни эйлерова цикла, ни эйлеровой цепи;

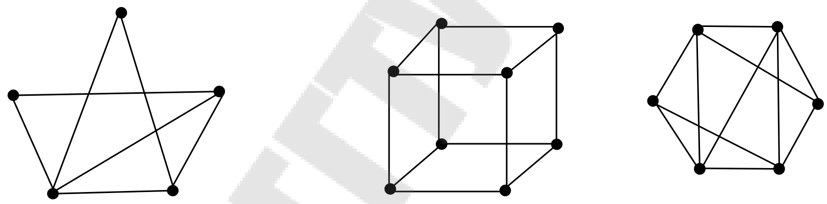
г) имеет простую цепь, содержащую все ребра графа.

105. Укажите, являются ли графы эйлеровыми (гамильтоновыми), обладают ли эйлеровой (гамильтоновой) цепью.



а)　　　　　*б*)　　　　　*в*)

106. Проверьте формулу Эйлера для следующих планарных графов и изобразите их плоское представление.



а)　　　　　*б*)　　　　　*в*)

107. Докажите непланарность графа K_5.

108. На участке три дома и три колодца. От каждого дома к каждому колодцу ведет тропинка. Когда владельцы домов поссорились, они задумали проложить от каждого дома к каждому колодцу тропинки так, чтобы не встречаться на пути. Покажите, что их намерение неосуществимо.

3.3. Алгоритмы, реализуемые на графах

Построение минимального остовного дерева

Граф, у которого каждому ребру (v_i, v_j) (дуге) сопоставлено некоторое действительное число c_{ij}, называется ***взвешенным*** (***размеченным***), а само число c_{ij} – ***весом*** ребра (дуги). Этот вес может описывать расстояние, стоимость или другие данные. ***Длиной*** (***весом***, ***стоимостью***) пути S называется число $l(S)$, равное сумме длин дуг, входящих в этот путь. Матрица $C=(c_{ij})$ называется ***матрицей весов***.

Остовным деревом (***покрывающим деревом***) связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Минимальным остовным деревом называется такое остовное дерево T графа G, что вес T меньше или равен весу любого другого остовного дерева графа G.

Задачу построения минимального дерева-остова можно решить с помощью ***алгоритма Краскала***. Идея метода состоит в том, чтобы формировать дерево T, выбирая ребра с наименьшим весом так, чтобы не возникал цикл.

Приведем описание алгоритма Краскала по шагам.

Шаг 1. Отсортируем ребра графа по неубыванию весов.

Шаг 2. Полагаем, что каждая вершина относится к своей компоненте связности.

Шаг 3. Проходим ребра в «отсортированном» порядке. Для каждого ребра выполняем следующую проверку:

а) если вершины, соединяемые данным ребром, лежат в разных компонентах связности, то объединяем эти компоненты в одну, а рассматриваемое ребро добавляем к минимальному дереву-остову;

б) если вершины, соединяемые данным ребром, лежат в одной компоненте связности, то исключаем ребро из рассмотрения, т. к. при включении данного ребра образуется цикл.

Шаг 4. Если есть еще нерассмотренные ребра и не все компоненты связности объединены в одну, то переходим к шагу 3, иначе алгоритм завершает работу:

а) если при этом просмотрены все ребра, но не все компоненты связности объединены в одну, то для исходного графа невозможно построить покрывающее дерево;

б) если просмотрены все ребра и все компоненты связности объединены в одну, то для исходного графа построено минимальное покрывающее дерево.

Поиск кратчайшего пути между заданной парой вершин

Пусть $G(V,E)$ – связный взвешенный граф с матрицей весов $C=(c_{ij})$. Задача построения кратчайшего пути между заданной парой вершин $s \in V$ и $t \in V$ заключается в том, чтобы из множества путей, соединяющих указанные вершины, найти путь с наименьшим весом.

Для решения задачи можно воспользоваться ***алгоритмом Дейкстры***. Он основан на приписывании каждой вершине временной пометки (верхней границы). На каждой итерации ровно одна временная пометка становится постоянной (соответствующая вершина становится «окрашенной»). Это означает, что пометка перестала быть верхней границей и дает уже точную длину кратчайшего пути от s к рассматриваемой вершине.

Приведем описание алгоритма по шагам.

Перед началом выполнения алгоритма все вершины не окрашены. Каждой вершине $x \in V$ в ходе выполнения алгоритма присваивается число $d(x)$, равное длине кратчайшего пути из s в x, включающего только окрашенные вершины.

Шаг 1. Положить $d(x) = 0, d(x) = \infty$ для всех x, отличных от s. Окрасить вершину s и положить $y = s$ (y – последняя из окрашенных вершин).

Шаг 2. Для каждой неокрашенной вершины x следующим образом пересчитать величину $d(x)$:

$$d(x) = \min\{d(x), d(x) + c(y, x)\}.$$

Если $d(x) = \infty$ для всех неокрашенных вершин x, закончить процедуру алгоритма: в заданном графе отсутствуют пути между указанной парой вершин. В противном случае окрасить ту из вершин x, для которой величина $d(x)$ является наименьшей. Положить $y = x$.

Шаг 3. Если $y = t$, закончить процедуру: кратчайший путь из вершины s в вершину t найден. Иначе перейти к шагу 2.

Задача о максимальном потоке

Пусть $G(V, E)$ – связный граф, в котором выделены две вершины: s – источник, t – сток. Каждой дуге (x, y) графа поставлено в соответствие неотрицательное число, которое интерпретируется как максимальное количество единиц некоторого товара, которое может быть доставлено из вершины x в вершину y за единицу времени. Это число принято называть ***пропускной способностью*** (или ***мощностью***) дуги. Такой граф называют ***сетью***, а его вершины – ***узлами***.

Задача построения максимального потока между заданной парой вершин $s \in V$ и $t \in V$ заключается в том, чтобы из множества путей, соединяющих указанные вершины, найти такие, по которым можно пропустить максимальное количество единиц потока в единицу времени. При этом должны соблюдаться следующие ограничения:

– поток по каждой дуге не должен превышать ее пропускную способность;

– поток из источника *s* равен потоку, приходящему в сток *t*;

– для промежуточных вершин количество единиц потока, попавшего в этот узел, должно в точности равняться количеству единиц потока, вышедшего из этого узла.

Для решения задачи можно воспользоваться ***алгоритмом*** расстановки пометок ***Форда–Фалкерсона***. Приведем его описание.

Положим исходную величину потока $P = 0$.

Шаг 1. Найти какой-нибудь путь от источника до стока, который образован дугами, каждая из которых имеет в направлении потока ненулевую мощность. Если такого пути нет, то оптимальное решение найдено.

Шаг 2. Найти наименьшее значение мощности дуги P_f на выбранном пути шага 1. Увеличить поток через сеть на величину P_f.

Шаг 3. На пути из шага 1 сократить на величину P_f мощности потоков на всех дугах в направлении потока и увеличить на P_f мощности потоков на всех дугах в обратном направлении. Затем перейти к шагу 1.

Задача коммивояжера

Задача коммивояжера – одна из самых известных задач комбинаторной оптимизации. Задача заключается в отыскании самого «выгодного» гамильтонова цикла, т. е. маршрута, проходящего через указанные города ровно по одному разу и с возвратом в исходный город. В условии задачи указывается критерий выгодности (самый короткий цикл, самый дешевый и т. д.) и соответствующая матрица весов (расстояний, стоимостей).

Приведем один из способов решения этой задачи − метод ветвей и границ. Суть метода заключается в следующем: сначала для множества всех гамильтоновых контуров R определяется некоторая оценка снизу (нижняя граница) $k(R)$ длины контура. Затем множество R разбивается на два подмножества, одно из которых включает некоторую дугу (i, j) (обозначим это подмножество $R_{(i,j)}$), а второе (подмножество $R_{\overline{(i,j)}}$) ее не включает. Для $R_{(i,j)}$ и $R_{\overline{(i,j)}}$ вновь определяется оценка $k(R)$ и выбирается подмножество с меньшей нижней границей. Оно снова разбивается на два подмножества. Процесс разбиения продолжается до тех пор, пока не будет выделено подмножество, содержащее единственный гамильтонов контур.

Прежде чем приступить к описанию алгоритма, поясним некоторые термины.

Пусть имеется некоторая числовая матрица. ***Привести матрицу по строкам*** значит найти минимальный элемент в каждой строке и вычесть его из всех элементов соответствующей строки. Аналогично определяется операция приведения матрицы по столбцам. Вычитаемые при этом минимальные элементы называются ***константами приведения***. ***Вес элемента*** – это сумма констант приведения матрицы, полученной заменой обсуждаемого элемента на бесконечность.

Опишем алгоритм метода ветвей и границ.

Пусть R – множество всех обходов графа G с n вершинами, M – весовая матрица, причем $m_{ii} = \infty$ для всех $i = \overline{1,n}$.

Шаг 1. Приведем матрицу расстояний по строкам и столбцам. Найдем нижнюю границу $k(R)$ всех гамильтоновых контуров как сумму констант приведения.

Шаг 2. Найдем самый тяжелый нуль (т.е. нуль с наибольшим весом) в приведенной матрице. Предположим, он находится в клетке (i, j).

Шаг 3. Разделим множество R на два подмножества $R_{(i,j)}$ и $R_{\overline{(i,j)}}$. Сопоставим множеству $R_{(i,j)}$ матрицу по следующему правилу:

а) заменим на ∞ число, стоящее в клетке (j,i), чтобы исключить возможность образования негамильтонова цикла;

б) в полученной матрице вычеркнем i-ю строку и j-й столбец, сохранив нумерацию строк и столбцов;

в) приведем последнюю матрицу по строкам и столбцам и вычислим сумму констант приведения $k_{(i,j)}$. Если сокращенная матрица имеет размерность 2×2, то перейдем к шагу 6.

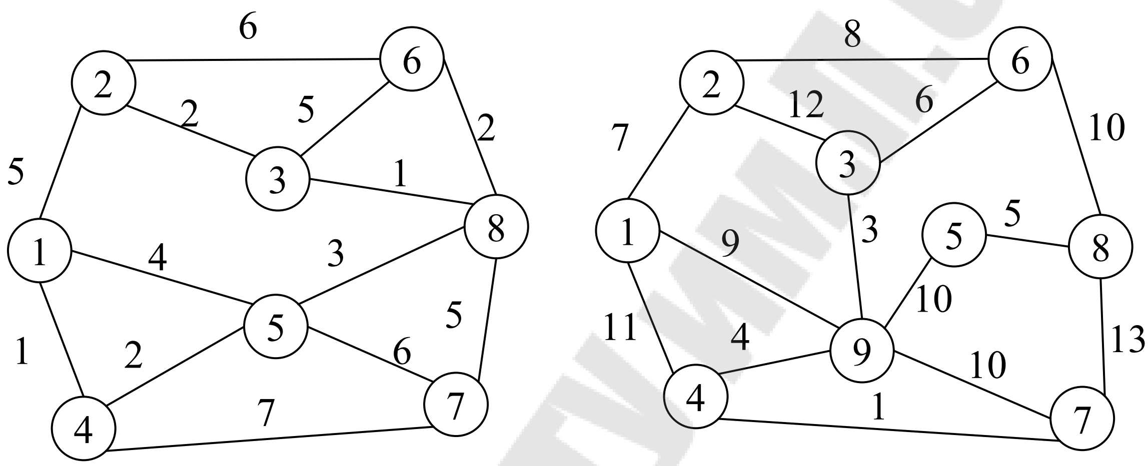
Шаг 4. Множеству $R_{\overline{(i,j)}}$ также сопоставим матрицу, полученную из исходной матрицы заменой элемента (i, j) на ∞ (таким образом мы исключаем из рассмотрения дугу (i, j)). Приведем полученную матрицу и вычислим сумму констант приведения $k_{\overline{(i,j)}}$.

Шаг 5. Сравним нижние границы $k_{(i,j)}$ и $k_{\overline{(i,j)}}$ перейдем к шагу 2. Если при этом $k_{(i,j)} < k_{\overline{(i,j)}}$, то разбиению подлежит множество $R_{(i,j)}$, в противном случае – множество $R_{\overline{(i,j)}}$.

Шаг 6. Определим гамильтонов контур и его длину.

Задания

109. Постройте коммуникационную сеть наименьшей длины для графа, изображенного на рисунке:



а) *б*)

110. Постройте остовное дерево наименьшего веса для графа, заданного весовой матрицей:

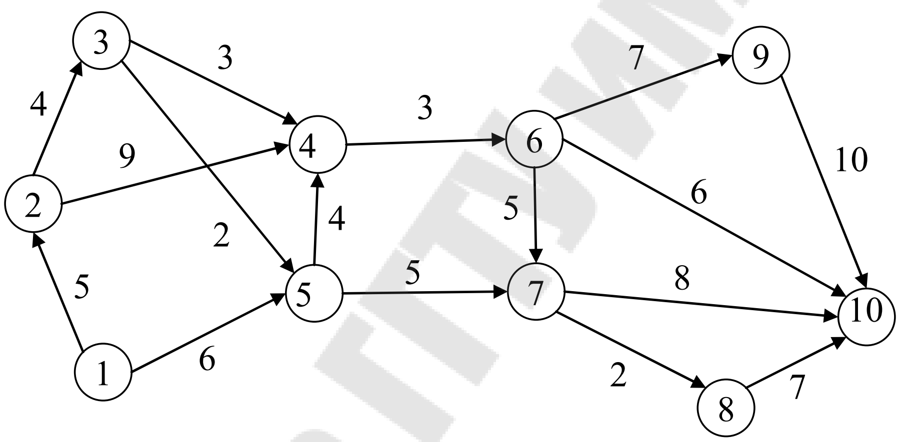
а)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	6	9	1	10	6	10	9	3	9
2	6	0	6	7	2	6	4	9	8	1
3	9	6	0	3	8	5	4	6	2	7
4	1	7	3	0	8	8	8	1	9	9
5	10	2	8	8	0	7	6	7	6	5
6	6	6	5	8	7	0	10	3	6	2
7	10	4	4	8	6	10	0	2	9	2
8	9	9	6	1	7	3	2	0	7	2
9	3	8	2	9	6	6	9	7	0	3
10	9	1	7	9	5	2	2	2	3	0

б)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	4	4	5	4	8	2	10	2	10
2	4	0	1	2	8	10	3	1	8	2
3	4	1	0	7	6	3	8	2	3	4
4	5	2	7	0	9	10	10	2	5	9
5	4	8	6	9	0	6	10	5	4	3
6	8	10	3	10	6	0	3	7	4	9
7	2	3	8	10	10	3	0	8	2	9
8	10	1	2	2	5	7	8	0	4	4
9	2	8	3	5	4	4	2	4	0	7
10	10	2	4	9	3	9	9	4	7	0

111. Пользуясь алгоритмом Дейкстры, найдите кратчайший путь от вершины 1 к вершине 10:



112. Найдите кратчайшие пути от вершины 1 до всех остальных вершин в графе, заданном весовой матрицей:

а)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	∞	∞	9	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	3	8	∞	∞	2	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	5	6	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	6	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	2	0	∞	9	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	5	∞	4	5
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	5	∞	1
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	8
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	5
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

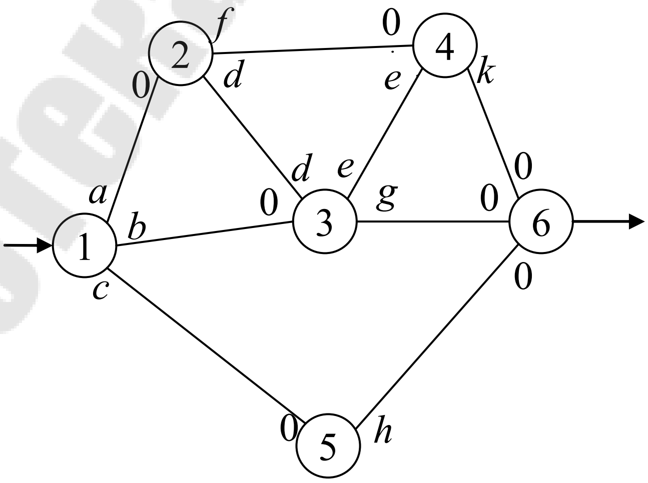
б)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	∞	∞	10	∞	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	4	3	∞	∞	7	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	5	5	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	6	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	9	0	∞	5	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	9	6
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞	10
8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	1
9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2
10	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

в)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	10	∞	∞	∞	∞	3	6	12
2	10	0	18	∞	∞	∞	2	∞	13
3	∞	18	0	25	∞	20	∞	∞	7
4	∞	∞	25	0	5	16	4	∞	∞
5	∞	∞	∞	5	0	10	∞	∞	∞
6	∞	∞	20	∞	10	0	14	15	9
7	∞	2	∞	4	∞	14	0	∞	24
8	6	∞	∞	∞	23	15	∞	0	5
9	12	13	∞	∞	∞	9	24	5	0

113. Определите максимальный поток между пунктами 1 и 6. Значения пропускных способностей дуг приведены в таблице.



Варианты	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*
а)	5	2	3	1	2	2	4	2	1
б)	2	9	1	2	1	7	3	4	6
в)	5	2	7	4	2	8	8	3	1

Как изменится значение максимального потока, если связать пункты 3 и 5 дугой с пропускной способностью (3; 3)?

114. Решите задачу коммивояжера методом ветвей и границ.

а)

	1	2	3	4	5
1	∞	9	4	2	9
2	5	∞	8	2	1
3	4	3	∞	7	3
4	1	6	8	∞	5
5	4	4	7	6	∞

б)

	1	2	3	4	5
1	∞	20	45	24	30
2	20	∞	35	60	22
3	45	35	∞	72	50
4	24	60	72	∞	∞
5	30	22	50	∞	∞

в)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	20	28	12	39	32
2	21	∞	15	9	17	27
3	30	25	∞	45	29	47
4	7	52	40	∞	15	1
5	60	46	11	5	∞	34
6	11	45	14	21	30	∞

г)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	15	21	14	30	17
2	15	∞	40	12	32	22
3	21	40	∞	30	40	50
4	14	12	30	∞	18	20
5	30	32	40	18	∞	22
6	17	22	50	20	22	∞

ОТВЕТЫ

9. а) $X=(C\setminus A)\cup B$; б) $X=C\setminus B$; в) $C=B$. **10.** а) да; б) нет. **11**. 10, 10. **12**. 20 %. **13**. 20. **14**. а) 47; б) 78. **15**. [5,17], [18,30]. **17**. 121. **18**. 125. **19**. А – 6, В – 5, С – 4, только одну книгу – 15, ни одной – 3. **20**. 94, 65. **21**. 30, 7, 18, 5. **23**. да. **24**. 120, 24. **25**. 30240. **38**. $B=A_1\cup A_2$, $C=A_3^2$, $D=A_7\circ A_3$, $E=A_2\circ A_7$, $F=A_2\circ A_6$. **42**. а) 9,8; б)10; в) 116; г) 8/99. **43**. а) выполняется, б) не выполняется. **44**. а) 5; б) 14, 3; в) 9; г) 10; д) 7; е) 8; з) 7. **47**. 3876. **48**. а) $945a^4$; б) $945a^4b^4$; в) $1287a^{16}b^{15}$; г) $70a^2b^2$; д) $-3432x^{10}\sqrt{x}$; е) $-1716a^3b^2\sqrt[3]{b}$; $1716a^3\sqrt{ab^2}$. **49**. 10, $1/\sqrt{100000}$. **50.** $35z^5$. **51**. а) $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$; б) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^nC_n^n=0$. **52**. $a_n=2^n-1$. **53**. $a_n=n+2^n$. **55**. а) $(P,Q,R)=(1,0,0)$; б) $\varnothing$; в) $\varnothing$; г) $(P,Q,R,S)=\{(0,0,0,1),(0,0,1,1)\}$; д) $(P,Q,R)=\{(1,0,1),(1,0,0);(0,1,1),(0,0,1),(0,0,0),(0,1,0)\}$; е) $(P,Q,R)=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)\}$; ж) $(P,Q,R)=\{(0,1,0),(0,0,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1),(1,1,0)\}$; з) $(P,Q)=(0,0)$. **56**. а) $P\vee Q\vee\overline{S}$; б) $P\vee Q\vee R$; в) P; г) P; д) $\overline{P}\vee\overline{Q}$; е) $P\vee Q$. **58**. а), г), е) – неверные рассуждения; б), в), д) – верные рассуждения. **59**. а) $z\oplus y\oplus yz\oplus x\oplus xz\oplus xy$; б) $xz\oplus xy$; в) $1\oplus z\oplus y\oplus yz\oplus x\oplus xz\oplus xy$; г) $1\oplus z\oplus yz\oplus x\oplus xz\oplus xyz$; д) $xy\oplus xyz$; е) $1\oplus z\oplus y\oplus yz\oplus x\oplus xz\oplus$ $\oplus xy\oplus xyz$; ж) $1\oplus x\oplus xz\oplus xyz$; з) $1\oplus z\oplus xy$. **60**. а), б), е) – полные; в), г), д) – не полные. **65**. а) $P\vee\overline{Q}\vee R$; б) $\overline{Q}\vee R$; в) $Q\wedge\overline{S}\wedge(P\vee R)$; г) $\overline{P}\wedge Q\wedge\overline{R}$; д) P; е) $Q\wedge P$; ж) $P\vee((Q\vee T)\wedge R)$; з) $PQR\vee\overline{P}\overline{Q}\overline{R}$. **74**. а), б), е) – ложные; в), г), д) – истинные. **76**. а) $(-1,1)$; б) $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$; в) $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$; г) $(-1,1)\cup(3;+\infty)$; д) $(-1,1)\cup$ $\cup[2;3]$; е) $(-\infty,-1]\cup[1;2]\cup[3;+\infty)$. **109**. а) 19; б) 44. **110**. а) 16; б) 19. **111**. 19. **112**. а) 0, 8, 11, 11, 9, 17, 10, 15, 21, 11; б) 0, 3, 7, 6, 10, 12, 10, 12, 21, 13; в) 0, 5, 18, 7, 12, 17, 3, 6, 11. **113**. а) 7, не изменится; б) 9, 12; в) 10, 12. **114**. а) 14; б) 183; в) 81; г) 121.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика : пер. с англ. / Джеймс А. Андерсон. – М. : Издат. дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
2. Белоусов, А. И. Дискретная математика : учеб. для вузов / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 744 с.
3. Галушкина, Ю. И. Конспект лекций по дискретной математике / Ю. И. Галушкина, А. Н. Марьямов. – М. : Айрис-пресс, 2007. – 176 с.
4. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский. – 3-е изд. – М. : Вуз. книга, 2000. – 280 с.
5. Плотников, А. Д. Дискретная математика : учеб. пособие / А. Д. Плотников. – М. : Новое знание, 2006. – 304 с.
6. Просветов, Г. И. Дискретная математика: задачи и решения : учеб. пособие / Г. И. Просветов. – М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2008. – 222 с.
7. Соболева, Т. С. Дискретная математика : учеб. для студентов вузов / Т. С. Соболева, А. В. Чечкин ; под ред. А. В. Чечкина. – М. : Издат. центр «Академия», 2006. – 256 с.
8. Эвнин, А. Ю. Задачник по дискретной математике / А. Ю. Эвнин. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 164 с.

Содержание

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Евтухова Светлана Михайловна
Задорожнюк Мария Викторовна
Кондратюк Валерия Вячеславовна

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Пособие по одноименным дисциплинам для студентов специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника» и 1-40 01 01 «Информационные системы и технологии» дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. Г. Мансурова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 17.10.11.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 3,69.
Изд. № 46.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48