Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

М. В. Задорожнюк, С. М. Евтухова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия для студентов
учреждений высшего образования по специальности
1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования»*

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2022

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.12я73
З-13

Рецензенты: зав. каф. фундаментальной и прикладной математики Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины канд. техн. наук, доц. *Л. Н. Марченко*;
доц. каф. ИВС Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации каннд. физ.-мат. наук, доц. *Л. А. Воробей*

Задорожнюк, М. В.

З-13 Математическая логика : учеб.-метод. пособие / М. В. Задорожнюк, С. М. Евтухова ; М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2022. – 81 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-508-4.

Рассмотрены основные понятия теории множеств и отношений, комбинаторного анализа, элементы алгебры логики высказываний и предикатов, синтез и минимизация булевых функций. Разобрано большое количество примеров. Имеются задачи для самостоятельного решения по каждой теме.

Для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологи программирования» дневной формы обучения.

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.12я73

ISBN 978-985-535-508-4

Оглавление

ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ

1.1. Множества и операции над ними

Под ***множеством*** понимают совокупность каких-либо объектов, обладающих общим для всех них характеристическим свойством. Сами объекты при этом называются элементами множества.

Множества обозначают прописными латинскими буквами, элементы множества – строчными буквами. Запись «$x \in A$» означает, что элемент x принадлежит множеству A.

Множества бывают конечными, состоящими из конечного (фиксированного) числа элементов, или бесконечными. Конечные множества можно задать ***полным списком элементов***: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. При этом число элементов $n(A) \equiv |A|$ называется **мощностью** конечного множества A. Например, конечное множество $A = \{2, 3, 5, 7\}$ имеет мощность $|A| = 4$. Множества также могут быть заданы описанием ***характеристических свойств*** его элементов: $A = \{x \mid P(x)\}$. Например, множество $B = \{n \mid n \in \mathrm{N}, n \leq 10\}$ есть множество первых десяти натуральных чисел. Кроме того, множество можно описать с помощью ***порождающей процедуры***: $A = \{x \mid f\}$. Например, хорошо известную последовательность Фибоначчи $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, ...\}$ можно задать следующим образом: $\{x \mid x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, x_1 = 1, x_2 = 1\}$.

Встречаются множества, не содержащие ни одного элемента. Например, множество людей, живущих 300 лет. Такие множества называются ***пустыми*** и обозначаются $\varnothing$.

Если каждый элемент множества A содержится во множестве B, то A называется ***подмножеством*** множества B. При этом пишут $A \subseteq B$. Например, если A – множество четных чисел, B – множество целых чисел, то $A \subseteq B$. По определению пустое множество $\varnothing$ есть подмножество всякого множества, в том числе и пустого.

Два множества A и B называются ***равными***, если одновременно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Таким образом, чтобы доказать равенство двух множеств, необходимо установить два включения.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется ***собственным подмножеством*** B. При этом пишут $A \subset B$.

Пусть A – некоторое конечное множество. Совокупность всех подмножеств множества A называется ***булеаном*** и обозначается $P(A)$. Если $|A| = n$, то число элементов его булеана $|P(A)| = 2^n$.

Например, булеан множества $A=\{2, 4\}$ содержит 2^2 элементов, $P(A)=\{\varnothing,\{2\},\{4\},\{2,4\}\}=\{\varnothing,\{2\},\{4\},A\}$.

В любом приложении теории множеств заранее понятна природа объектов, которые объединяются во множества. Все такие объекты объединяются в одно понятие – ***универсальное* множество**, или ***универсум*** U. ***Универсальным*** называют множество U, элементами которого являются все множества рассматриваемой задачи или теории.

Над множествами определены следующие операции: объединение, пересечение, разность, дополнение:

1) объединение: $A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ или } x\in B\}$;

2) пересечение: $A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ и } x\in B\}$;

3) разность: $A\setminus B=\{x\,|\,x\in A \text{ и } x\notin B\}$;

4) дополнение множества A во множестве U:

$$\overline{A}=\{x\,|\,x\in U \;\; и \;\; x\notin A\}=U\setminus A.$$

При помощи теоретико-множественных операций из имеющихся множеств можно строить новые. Например, множество

$$A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

называют разностной суммой (или симметрической разностью). Можно показать, что для симметрической разности справедлива и другая формула

$$A\oplus B=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

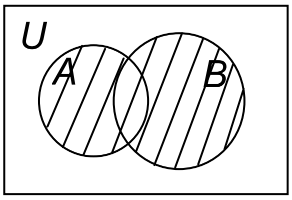
Пример 1. Пусть $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$. Найдите $A\cap B$, $A\cup B$, $\overline{A}$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\oplus B$.

Решение

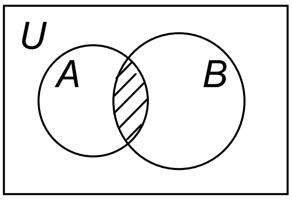
По определению теоретико-множественных операций имеем:

$A\cap B=\{2, 3\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\overline{A}=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A\setminus B=\{1\}$, $B\setminus A=\{4, 5\}$, $A\oplus B=\{1, 4, 5\}$.

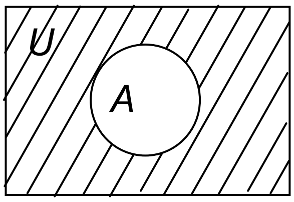
Для графического изображения теоретико-множественных операций и соотношений удобно использовать диаграммы Эйлера–Венна. На них прямоугольником изображают универсальное множество U, а кругами – остальные множества. Тогда введенные выше операции можно представить следующим образом:



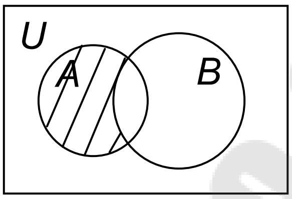
$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$



$A \setminus B$

Свойства операций над множествами

1. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$

2. Ассоциативность: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

3. Дистрибутивность: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

4. Законы де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

5. Идемпотентность: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$

6. Законы поглощения: $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$

7. Закон двойного дополнения: $\overline{\overline{A}} = A.$

8. Операции с универсальным и пустым множествами:

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A, \quad A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Разностная сумма удовлетворяет таким свойствам, как коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность, а также для нее известны некоторые полезные соотношения:

$$A \cup B = A \oplus B \oplus (A \cap B), \quad A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C),$$

$$A \setminus B = A \oplus (A \cap B), \quad A \oplus \varnothing = A, \quad A \oplus A = \varnothing.$$

Пример 2. Докажите равенство

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Решение

Преобразуем правую часть равенства, используя закон дистрибутивности:

$$\left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = \left(A \cap \left(B \cup \overline{B}\right)\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) =$$
$$= \left(A \cap U\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = \left(A \cup \overline{A}\right) \cap \left(A \cup B\right) =$$
$$= U \cap \left(A \cup B\right) = A \cup B,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечные множества. Тогда справедлива следующая формула (***принцип включений и исключений***):

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{1 \le i \le n} \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i < j < \cdots l \le n} \left|A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l\right|.$$

В частности, для двух множеств A и B формула включений и исключений примет вид:

$$\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|,$$

а для трех конечных множеств A, B, C она выглядит следующим образом:

$$\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|B \cap C\right| - \left|A \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|.$$

Пример 3. Из 75 студентов английский язык изучают 40 человек, немецкий – 32, французский – 12, английский и немецкий – 10 человек, английский и французский – 9, немецкий и французский – 7. Все три языка изучают 5 студентов. Сколько студентов изучают только один английский язык?

Решение

Пусть множество A – это студенты, изучающие английский язык (и, возможно, какие-нибудь другие языки), множество B – студенты, изучающие немецкий язык, множество C – студенты, изучающие французский язык. Вычислим с помощью формулы включений-исключений для трех множеств, сколько студентов из 75 изучают хотя бы один язык:

$$| A \cup B \cup C | = 40 + 32 + 12 - 10 - 9 - 7 + 5 = 63.$$

Определим, сколько из этих 63 человек изучают немецкий или французский язык, пользуясь формулой включений и исключений для двух множеств:

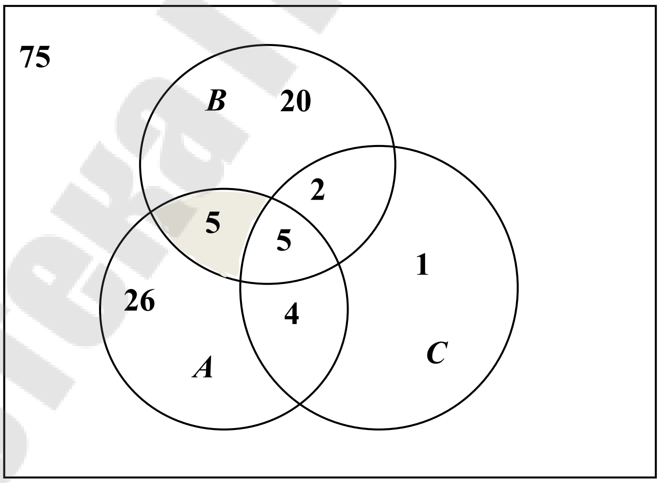
$$|B \cup C| = 32 + 12 - 7 = 37.$$

Итак, 63 человека изучают хотя бы один из трех языков, из них 37 человек изучают немецкий или французский, значит, только английский язык изучают оставшиеся 26 студентов.

Ответ: 26 студентов.

Замечание. Эту же задачу можно решить с помощью диаграммы Эйлера–Венна. Универсальное множество, содержащее 75 студентов, изобразим в виде прямоугольника, а множества A, B и C – в виде пересекающихся кругов, и вычислим количество студентов в каждом подмножестве.

Множество $A \cap B \cap C$ соответствует ситуации «студент изучает все три языка». Таких студентов пятеро, следовательно, записываем в соответствующем множестве число 5. Далее, множество $A \cap B$ обозначает студентов, изучающих английский и немецкий языки – их 10 человек. Но пятеро из них изучают еще и французский язык, следовательно, заштрихованной области будет соответствовать число 5. Продолжаем заполнять все части кругов аналогичным образом и получаем следующую диаграмму:



Из диаграммы видно, что только английский язык изучают 26 студентов.

Отметим, что диаграмма Эйлера–Венна позволяет ответить сразу на несколько вопросов. Например, из нее видно, что один человек изучает только французский язык, а 23 человека – немецкий либо французский, но никак не английский.

Пример 4. Сколько натуральных чисел из первой сотни не делятся одновременно на 2, 3 и 7?

Решение

Введем обозначения: A – множество натуральных чисел, делящихся на 2, B – множество натуральных чисел, делящихся на 3, и C – множество натуральных чисел, делящихся на 7. Тогда количество чисел, делящихся на 2, равно $|A| = \left[\frac{100}{2}\right] = 50$. Аналогично находим $|B| = \left[\frac{100}{3}\right] = 33$, $|C| = \left[\frac{100}{7}\right] = 14$. Количество чисел, делящихся на 2 и 3 одновременно, равно $|A \cap B| = \left[\frac{100}{6}\right] = 16$, количество чисел, делящихся одновременно на 2 и 7, а также на 3 и 7, соответственно, равно $|A \cap C| = \left[\frac{100}{14}\right] = 7$, $|B \cap C| = \left[\frac{100}{21}\right] = 4$. Количество чисел, делящихся сразу на все три множителя, $|A \cap B \cap C| = \left[\frac{100}{42}\right] = 2$. Найдем число элементов, делящихся хотя бы на одно число:

$$|A \cup B \cup C| = 50 + 33 + 14 - 16 - 7 - 4 + 2 = 72.$$

Окончательно имеем:

$$100 - 72 = 28,$$

т. е. количество натуральных чисел, которые не делятся одновременно на 2, 3 и 7, равно 28.

Ответ: 28.

1.2. Бинарные отношения

Декартовым* (*прямым*) *произведением $A \times B$ двух непустых множеств называется совокупность упорядоченных пар вида (a, b), где $a \in A$, а $b \in B$, т. е. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Например, декартово произведение множеств $A = \{2, 3\}$ и $B = \{1, 7, 9\}$ равно $A \times B = \{(2,1), (2,7), (2,9), (3,1), (3,7), (3,9)\}$.

Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество упорядоченных наборов длины n вида $(a_1, a_2, ..., a_n)$, где $a_i \in A_i$.

С помощью декартова произведения легко ввести важное понятие – бинарное отношение на множествах A и B, которое отражает связь между объектами данных множеств.

Бинарным отношением R, определенным на множествах A и B, называется всякое подмножество их декартового произведения: $R \subseteq A \times B$. Например, если A – множество слов русского языка, B – множество слов английского языка, то бинарное отношение $R \subseteq A \times B$ можно рассматривать как русско-английский словарь.

Если $(a, b) \in R$, , то пишут aRb, т. е. a находится в отношении R с b. Иногда отношение R заменяется специальным символом, например, <, >, =, ~ и т. п. В случае, когда $A = B$, говорят, что отношение R определено на множестве A, при этом $R \subseteq A^2$, где A^2 – декартов квадрат множества A.

Задать отношение можно *перечислив* все пары элементов, связанных этим отношением. Кроме того, отношения можно задать *графически* или в виде *матрицы*. При графическом изображении отношения элементам множеств сопоставляют точки плоскости, а парам $(a, b) \in R$ – стрелки (дуги), идущие из a в b. Матрица бинарного отношения $R \subseteq A \times B$ вводится следующим образом:

$$(M_R)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a_i R b_j, \\ 0, & \text{если} \quad a_i \overline{R} b_j. \end{cases}$$

Пусть R есть отношение между A и B. Можно определить следующие отношения:

• *обратное отношение* – $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$, $R^{-1} \subseteq B \times A$;

• *дополнение отношения* – $\overline{R} = \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$, $\overline{R} \subseteq A \times B$,

$$R \cap \overline{R} = \varnothing, \; R \cup \overline{R} = U;$$

• *тождественное отношение* – $I = \{(a, a) \mid a \in A\}$, $I \subseteq A^2$;

• *универсальное отношение* – $U = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, $U = A \times B$.

Над бинарными отношениями, как над множествами, определены все теоретико-множественные операции (объединение, пересечение, разность). Например, если $a(R \cup S)b$, то или aRb, или aSb.

В частности, если $R =$ «x является отцом y», а $S =$ «x является матерью y», $R \cup S =$ «x является родителем y».

Пусть $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$ два бинарных отношения. ***Композицией*** отношений R_1 и R_2 называется бинарное отношение $R \subseteq A \times C$, состоящее только из тех пар (a, c), для которых найдется элемент $b \in B$ такой, что $(a,b) \in R_1$ и $(b,c) \in R_2$. Например, если отношение $R_1 =$ «x является братом y», $R_2 =$ «x является отцом y», то их композиция $R =$«x является дядей y».

Рассмотрим некоторые важнейшие ***типы бинарных отношений***. Отношение $R \subseteq A^2$ называется ***рефлексивным***, если $(a;a) \in R$ для всех $a \in A$. Отношение R называется ***антирефлексивным***, если из $(a;b) \in R$ следует, что $a \neq b$. Отношение R называется ***симметричным***, если для всех a и b, принадлежащих A, из $(a;b) \in R$ следует, что $(b;a) \in R$. Отношение ***транзитивно***, если для всех a, b и c, принадлежащих A, из того, что $(a;b) \in R$ и $(b;c) \in R$, следует, что $(a;c) \in R$. Отношение R ***антисимметрично***, если для всех a и b из A из принадлежности $(a;b)$ и $(b;a)$ отношению R следует равенство a и b. Отношение R называется ***полным***, если для любых $a,b \in A$ выполняется либо $a = b$, либо aRb, либо bRa.

Установить тип отношения можно и по матрице отношения:

– R – рефлексивно $\Leftrightarrow$ главная диагональ матрицы M_R состоит из единиц;

– R – симметрично $\Leftrightarrow M_R^T = M_R$;

– R – антирефлексивно $\Leftrightarrow$ главная диагональ матрицы M_R состоит из нулей.

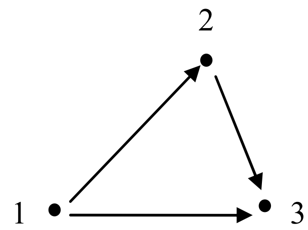
Пример 5. На множестве $A = \{1, 2, 3\}$ задано отношение «меньше». Опишите это отношение различными способами; выясните, является ли оно рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.

Решение

Перечислим все пары чисел, удовлетворяющие данному отношению: $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Запишем матрицу отношения: $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Графическое представление данного отношения будет иметь вид:



Так как главная диагональ матрицы состоит из нулей, то данное отношение не является рефлексивным и является антирефлексивным. Отношение несимметрично, так как $M_R^T \neq M_R$. Отношение «меньше» транзитивно, так как из того, что $1 < 2$ и $2 < 3$, следует, что $1 < 3$. Кроме того, данное отношение является антисимметричным и полным.

Если отношение R на множестве A рефлексивно, симметрично и транзитивно, то его называют ***отношением эквивалентности***. Примерами отношений эквивалентности могут служить отношение равенства, заданное на множестве действительных чисел, отношение подобия, заданное на множестве треугольников, и т. п.

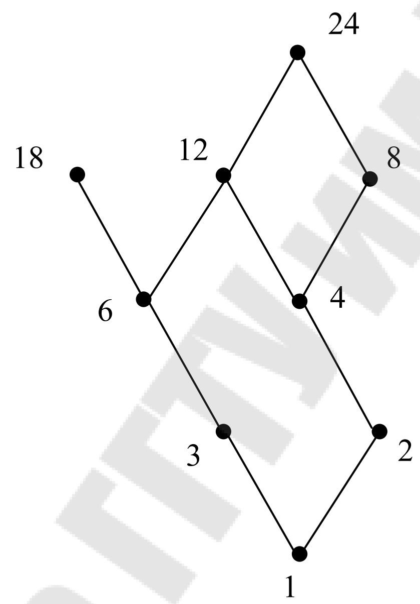
Бинарное отношение $R \subseteq A^2$ называется ***отношением порядка***, если оно антисимметрично и транзитивно. Если при этом отношение антирефлексивно, то порядок называют *строгим*, в противном случае – *нестрогим*. Примерами отношений порядка могут служить отношения служебной иерархии, отношение «$x \leq y$». Отношение порядка на множестве A, для которого любые два элемента сравнимы (т. е. либо $(a,b) \in R$, либо $(b,a) \in R \ \ \forall a,b \in A$), называется отношением ***линейного порядка***. Если во множестве есть элементы, несравнимые между собой, то говорят, что задан ***частичный порядок***.

Упорядоченное множество удобно изображать с помощью *диаграмм Хассе*. При построении диаграммы Хассе элементы упорядоченного множества обозначают точками, причем если пара $(a,b) \in R$, то точку, соответствующую элементу a, располагают ниже точки, соответствующей элементу b. Точки a и b соединяют дугой, если не существует элемента c такого, что $(a,c) \in R$ и $(c,b) \in R$.

Пример 6. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24\}$ задано отношение порядка $R \equiv x \mid y =$ «x делит y». Постройте диаграмму Хассе.

Решение

Так как единица делит любой из элементов множества A, то она будет располагаться внизу диаграммы Хассе. Числа 2 и 3, которые делятся только на 1, будут располагаться в следующем ярусе диаграммы. Числа 18 и 24 не делят ни один элемент множества A, следовательно, они будут располагаться в верхних рядах диаграммы. Рассуждая аналогичным образом, получим следующую диаграмму Хассе:



Пусть X – частично упорядоченное множество с отношением порядка R. Элемент $x^* \in X$ называется *наибольшим*, если $(x, x^*) \in R$ для всех элементов x из множества X. Элемент $a \in X$ называется *максимальным*, если из того, что $(a, x) \in R$, следует, что $x = a$ (т. е. он является наибольшим среди всех элементов, с которыми сравним). Элемент $x_* \in X$ называется *наименьшим*, если $(x_*, x) \in R$ для всех элементов x из множества X. Элемент $b \in X$ называется *минимальным*, если из того, что $(x, b) \in R$, следует, что $x = b$ (т. е. он является наименьшим среди всех элементов, с которыми сравним). Например, у множества A из примера 6 нет наибольшего элемента, зато два максимальных элемента – 18 и 24. Наименьшим элементом множества A является 1, она же является и минимальным элементом.

Замечание. Всякий наибольший (наименьший) элемент является максимальным (минимальным). Обратное неверно. Не во всяком упорядоченном множестве существует наибольший (наименьший) элемент, но если существует, то он единственный.

1.3. Функциональные отношения

Пусть X, Y – непустые множества. Соответствие f, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ однозначно определенный элемент $y \in Y$, называют *отображением* множества X во множество Y.

Элемент множества Y, соответствующий элементу $x \in X$, обозначают $f(x)$ и называют *образом* элемента x при отображении f. Если $f(x) = y$, то элемент x называют *прообразом* элемента y при отображении f и обозначают $f^{-1}(y)$.

Если множества X и Y числовые, то отображение называют *функцией*.

Замечание. Функцию $f: X \to Y$ можно рассматривать как бинарное отношение на множестве $X \times Y$. Например, квадратичную функцию $y = x^2$ можно определить как отношение R, которому принадлежат все пары вида $(x; x^2)$, где x – любое действительное число.

Отображение $f: X \to Y$ называется ***сюръекцией*** (или отображением «на»), если у каждого элемента $y \in Y$ существует прообраз в X. Схематическое изображение сюръективного отображения можно увидеть на рис. 1.1.

Отображение $f: X \to Y$ называется ***инъекцией*** (или отображением «в»), если у каждого элемента $y \in Y$ существует *не более одного* прообраза в X (рис. 1.2).

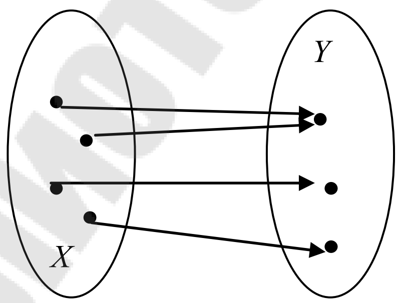


Рис. 1.1

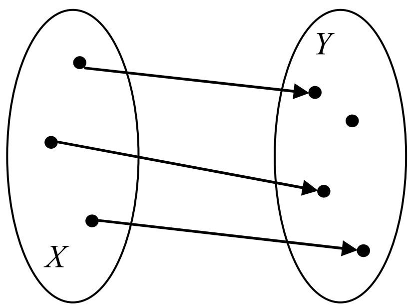


Рис. 1.2

Отображение $f: X \to Y$ называется ***биекцией*** (или взаимно-однозначным отображением), если оно одновременно инъективно и сюръективно, т. е. каждый элемент $y \in Y$ имеет один и только один прообраз.

Одно и то же отображение может быть или не быть сюръективным, инъективным, биективным в зависимости от множеств X и Y.

Пример 7. Пусть задано отображение $f: X \to Y$, действующее по закону $f: x \to \sin x$. Будет ли это отображение инъективным и сюръективным, если: 1) $X = \boldsymbol{R}$, $Y = \boldsymbol{R}$; 2) $X = [0; 2\pi)$, $Y = [-1; 1]$; 3) $X = [0; \pi/2]$, $Y = [-1; 1]$.

Решение

1. Пусть $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. В этом случае отображение не будет сюръективным, так как, например, для элемента $y = 3 \in \boldsymbol{R}$ не существует прообраза (т. е. такого элемента $x \in \boldsymbol{R}$, для которого $f(x) = \sin x = 3$), Данное отображение также не является инъекцией, т. к. различным значениям переменной $x \in \boldsymbol{R}$ может соответствовать одно и то же значение переменной y. Например, $f(0) = f(\pi) = 0$.

2. Пусть теперь $f: [0; 2\pi) \to [-1; 1]$. Данное отображение является сюръекцией, так как область значений функции $y = \sin x$ полностью совпадает с отрезком $[-1; 1]$, а значит, у любого элемента $y \in [-1; 1]$ имеется прообраз. Инъекцией это отображение по-прежнему не является.

3. Рассмотрим отображение $f: [0; \pi/2] \to [0; 1]$. На указанном промежутке функция $y = \sin x$ строго возрастает и принимает все значения, заключенные между нулем и единицей. Следовательно, в этом случае отображение сюръективно и инъективно, а значит, является и биекцией.

1.4. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий способы подсчета элементов в конечных множествах.

Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – конечное множество.

Перестановкой называется любой *упорядоченный* набор $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$ из всех элементов множества X. Число перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

Размещением из n элементов по m называется любой *упорядоченный* набор из m $(m \le n)$ различных элементов. Число размещений из n по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

В частности, при $n = m$ размещение будет перестановкой.

Сочетанием из n элементов по m называется любой *неупорядоченный* набор, т. е. подмножество $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}\}$ из m $(m \le n)$ различных элементов множества *X*. Число сочетаний из n по m обозначается C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Если в размещении и сочетании из n элементов по m убрать требование наличия *различных* элементов и разрешить повторение, то их называют размещениями и сочетаниями с ***повторениями*** и вычисляют, соответственно, по формулам:

$$\widetilde{A}_n^m = n^m,$$

$$\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример 8. Сколькими способами можно:

1) расставить на полке 5 книг?

$$P_5 = 5! = 120;$$

2) расставить на полке 3 книги из имеющихся 5?

$$A_5^3 = \frac{5!}{3!} = 60;$$

3) составить дружину для дежурства на дискотеке из трех студентов и куратора, если имеются 60 студентов и 3 куратора?

$$N = C_3^1 \cdot C_{60}^3 = 102660;$$

4) составить букет из семи роз, если в продаже имеются красные, розовые, белые и желтые розы?

$$\widetilde{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = 120;$$

5) составить комбинацию из цифр на кодовом замке, состоящем из трех дисков, каждый из которых разделен на десять секторов?

$$\widetilde{A}_{10}^{3} = 10^3.$$

Пример 9. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «МАТЕМАТИКА», если считать словом любую последовательность букв?

Решение

Слово «МАТЕМАТИКА» состоит из 10 букв, при этом буква «М» встречается два раза, буква «А» – три раза, буква «Т» – два раза, буквы «Е», «И», «К» входят по одному разу. Значит, при перестановках букв получится

$$N = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200.$$

Ответ: 151200 слов.

Замечание. Здесь мы имеем дело с так называемой «перестановкой с повторениями» – упорядоченным набором $(a_1, a_2, ..., a_k)$, куда элемент a_1 входит n_1 раз, элемент a_2 – n_2 раза, …, элемент a_k – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$.

Число таких перестановок обозначают $P(n; n_1, n_2, ..., n_k)$ и вычисляют по формуле

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}.$$

С числами C_n^k связано функциональное тождество, называемое ***биномом Ньютона***:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n a^0 b^n.$$

При этом числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$ называются *биномиальными коэффициентами* и вычисляются по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.. Из элементарной математики хорошо известны частные случаи бинома Ньютона – формулы сокращенного умножения.

Непосредственной проверкой можно доказать следующие свойства биномиальных коэффициентов:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

4) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

Пример 10. Найдите член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[5]{x^3}\right)^{19}$, не содержащий x.

Решение

Преобразуем заданное выражение и применим к нему формулу бинома Ньютона:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[5]{x^3}\right)^{19} = \left(x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{5}}\right)^{19} = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{19-k} \left(x^{\frac{3}{5}}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k \cdot x^{\frac{-38+2k}{3}} \cdot x^{\frac{3k}{5}} = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k x^{\frac{-190+19k}{15}}.$$

Для того чтобы член разложения не содержал x, необходимо чтобы соответствующий показатель степени x был равен нулю. Решив уравнение

$$\frac{-190+19k}{15} = 0,$$

получим $k = 10$. Действительно, одиннадцатый член разложения, соответствующий $k = 10$, имеет вид:

$$T_{11} = C_{19}^{10}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{19-10}\left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{10} = \frac{19!}{10!\cdot 9!} x^{-\frac{18}{3}} x^{\frac{30}{5}} = 362880.$$

Ответ: $T_{11} = 362880$.

Пример 11. Решите систему $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x, \\ C_{x-1}^{y} = 10. \end{cases}$

Решение

Воспользовавшись формулами для подсчета числа сочетаний, преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!} = 2{,}5x, \\ \dfrac{(x-1)!}{y!(x-1-y)!} = 10. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе. Получим:

$$\frac{x}{y+1} = 0{,}25x,$$

откуда $y = 3$. Подставим найденное значение переменной y во второе уравнение системы:

$$\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!} = 10.$$

Сократив на $(x-4)!$, получим уравнение $(x-1)(x-2)(x-3) = 60$. Так как перестановки, сочетания и размещения определены только на множествах целых неотрицательных чисел, то требуется найти три последовательных натуральных числа, произведение которых равно 60. Очевидно, это числа 3, 4 и 5, т. е. $x-1=5$, откуда $x = 6$.

Ответ: $x = 6$, $y = 3$.

1.5. Рекуррентные соотношения

Иногда решение комбинаторных задач можно свести к решению аналогичных задач меньшей размерности с помощью так называемых рекуррентных соотношений, и таким образом получить решение сложной задачи, последовательно находя решения более легких задач.

Формула вида $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$ называется ***рекуррентным соотношением*** между элементами последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Рекуррентное соотношение позволяет по известным значениям чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ найти a_n.

Рекуррентное отношение вида

$$a_n + p_1(n)a_{n-1} + p_2(n)a_{n-2} + \cdots + p_k(n)a_{n-k} = f(n)$$

называется *линейным рекуррентным отношением порядка k.* Если $f(n) = 0,$ то рекуррентное отношение называют *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Если все коэффициенты $p_i(n)$ $(1 \le i \le k)$ являются постоянными, то соотношение называют линейным рекуррентным отношением с постоянными коэффициентами порядка k.

Пример 12. Линейное однородное рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ задает так называемые числа Фибоначчи. Зная $a_1 = 1$ и $a_2 = 1,$ можно найти $a_3 = 1 + 1 = 2,$ $a_4 = 2 + 1 = 3,$ и т. д.:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots .$$

Иногда удается получить из рекуррентного соотношения общую формулу для вычисления a_n по номеру n. Будем искать формулу для вычисления чисел Фибоначчи в виде $a_n = \lambda^n$. Подставив в исходное рекуррентное соотношение, имеем:

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

или

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \ \lambda \ne 0.$$

Это уравнение называют *характеристическим* уравнением рекуррентного соотношения. Найдем его корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Тогда каждое из выражений λ_1^n и λ_2^n задает решение исходного соотношения. Очевидно, выражения вида $C_1\lambda_1^n$ и $C_2\lambda_2^n$ тоже являются решениями этого соотношения. Сумма таких выражений также удовлетворяет заданному рекуррентному соотношению. Таким образом, линейная комбинация $C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ будет задавать *общее решение* рекуррентного соотношения:

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Из начальных условий $(a_1 = a_2 = 1)$ находим значения констант C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно, искомая формула будет иметь вид:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Это выражение известно как ***формула Бине***.

Рассмотренный пример позволяет сформулировать общий прием *решения линейных однородных рекуррентных соотношений* с постоянными коэффициентами, напоминающий соответствующий прием из теории дифференциальных уравнений.

Теорема 1. Пусть имеется линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами

$$a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \cdots + p_k a_{n-k} = 0$$

и пусть λ – корень характеристического уравнения

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_k = 0.$$

Тогда:

1) числа вида $C\lambda^n$ $(C = \text{const})$ удовлетворяют данному рекуррентному соотношению;

2) если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – простые корни характеристического уравнения, то общее решение заданного соотношения имеет вид:

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_k\lambda_k^n,$$

где $C_i = \text{const}$;

3) если λ_i– корень кратности r_i, $i = 1, 2, \ldots, s,$ то общее решение имеет вид:

$$a_n = \sum_{i=1}^{s}\left(C_{i1} + C_{i2}n + C_{i3}n^2 + \cdots + C_{ir_i}n^{r_i-1}\right)\lambda_i^n,$$

где $C_{ij} = \text{const}$.

Пример 13. Найти решение рекуррентного соотношения $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$, если $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 9.$

Решение

Решение будем искать в виде $a_n = \lambda^n$. Подставив в исходное соотношение, получим:

$$\lambda^n = 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-3}.$$

После деления на λ^{n-3} получим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$, причем $\lambda = 2$ – двукратный корень. Согласно теореме 1, простому корню $\lambda_1 = -1$ соответствует решение $C_1(-1)^n$, а двукратному корню $\lambda_2 = 2$ – решение $2^n(C_2 + C_3 n)$.

Окончательно, общее решение заданного отношения имеет вид:

$$a_n = C_1(-1)^n + 2^n(C_2 + C_3 n).$$

Найдем постоянные $C_1,\ C_2,\ C_3$, используя начальные условия $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 9$:

$$1 = a_0 = C_1 + 2^0(C_2 + C_3 \cdot 0),$$
$$1 = a_1 = -C_1 + 2(C_2 + C_3),$$
$$9 = a_2 = C_1 + 2^2(C_2 + C_3 \cdot 2).$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 1, \\ C_1 + 4C_2 + 8C_3 = 9, \end{cases}$$

получим $C_1 = 1,\ C_2 = 0,\ C_3 = 1$. После подстановки найденных значений C_i в общее решение получаем:

$$a_n = (-1)^n + 2^n \cdot n.$$

Ответ: $a_n = (-1)^n + 2^n \cdot n$.

Для нахождения решения линейного неоднородного рекуррентного отношения с постоянными коэффициентами пользуются нижеприведенной теоремой.

Теорема 2. Общее решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения $a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \cdots + p_k a_{n-k} = f(n)$ есть сумма общего решения a_n^0 соответствующего ему однородного соотношения $a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \cdots + p_k a_{n-k} = 0$ и некоторого частного решения $a_n^{\text{н}}$ исходного неоднородного соотношения:

$$a_n = a_n^0 + a_n^{\text{н}}.$$

Пример 14. Найти общее решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3^n(4n-3)$.

Решение

Решим однородное соотношение $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_1 = 2.$$

Общее решение однородного рекуррентного соотношения запишется в виде:

$$a_n^0 = C_1(-1)^n + C_2 2^n.$$

Так как функция $f(n)$ в правой части исходного рекуррентного соотношения имеет вид $f(n) = 3^n(4n-3)$, и число 3 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $a_n^{\text{н}}$ будем искать в виде $a_n^{\text{н}} = 3^n(An+B)$ с неопределенными коэффициентами A и B. Подставим его в исходное неоднородное соотношение:

$$3^n(An+B) = 3^{n-1}(A(n-1)+B) + 2\cdot 3^{n-2}(A(n-2)+B) + 3^n(4n+1).$$

Разделив обе части равенства на 3^{n-2}, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$4An + 4B - 7A = 36n + 9.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях n, придем к системе

$$\begin{cases} 4A = 36, \\ 4B - 7A = 9. \end{cases}$$

Отсюда найдем $A = 9$, $B = 18$.

Тогда

$$a_n^{\text{н}} = 3^n (9n + 18) = 3^{n+2} (n + 2),$$

а значит, согласно теореме 2, общее решение заданного неоднородного рекуррентного соотношения примет вид:

$$a_n = a_n^0 + a_n^{\text{н}} = C_1(-1)^n + C_2 2^n + 3^{n+2}(n + 2).$$

Ответ: $a_n = C_1(-1)^n + C_2 2^n + 3^{n+2}(n + 2)$.

Задания к главе 1

1. Перечислите элементы множества $A = \{x \mid x - \textit{целое} \text{ и } x^2 < 30\}$.
2. Задайте разными способами множество B – множество четных чисел.
3. Опишите с помощью характеристического свойства множества:

   а) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$; б) $B = \{2, 5, 8, 11, 14, ...\}$;

   в) $C = \{1, 2, 6, 24, 120, ...\}$; г) $D = \{1, 5, 25, 125, ...\}$.

4. Укажите множество корней уравнения $x^4 - 16 = 0$ для следующих универсальных множеств:

   а) $U = \boldsymbol{Q}$; б) $U = \boldsymbol{N}$; в) $U = \boldsymbol{Z}$; г) $U = \boldsymbol{R}$; д) $U = \boldsymbol{C}$.

5. Докажите равносильности:

   а) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

   в) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B$; г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

6. Какие из приведенных включений справедливы и почему:

   а) $a \in \{2, x, a\}$; б) $2 \in \{1, \{2, 3, 4\}, 5\}$;

   в) $5 \subset \{1, 3, 5\}$; г) $x \in \{1, \sin x\}$;

   д) $\{x, y\} \subset \{a, \{x, y\}, b\}$; е) $\{5\} \subset \{1, \{3, 4\}, 5\}$.

7. Пусть $U=\{$множество всех животных$\}$, $M=\{$множество всех млекопитающих$\}$, $D=\{$множество всех собак$\}$, $C=\{$множество всех кошек$\}$, $L=\{$множество всех овчарок$\}$. Проверьте истинность утверждений:

а) $L \subset D \subset M \subset U$; б) $C \subset D \subset M \subset U$;

в) $C \cap D = \varnothing$; г) $D \setminus L \subset C$;

д) $U \setminus M \subset D$; е) $D \setminus C = D$.

8. Запишите булеан множества $P(A)$:

а) $A=\{1, 3, 4\}$; $A=\{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$.

9. Пусть $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $Z=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Определите следующие множества:

а) $X \cup Z$; б) $X \cap Y$;

в) $X \cap (Y \cup Z)$; г) $(X \cap Y) \cup Z$;

д) $\overline{X \cap Y}$; е) $\overline{X} \cap \overline{Y}$;

ж) $X \setminus Y$; з) $X \oplus Y$.

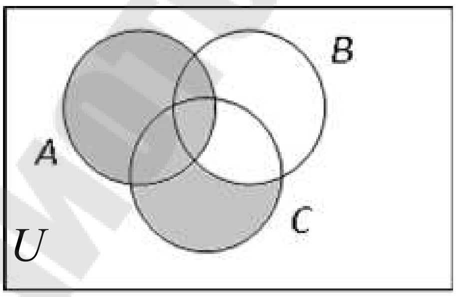
10. Изобразите на диаграмме Эйлера–Венна следующие множества:

а) $A \cup (B \cap C)$; б) $A \cap (B \cup C)$;

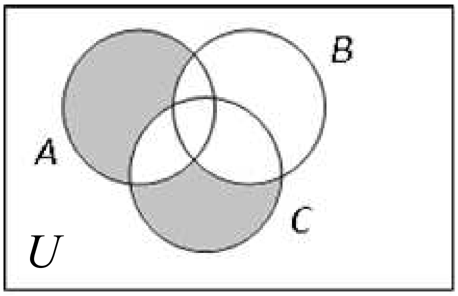
в) $(A \setminus B) \cap \overline{C}$; г) $A \setminus (B \cup \overline{C})$;

д) $A \oplus B \oplus C$; е) $(A \oplus \overline{B}) \setminus C$.

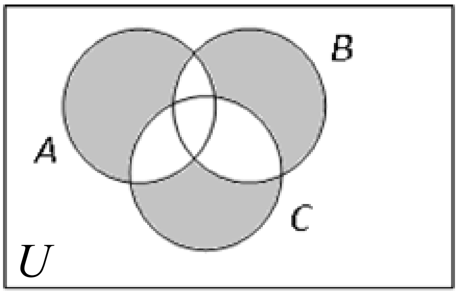
11. Опишите множества, соответствующие закрашенной части диаграммы Эйлера–Венна:



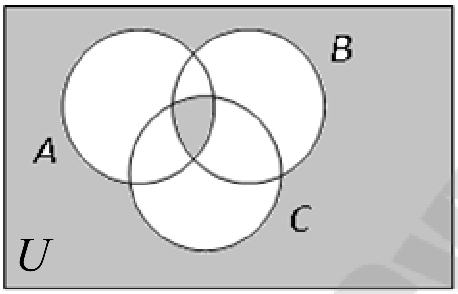
а)



б)



в)



г)

12. Что можно сказать о множествах A и B, если известно, что:

а) $A \cup B = A$;

б) $A \cap B = A$;

в) $A \setminus B = A$;

г) $A \cap B = B \cap A$;

д) $A \setminus B = B \setminus A$;

е) $\overline{A} = \varnothing$?

13. Можно ли узнать, сколько человек работает в одном из отделов конструкторского бюро, если известно, что в нем: а) 16 мужчин и 14 женщин; б) 16 мужчин и 22 члена профсоюза?
14. В опросе на тему «Любимый литературный жанр» приняло участие 200 человек. Оказалось, что 52 респондента предпочитают стихи, 100 – романы, 135 – детективы. При этом стихи и романы нравятся 20 человекам из опрошенных, стихи и детективы – 40 человекам, романы и детективы – 50, все три литературных жанра – 9 опрошенным. Сколько человек читают: а) только стихи; б) только романы; в) детективы либо стихи, но только не романы?
15. 90 % студентов обожают дискретную математику, 80 % – души не чают в математическом анализе и 60 % любят линейную алгебру и аналитическую геометрию. Подсчитайте минимальное количества студентов (в процентах), которые любят одновременно все три предмета.
16. Из 28 учеников класса группы 20 занимается прототипированием, а 15 – робототехникой. Каким может быть число школьников: а) занимающихся и робототехникой, и прототипированием; б) занимающихся хотя бы одним предметом?
17. Экзамены по анатомии, физиологии и сестринскому делу сдавали 75 студентов медицинского института. Экзамен по сестринскому делу успешно сдали 53 человека, по анатомии – 47, по физиологии – 59. По сестринскому делу или анатомии сдали экзамены 65 человек, по физиологии или сестринскому делу – 68, по физио-

логии или анатомии – 66, а пятеро студентов не сдали ни одного экзамена. Сколько студентов сдали все три экзамена?

18. На физической олимпиаде школьникам было предложено три задачи: по механике, термодинамике и оптике. С задачей по механике справились 20 человек, по оптике – 18, по термодинамике – 18, по механике и оптике – 7, по механике и термодинамике – 8, по оптике и термодинамике – 9. Известно также, что трое из 40 участников олимпиады не решили ни одной задачи. Сколько учеников решили все три задачи? Сколько решили ровно две задачи?
19. Сто человек приняли участие в студенческой олимпиаде по теоретической механике, 50 человек – в олимпиаде по сопромату, 48 – в олимпиаде по физике. Оказалось, что в двух олимпиадах участвовали в 2 раза меньше студентов, чем в одной, а в трех – в 3 меньше, чем в одной. Сколько всего студентов участвовало в этих олимпиадах?
20. Пусть A – подмножество натуральных чисел, каждый элемент которого делится на 2, или на 3, или на 5. Известно, что 50 из этих чисел делятся на 2; 54 числа делятся на 3; 45 чисел делятся на 5; 32 числа кратны 6; 23 числа кратны 10; 28 чисел кратны 15 и 13 чисел кратны 30. Сколько элементов содержит множество A?
21. Сорока ученикам 7 «Б» класса на каникулы задали прочитать стихи Блока, Есенина и Маяковского. После каникул выяснилось, что Блока прочитали 25 учеников, Есенина – 22, Маяковского – также 22 ученика. Блока или Есенина прочли 33 ученика, Блока или Маяковского – 32, Есенина или Маяковского – 31, все три книги прочли 10 человек. Сколько учащихся прочли стихи только одного поэта? Сколько не читали ни одного из этих авторов?
22. В течение зимних каникул каждый из студентов группы был в кино ровно два раза. Фильмы «Человек-паук», «Матрица» и «Елки» посмотрели соответственно 25, 12 и 23 студента. Сколько студентов в группе? Сколько человек видело фильмы «Человек-паук» и «Матрица»?
23. В группе студентов изучаются три языка. Выяснилось, что из 100 студентов арабский язык изучают 26 человек, китайский – 48, китайский и хинди – 8, только арабский – 18, арабский, но не хинди – 23, арабский и китайский – 8, не изучают никакого языка – 24. Сколько студентов изучают хинди? Сколько человек изучают арабский и хинди? Сколько человек изучают китайский язык, в том и только в том случае, если они не изучают хинди?

24. Изобразите на координатной плоскости декартово произведение множеств $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$;   б) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [3, 5]$;

в) $A = [1, 3]$, $B = [3, 5]$;   г) $A = \boldsymbol{R}$, $B = [3, 5]$;

д) $A = \boldsymbol{R}$, $B = \boldsymbol{R}$.

25. На множестве $A = \{1, 2, 3\}$ задайте различными способами отношения R_1= «меньше или равно» и R_2= «равно».
26. Выпишите явно отношение $R \equiv x \mid y$= «x делит y», определенное на множестве $C = \{2, 3, 6, 10, 15\}$. Постройте граф и матрицу этого отношения. Определите, является ли оно рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, транзитивным.
27. На множестве $A = \{1, 2, 3\}$ заданы бинарные отношения $R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$ и $S = \{(1,1), (1,3), (2,1), (3,3)\}$. Найдите $R \cap S$, $R \cup S$, $R^{-1} \cap S$, композиции отношений R и S, S и R.
28. Для отношения $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2)\}$ найдите R^{-1}, композиции отношений R и R, R^{-1} и R. Запишите матрицы и графы этих отношений, определите их типы.
29. Установите, являются ли отношения S и R рефлексивными, симметричными, антисимметричными и транзитивными, найдите $R \cap S$, $R \cup S$, композиции отношений R и S, S и R, если $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$, $R = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$. Запишите матрицы и графы этих отношений.
30. Рассмотрим следующие отношения: A_1 – быть отцом, A_2 – быть матерью, A_3 – быть ребенком, A_4 – быть братом, A_5 – быть сестрой, A_6 – быть мужем, A_7 – быть женой. Выразите с их помощью отношения:

а) быть родителем (B);   б) быть внуком (C);

в) быть невесткой (D);   г) быть тещей (E);

д) быть свекровью (F);   е) быть дедушкой (L);

ж) быть тетей (M);   з) быть племянником (N).

31. Установите, является ли отношение $R=$ «x взаимно просто с y», определенное на множестве $A=\{3,4,6,8,9\}$, рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным. Задайте его различными способами. Опишите отношение $R \circ R$.
32. На множестве дробей $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right\}$ задано отношение равенства. Постройте граф и матрицу этого отношения. Какими свойствами обладает это отношение?
33. Отношение $T=$ «иметь одно и то же число делителей» задано на множестве $\{1,2,4,6,7,8,10,11\}$. Покажите, что T – отношение эквивалентности, и запишите все классы эквивалентности.
34. Установите, является ли эквивалентным отношение $R=$ «x знаком с y», определенное на множестве студентов университета.
35. На множестве $A=\{3,6,9,12,15\}$ задано отношение «x делитель y». Покажите, что это отношение упорядочивает множество A. Чем этот порядок отличается от того, который устанавливается во множестве A при помощи отношения «больше»?
36. На множестве $A=\{2,3,4,5,8,9,10,15\}$ задано отношение порядка $R \equiv x \mid y=$ «x делит y». Постройте диаграмму Хассе. Укажите наименьший, наибольший, максимальный и минимальный элементы.
37. На булеане множества $A=\{1,3,6,9\}$ частичный порядок может быть установлен с помощью отношения включения подмножеств $\subseteq$. Постройте соответствующую диаграмму Хассе. Укажите наибольший и наименьший элементы.
38. На множестве $B=\{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24\}$ задано отношение порядка $R=$ «x кратно y». Постройте диаграмму Хассе. Укажите наименьший, наибольший, максимальный и минимальный элементы.
39. Выясните, является ли инъективным, сюръективным и биективным отображение $f: X \to Y$, задаваемое формулой $f(x)=x^2$, если:
   а) $X=\boldsymbol{R}$, $Y=\boldsymbol{R}$; б) $X=\boldsymbol{R}$, $Y=\boldsymbol{R}_+$;
   в) $X=\boldsymbol{R}_+$, $Y=\boldsymbol{R}_+$; г) $X=\boldsymbol{N}$, $Y=\boldsymbol{N}$.
40. Выясните, является ли инъективным, сюръективным и биективным отображение $f: X \to Y$, задаваемое формулой $f(x)=\operatorname{arctg} x$, если:
   а) $X=\boldsymbol{R}$, $Y=\boldsymbol{R}$; б) $X=\boldsymbol{R}$, $Y=\boldsymbol{R}_+$;
   в) $X=\boldsymbol{R}$, $Y=\left[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right]$; г) $X=\boldsymbol{R}$, $Y=\left(-\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right)$.

41. Выясните, является ли инъективным, сюръективным и биективным отображение $f : X \to Y$, задаваемое формулой $f(x) = |\ln x|$, если:

а) $X = \boldsymbol{R}_+$, $Y = \boldsymbol{R}$; б) $X = \boldsymbol{R}_+$, $Y = \boldsymbol{R}_+$; в) $X = (1;+\infty)$, $Y = \boldsymbol{R}_+$.

42. Вычислите:

а) $\dfrac{A_8^3 + A_7^4}{A_6^3}$; б) $\dfrac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$; в) $\dfrac{P_6 - P_4}{P_3}$; г) $\dfrac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$.

43. Проверьте равенства:

а) $C_{15}^{10} = \dfrac{A_{15}^5}{P_5}$; б) $C_6^2 = \dfrac{A_m^{m-8}}{P_{m-8}}$; в) $P_3 \cdot C_n^2 = C_n^{n-2} \cdot C_4^2$.

44. Решите уравнения:

а) $A_{x+1}^2 = 30$; б) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$;

в) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$; г) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$;

д) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; е) $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$.

45. Решите следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$ б) $\begin{cases} A_{2n}^{3x} = 8A_{2n}^{3x-1}, \\ C_{2n}^{3x} = \dfrac{8}{9}C_{2n}^{3x-1}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} A_x^y = 10A_x^{y-1}, \\ C_x^y = \dfrac{5}{3}C_x^{y-1}. \end{cases}$

46. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из десяти цифр? Только из нечетных цифр? Из нечетных цифр при условии, что цифры не повторяются? Сколько из них начинаются с цифры 1?

47. В классе изучается 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

48. Сколько существует вариантов выбора пяти карт из стандартной колоды, содержащей 36 карт?

49. В аквариуме плавают 5 золотых рыбок, 7 скалярий и 12 сомиков. Сколько существует способов выловить 2 золотых рыбки, 3 скалярии и 5 сомиков?

50. Сколько существует матриц размерности 5×4, составленных из неотрицательных цифр?
51. Сколько строк длины девять содержат ровно 5 единиц и 4 нуля?
52. Сколькими способами можно разложить 20 различных подарков по четырем коробкам, так, чтобы в каждой коробке оказалось по 5 подарков?
53. В кондитерской имеются 5 разных видов пирожных. Сколько можно составить различных наборов из 12 пирожных?
54. Сколько существует отображений из пятиэлементного множества в трехэлементное?
55. Сколько существует способов создать комиссию в составе шести человек, выбираемых из 7 мужчин и 6 женщин, если:

    а) отсутствуют какие-либо ограничения;

    б) в комиссию должна входить хотя бы одна женщина;

    в) в комиссию должны входить хотя бы одна женщина и хотя бы один мужчина;

    г) должно быть поровну мужчин и женщин;

    д) женщин должно быть больше, чем мужчин?
56. Сколько существует способов избрания директора школы, завуча по учебной работе, завуча по воспитательной работе и педагога-организатора в школьном комитете по самоуправлению, состоящем из 6 одиннадцатиклассников, 8 десятиклассников, 10 учеников девятого класса и 15 восьмиклассников, если:

    а) какие-либо ограничения отсутствуют;

    б) на должность директора может быть избран только одиннадцатиклассник;

    в) ученик одиннадцатого класса не может быть завучем;

    г) восьмиклассники могут избираться только на должность педагога-организатора?
57. В группе учатся 25 студентов. Профессор Удивляев решил поставить на экзамене одну десятку, две девятки, две оценки «8», по пять оценок «5» и «6», шесть оценок «4», три двойки и одну тройку. Сколькими способами он может поставить оценки студентам?
58. Сколько перестановок из букв *ABCDEFG* содержат:

    а) строку *BCD*;

    б) строку *CFGA*;

    в) строки *BA* и *CF*;

    г) строки *ABC* и *DE*;

    д) строки *ABC* и *CDE*.

59. Имеется 8 различных книг для внеклассного чтения для первоклассников, 12 – для второклассников, 15 – для третьеклассников. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, если:
а) не существует никаких ограничений;
б) все книги для одного и того же класса должны стоять вместе?
60. Сколько диагоналей имеет выпуклый десятиугольник?
61. Найдите:
а) третий член разложения $(x+2)^6$;
б) четвертый член разложения $\left(x+\sqrt{y}\right)^{12}$;
в) восьмой член разложения $\left(a^3+b^2\right)^{13}$;
г) средний член разложения $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^{8}$;
д) средний член разложения $\left(a\sqrt{a}-1\right)^{14}$;
е) два средних члена разложения $\left(\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}\right)^{13}$.
62. Известно, что третий член разложения бинома $\left(x+x^{\lg x}\right)^5$ равен 1000000. Найдите x.
63. Найдите тот член разложения бинома $\left(z\sqrt{z}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m$, который после упрощения содержит z^5, если сумма биномиальных коэффициентов этого разложения равна 128.
64. Найдите член разложения $\left(a^2+\dfrac{1}{a}\right)^m$, не содержащий a, если известно, что сумма первого, второго и третьего коэффициентов равна 46.
65. Запишите разложение $(a+b)^n$, если:
а) $a=b=1$; б) $a=1,\ b=-1$.
66. Получите формулу n-го члена последовательности, если задано соотношение $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$ и известны $a_1=1,\ a_2=3$.
67. Получите формулу n-го члена последовательности, задаваемой соотношением $a_{n+3}=4a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n$, если $a_0=1,\ a_1=3,\ a_2=6$.
68. Решите линейные неоднородные рекуррентные соотношения:
а) $a_n-4a_{n-1}+3a_{n-2}=8\cdot 5^n$, $a_0=20,\ a_1=100$;
б) $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=n+4$, $a_0=8,\ a_1=1$;

в) $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3^n(4n+8)$, г) $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2^n$,

$a_0 = 3$, $a_1 = 6$; $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{3}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие способы задания множеств вы знаете?
2. Какое множество называется пустым? универсальным?
3. Что называется мощностью конечного множества?
4. Что такое булеан множества? Сколько элементов содержит булеан конечного множества порядка *n*?
5. Как строится диаграмма Эйлера–Венна?
6. Как определяется и изображается на диаграмме Эйлера–Венна объединение множеств? пересечение? разность? симметрическая разность?
7. Как определяется и изображается на диаграмме Эйлера–Венна дополнение множества?
8. Сформулируйте свойства коммутативности и ассоциативности объединения множеств.
9. Сформулируйте свойства коммутативности и ассоциативности пересечения множеств.
10. Сформулируйте свойство дистрибутивности объединения и пересечения множеств.
11. Как формулируются законы де Моргана?
12. Чему равна мощность объединения двух конечных множеств? трех конечных множеств?
13. Как определяется прямое (декартово) произведение множеств?
14. Что такое бинарное отношение?
15. Как определяются матрица и граф бинарного отношения?
16. Как определяется обратное бинарное отношение?
17. Как определяется композиция бинарных отношений?
18. Какие бинарные отношения называют рефлексивными? Приведите примеры таких отношений.
19. Какие бинарные отношения называют симметричными, антисимметричными? Приведите примеры таких отношений.
20. Какие бинарные отношения называют транзитивными? Приведите примеры таких отношений.
21. Как определяется отношение эквивалентности?
22. Как определяется отношение частичного порядка?

23. Какой элемент частично упорядоченного множества называется наибольшим (наименьшим)?

24. Какой элемент частично упорядоченного множества называется максимальным (минимальным)?

25. Как строится диаграмма Хассе?

26. Что такое сочетание? перестановка? размещение?

27. Чему равно число упорядоченных выборок с повторениями? без повторений?

28. Чему равно число перестановок из n элементов?

29. Чему равно число неупорядоченных выборок (сочетаний) без повторений? с повторениями?

30. Чему равно число различных разбиений n-множества A на k подмножеств с фиксированным числом элементов $n_1, n_2, \ldots, n_k$?

31. Что называется отображением?

32. Какое отображение называется сюръективным? инъективным? биективным? Приведите примеры таких отображений.

33. Запишите разложение бинома Ньютона.

34. Какие свойства биномиальных коэффициентов вы знаете?

35. Что называется рекуррентным соотношением?

36. Дайте определение линейного однородного (неоднородного) рекуррентного соотношения k-го порядка.

37. Как получить характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения k-го порядка?

38. Как найти общее решение линейного однородного рекуррентного отношения k-го порядка?

39. Как найти общее решение линейного неоднородного рекуррентного отношения k-го порядка?

ГЛАВА 2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ПРЕДИКАТОВ

2.1. Высказывания. Простейшие логические операции

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором вполне определенно можно сказать истинно оно или ложно.

Например:

• «$2 \times 2 = 5$» – ложное высказывание;

• «$21 < 23$» – истинное высказывание;

• «Который час?» – высказыванием не является;

• «Некий город является столицей некой страны» – высказыванием не является.

Следовательно, высказывание – величина, которая может принимать только одно из двух значений: «истина» или «ложь», которые сокращенно обозначают «*И*» или «*Л*» (1 или 0, «*T*» или «*F*») соответственно.

Высказывания обычно обозначают буквами латинского алфавита – большими или маленькими, с индексами или без.

Различают простые и сложные (составные) высказывания. Сложные высказывания получают из простых с помощью логических операций. Рассмотрим основные из них.

Отрицанием высказывания x называется высказывание истинное тогда и только тогда, когда x – ложно.

Обозначение: $\bar{x}, \neg x$.

Отрицание есть операция, которая соответствует союзу «не».

Конъюнкцией высказываний x и y называется высказывание истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначение: $x \wedge y$, $x \& y$.

Конъюнкция есть операция, которая соответствует союзу «и».

Дизъюнкцией высказываний x и y называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания.

Обозначение: $x \vee y$.

Дизъюнкция есть операция, которая соответствует союзу «или».

Импликацией высказываний x и y называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда x – истина, а y – ложно. Другими словами, импликация утверждает: из лжи может следовать все, что угодно, из истины всегда следует только истина.

Обозначение: $x \Rightarrow y$.

Импликация есть операция, которая соответствует связке «если …, то…». Высказывание x называется посылкой, а y – следствием (заключением).

Эквиваленцией высказываний x и y называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда x и y принимают одинаковые значения.

Обозначение: $x \sim y$.

Эквиваленция есть операция, которая соответствует связке «x тогда и только тогда, когда y», «x является необходимым и достаточным для y».

Новые высказывания могут быть образованы при помощи нескольких логических операций и составлять формулы. Например,

- ***штрих Шеффера***, или антиконъюнкция:
  $x \mid y = \overline{x \wedge y}$
- ***стрелка Пирса***, или антидизъюнкция:
  $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$
- ***сумма по модулю два***, или антиэквиваленция:
  $x \oplus y = \overline{x \sim y}$.

Удобной формой представления логических операций являются таблицы истинности:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \sim y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Для упрощения формул принято опускать внешние скобки, а также все те скобки, которые становятся необязательными, если считать, что логические операции выполняются в следующем порядке: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sim$.

Пример 15. Вычислить истинностное значение формулы $(\overline{P} \sim Q \vee R) \Rightarrow S \wedge Q$ на наборе $(P, Q, R, S) = (1, 1, 0, 1)$.

Решение

Последовательность выполнения действий будет следующая:

1) $Q \vee R = 1 \vee 0 = 1$;

2) $\overline{P} \sim Q \vee R = \overline{1} \sim 1 = 0 \sim 1 = 0$;

3) $S \wedge Q = 1 \wedge 1 = 1$;

4) $(\overline{P} \sim Q \vee R) \Rightarrow S \wedge Q = 0 \Rightarrow 1 = 1$.

Ответ: 1.

Замечание. Часто требуется вычислить значение формулы на всех возможных интерпретациях переменных. Пусть формула зависит от n переменных. Так как каждая переменная принимает одно из двух значений (1 или 0), то число различных возможных наборов равно 2^n. Для систематической записи таблиц истинности удобно использовать метод «последовательного половинного деления столбцов». Он заключается в следующем: столбец первой переменной делят пополам, верхнюю половину заполняют нулями, нижнюю – единицами, затем каждую половину столбца второй переменной делят пополам и поступают аналогично, и т. д. Такой порядок записи переменных называется *лексикографическим*.

2.2. Правила преобразования формул

Пусть X и Y – две формулы, зависящие от одного и того же набора высказываемых переменных. Формулы X и Y называются равносильными, если на любом наборе истинностных значений входящих в них переменных они принимают равные значения.

Обозначение: $X \equiv Y$.

Пример 16. Проверить равносильность формул:

$A = x \Rightarrow y$, $B = x \wedge \overline{y} \Rightarrow (\overline{x} \vee y)$.

Решение

Составим таблицы истинности для формул A и B.

x	y	$A = x \Rightarrow y$	$\overline{y}$	$x \wedge \overline{y}$	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$B = x \wedge \overline{y} \Rightarrow (\overline{x} \vee y)$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1

Так как итоговые столбцы формул A и B совпадают, то формулы равносильны.

Основные равносильности

1. Закон идемпотентности: $x \wedge x \equiv x$, $x \vee x \equiv x$.
2. Закон коммутативности: $x \wedge y \equiv y \wedge x$, $x \vee y \equiv y \vee x$.
3. Закон ассоциативности: $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$,
   $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$.
4. Закон дистрибутивности: $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
   $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
5. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} \equiv x$.
6. Закон поглощения: $x \wedge (x \vee y) \equiv x$, $x \vee (x \wedge y) \equiv x$.
7. Законы де Моргана: $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$.
8. Закон склеивания (расщепления): $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \equiv x$,
   $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \equiv x$.
9. Действия с логическими константами 0 и 1:

$$x \vee \overline{x} \equiv 1, \qquad x \vee 0 \equiv x, \qquad x \vee 1 \equiv 1$$

$$x \wedge \overline{x} \equiv 0, \qquad x \wedge 0 \equiv 0, \qquad x \wedge 1 \equiv x.$$

Следующие равносильности показывают, как одни логические операции могут быть выражены через другие.

10. $x \sim y \equiv (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \equiv (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) \equiv (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x)$.

11. $x \Rightarrow y \equiv \overline{x} \vee y \equiv \overline{x \wedge \overline{y}}$.

Справедливость вышеприведенных основных равносильностей легко проверить, составив таблицы истинности.

Пример 17. Упростите формулу $(x \vee y) \wedge (\overline{z} \Rightarrow x) \wedge (z \vee \overline{x})$, используя правила равносильностей.

Решение

$$(x \vee y) \wedge (\overline{z} \Rightarrow x) \wedge (z \vee \overline{x}) \overset{11}{\equiv} (x \vee y) \wedge (\overline{\overline{z}} \vee x) \wedge (z \vee \overline{x}) \overset{5}{\equiv}$$

$$\equiv (x \vee y) \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee \overline{x}) \overset{8}{\equiv} (x \vee y) \wedge z.$$

Пример 18. Решите уравнение

$$((P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (\overline{Q} \Rightarrow R) \Rightarrow \overline{Q} = 0.$$

Решение

Решим уравнение двумя способами: с помощью свойств логических операций и с помощью таблицы истинности.

Первый способ. По определению импликации имеем:

$$\begin{cases} \overline{Q} = 0, \\ (P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (\overline{Q} \Rightarrow R) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = 1, \\ (P \Rightarrow 1 \wedge R) \Rightarrow (0 \Rightarrow R) = 1. \end{cases}$$

Так как $1 \wedge R \equiv R$, $0 \Rightarrow R \equiv 1$ и $(P \Rightarrow R) \Rightarrow 1 = 1$ выполняется для любых P и R из множества $\{0, 1\}$, следовательно, решением данного уравнения будут следующие наборы:

$$(P, Q, R) = \{(1,1,1), (1,1,0), (0,1,1), (0,1,0)\}.$$

Второй способ. Составим таблицу истинности формулы, находящейся в левой части уравнения.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$A = P \Rightarrow Q \wedge R$	$\overline{Q}$	$B = \overline{Q} \Rightarrow R$	$C = A \Rightarrow B$	$C \Rightarrow \overline{Q}$
0	0	0	0	1	1	0	0	**1**
0	0	1	0	1	1	1	1	**1**
0	1	0	0	1	0	1	1	**0**
0	1	1	1	1	0	1	1	**0**
1	0	0	0	0	1	0	1	**1**
1	0	1	0	0	1	1	1	**1**
1	1	0	0	1	0	1	1	**0**
1	1	1	1	1	0	1	1	**0**

Так как мы решаем уравнение, в правой части которого стоит ноль, то выберем только те наборы значений переменных P, Q и R, которым соответствует ноль в последнем результирующем столбце. Получим:

$$(P, Q, R) = \{(0,1,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

Ответ: $(0,1,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1)$.

Формула логики высказываний называется:

• ***общезначимой*** (*тождественно истинной, тавтологией*), если на всех наборах своих переменных она принимает значение «истина»;

• ***невыполнимой*** (*тождественно ложной, противоречием, контрадикцией*), если на всех наборах своих переменных она принимает значение «ложь»;

• ***нейтральной***, если она не является ни тавтологией, ни противоречием;

• ***выполнимой***, если она является тавтологией или нейтральной;

• ***необщезначимой***, если она невыполнимая или нейтральная.

Пример 19. Определите, является ли формула

$$((A \sim B) \Rightarrow \overline{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow A \wedge B)$$

тавтологией, противоречием, нейтральной, выполнимой, необщезначимой.

Решение

Составим таблицу истинности для данной формулы.

$((A$	$\sim$	$B)$	$\Rightarrow$	$\neg$	$A)$	$\Rightarrow$	$(A$	$\Rightarrow$	A	$\wedge$	$B)$
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Так как в выделенном столбце присутствуют и единицы, и нули, то данная формула является нейтральной, выполнимой и необщезначимой.

Пример 20. Проанализируйте рассуждение: «Если число составное, то оно натуральное и больше единицы. Если число натуральное и больше единицы, то оно имеет хотя бы один простой делитель. Значит, если число составное, то оно имеет хотя бы один простой делитель».

Решение

Обозначим: A – «число составное», B – «число натуральное», C – «число больше единицы», D – «число имеет хотя бы один простой делитель». Структура рассуждения:

$$A \Rightarrow B \wedge C,\ B \wedge C \Rightarrow D,\ A \mid = D.$$

Предположим, что данное рассуждение неверно, т. е. $A \Rightarrow B \wedge C,\ B \wedge C \Rightarrow D,\ A \mid \neq D.$ Тогда хотя бы на одном наборе значений (A, B, C, D) должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} A \Rightarrow B \wedge C = 1, \\ B \wedge C \Rightarrow D = 1, \\ A = 1, \\ D = 0. \end{cases}$$

По определению импликации: из первого уравнения получаем $B \wedge C = 1$, а из второго – $B \wedge C = 0$. Таким образом, система условий не имеет решения, значит, предположение неверно. Вывод: исходное рассуждение верное.

Рассмотрим еще один пример применения логики высказываний для решения задач.

Пример 21. Команды четырех факультетов – ФАИС, ЭФ, МТФ и МСФ – участвовали в конкурсе «А ну-ка первокурсник!». На вопрос о распределении мест были получены следующие ответы: 1) ЭФ – первое место, МСФ – второе; 2) МТФ – второе, ФАИС – четвертое; 3) ЭФ – второе, ФАИС – третье. Как на самом деле распределились места, если ровно одно из утверждений в каждом ответе – ложь?

Решение

Введем обозначения:

$Э_1 =$ «ЭФ занял первое место»,

$Э_2 =$ «ЭФ занял второе место»,

$C_2 =$ «МСФ занял второе место»,

$T_2 =$ «МТФ занял второе место»,

$Ф_3 =$ «ФАИС занял третье место»,

$Ф_4 =$ «ФАИС занял четвертое место».

Тогда высказывания можно записать следующим образом:

$$1)\ Э_1 \vee C_2;\ 2)\ T_2 \vee Ф_4;\ 3)\ Э_2 \vee Ф_3.$$

Так как все дизъюнкции истинны, то истинной будет и конъюнкция этих дизъюнкций, т. е.

$$(Э_1 \vee C_2) \wedge (T_2 \vee Ф_4) \wedge (Э_2 \vee Ф_3) = 1.$$

Раскроем в последней формуле скобки:

$$(Э_1 \vee C_2)(T_2Э_2 \vee Ф_4Э_2 \vee T_2Ф_3 \vee Ф_4Ф_3) = 1.$$

Так как $T_2Э_2 = 0$ и $Ф_4Ф_3 = 0$ (второе место не могло достаться сразу двум факультетам, а ФАИС не мог занять одновременно и третье, и четвертое места), то формула примет вид:

$$(Э_1 \vee C_2)(Ф_4Э_2 \vee T_2Ф_3) = 1,$$

откуда

$$1 = Э_1Ф_4Э_2 \vee C_2Ф_4Э_2 \vee C_2T_2Ф_3 \vee Э_1T_2Ф_4 = 0 \vee 0 \vee 0 \vee Э_1T_2Ф_4,$$

а значит, ЭФ занял первое место, МТФ – второе, МСФ – третье, а ФАИС – четвертое.

2.3. Предикаты и кванторы

Логика высказываний применяется к простым утверждениям, которые являются либо истинными, либо ложными. Но утверждения, содержащие одну и более переменных, могут быть верными при некоторых значениях переменных и ложными при других.

Предикат – это утверждение, содержащее переменные величины и принимающее значение истины или лжи в зависимости от значений переменных. Предикат называют n-местным, если в утверждение входит n переменных.

Например, выражение «$x + 2 = 9$» является одноместным предикатом, поскольку оно истинно при $x = 7$ и ложно в любом другом случае. Утверждение «некий город стоит на некой реке» можно интерпретировать как «город *X* стоит на реке *Y*». Это пример двухместного предиката, так как содержит две переменные.

Предикаты обозначаются прописными буквами латинского алфавита с указанием всех переменных. Множество всех значений переменной, при которых предикат представляет собой истинное высказывание, называется его областью истинности.

Пример 22. Для предиката $P(x) =$ «$x -$ *четное число*» определите истинностные значения $P(1)$ и $P(2)$.

Решение

При подстановке $x = 1$ получаем, очевидно, ложное высказывание $P(1) =$ «1– четное число», следовательно, $P(1) = 0$, или $P(1) =$«Л». Высказывание $P(2) =$ «2 – четное число» является истинным, значит, $P(2) = 1$.

К предикатам, определенным на одном и том же множестве, можно применять операции алгебры высказываний: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sim$

и получать новые предикаты, области истинности которых можно изображать на диаграмме Венна. Также для предикатов справедливы основные законы булевой алгебры.

Пример 23. Даны предикаты: $p(x)=\{x^2 \ge 25\}$, $q(x)=\{x \le 1\}$, $r(x)=\{x>2\}$, где $x \in \boldsymbol{R}$. Оцените истинность каждого из следующих выражений для заданного x:

1) $p(x) \sim q(x) \wedge r(x)$, $x=1$;

2) $r(x) \Rightarrow \neg\, p(x)$, $x=5$.

Решение

1. Так как $p(1)=0$, $q(1)=1$, $r(1)=0$, то данная формула принимает значение: $0 \sim 1 \wedge 0 = 1$, т. е. предикат $p(x) \sim q(x) \wedge r(x)$ истинный для $x=1$.

2. Так как $r(5)=1$, $p(5)=1$, то формула принимает значение: $1 \Rightarrow \neg 1 = 0$, т. е. предикат $r(x) \Rightarrow \neg\, p(x)$ ложный для $x=5$.

Пример 24. Укажите область истинности предиката $q(x) \wedge r(x)$, если $q(x)=\{x^2-2x \le 0\}$, $r(x)=\{x \le 0\}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Решение

Область истинности предиката $q(x)$ представляет собой множество решений неравенства $x^2-2x \le 0$, т. е. отрезок $[0;\,2]$.

Область истинности предиката $r(x)$ представляет собой множество решений неравенства $x \le 0$, т. е. промежуток $(-\infty;\,0]$.

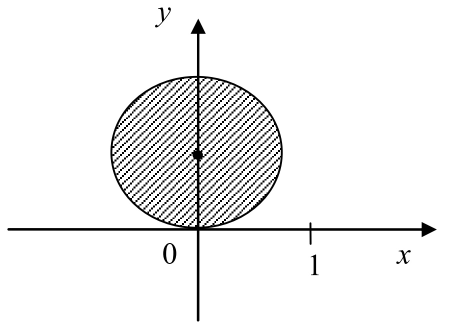
Область истинности конъюнкции заданных предикатов есть пересечение двух промежутков: $(-\infty;\,0] \cap [0;\,2] = \{0\}$ – множество, состоящее из единственного значения $x=0$.

Ответ: $x=0$.

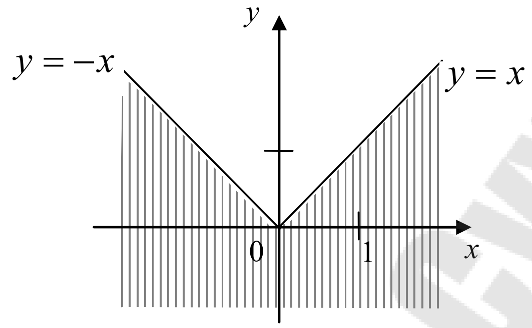
Пример 25. Для заданных двуместных предикатов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ указать (заштриховать) на плоскости области истинности предикатов $P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)$ и $P(x,y) \sim Q(x,y)$, если $P(x,y)=\{x^2+(y-1)^2 \le 1\}$, $Q(x,y)=\{y \le |x|\}$.

Решение

Сначала изобразим на плоскости области истинности предикатов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$..

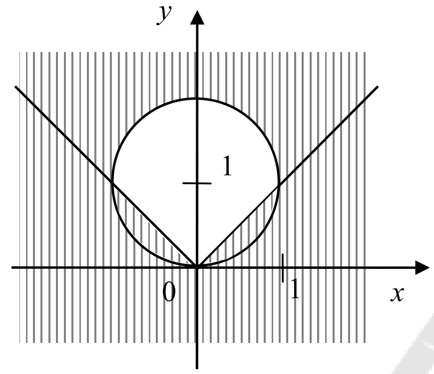


$P(x, y)$

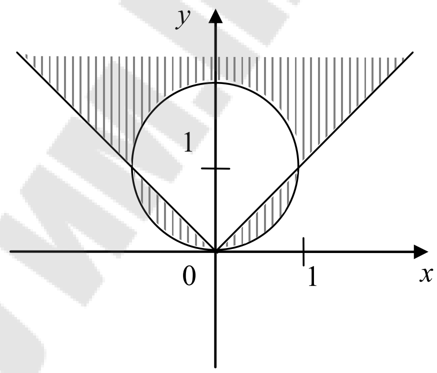


$Q(x, y)$

Следовательно,



$P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$



$P(x, y) \sim Q(x, y)$

В общем случае истинность составного предиката зависит от значений входящих в него переменных. Однако существуют логические операторы – ***кванторы***, применение которых к предикатам превращает их в ложные или истинные высказывания.

Пусть $p(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве D.

Квантор общности $\forall$ превращает предикат $p(x)$ в высказывание $\forall x\ p(x) =$ «для всякого элемента x высказывание $p(x)$ истинно».

Квантор существования $\exists$ превращает предикат $p(x)$ в высказывание $\exists x\ p(x) =$ «существует элемент x такой, что высказывание $p(x)$ истинно».

Пример 26. Пусть на множестве действительных чисел задан двухместный предикат $P(x, y) = "x + y = 0"$. Выразите словами и определите истинность следующих высказываний:

1) $\forall x\, \exists y : P(x, y)$;

2) $\exists y\, \forall x : P(x, y)$.

Решение

Запись $\forall x\,\exists y : P(x, y)$ означает: «для любого действительного числа *x* существует действительное число *y* такое, что $x + y = 0$». Это высказывание истинно. Действительно, выразив из равенства *y*, получим, что для любого *x* можно указать $y = -x$. Таким образом, требуемое равенство будет выполняться, предикат истинен.

Высказывание $\exists y\,\forall x : P(x, y)$ запишется следующим образом: «существует такое действительное число *y*, что *для любого* значения *x* справедливо равенство $x + y = 0$». Очевидно, это высказывание ложно: какое бы *y* мы не взяли, равенство $x + y = 0$ будет выполняться только при $x = -y$, а не *при любом x*.

Заметим, что для предиката $Q(x, y) = "x \cdot y = 0"$ утверждение $\exists y\,\forall x : P(x, y)$ было бы истинным: существует значение переменной *y* (и это значение $y = 0$) такое, что равенство $x \cdot y = 0$ выполняется для любого *x*.

2.4. Элементы теории доказательств

В широком смысле понятие доказательства включает в себя логическое действие, в процессе которого обосновывается истинность какого-либо положения с помощью любых аргументов. Доказательства применяются во всех сферах науки. Так, в математике под *доказательством* понимают последовательное применение разрешенных правил (правил вывода), которое позволяет исходя из начальных общезначимых формул (аксиом) вывести заданную формулу, чем и будет доказана ее общезначимость. В информатике доказательства являются неотъемлемой частью проверки корректности алгоритмов. Однако для всех доказательств, независимо от их конкретного содержания, общими являются структура доказательства, способы доказательства, общие требования в отношении оформления доказываемых утверждений.

Рассмотрим несколько стандартных приемов доказательств:

1. ***Прямое рассуждение*** предполагает использование только непосредственного вывода из аксиом, не применяя суждения с отрицанием: «предположим, что *P* истинно и покажем справедливость *Q*».

Пример 27. Докажите, что сумма двух нечетных чисел всегда четна.

Доказательство. Пусть x и y – два нечетных числа. Тогда их можно записать в виде $x = 2n+1, y = 2m+1$, где n, m – целые числа. Тогда

$$x + y = (2n+1) + (2m+1) = 2(n+m+1).$$

Таким образом, сумма $x + y$ кратна двум, а значит, является четным числом, что и требовалось доказать.

2. ***Метод «от противного»***: из предположения, что утверждение Q ложно, вытекает какое-нибудь противоречие, что и доказывает истинность Q.

Пример 28. Докажите, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным.

Доказательство. Воспользуемся методом «от противного». Предположим, что число $\sqrt{2}$ рационально, т. е. представимо в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое, а n – натуральное: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Возведем в квадрат обе части равенства. Получим $m^2 = 2n^2$. Отсюда следует, что число m^2 четно, а значит, число m не может быть нечетно. Значит, m – четное число, т. е. $m = 2k$. Но тогда m^2 кратно 4, а значит, обе части равенства $(2k)^2 = 2n^2$ можно разделить на 2. Получим равенство $n^2 = 2k^2$, из которого следует, что n^2 (а значит, и n) – тоже четное число. Дробь $\frac{m}{n}$ несократима, однако в числителе и знаменателе у нее стоят четные числа. Полученное противоречие доказывает, что первоначальное предположение о рациональности числа $\sqrt{2}$ было неверным.

3. ***Метод математической индукции***

Этот метод применяется, когда какая-либо формула дает правильный результат на некоторых начальных данных, и требуется доказать, что так будет всегда. Метод основан на ***принципе математической индукции***, который формулируется следующим образом.

Если предикат $P(n)$ (n – натуральное число):

1) истинен при $n = 1$;

2) из его истинности при $n = k$ следует истинность при $n = k+1$, то $P(n)$ истинен *при любом* натуральном n.

Замечание. Первое утверждение называют *базой индукции* и в некоторых случаях, исходя из смысла задачи, в качестве базы полагают n равным не единице, а другому натуральному числу.

Пример 29. Доказать справедливость формулы

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

при всех натуральных n.

Доказательство. Применим метод математической индукции.

1. Проверим *базу индукции*. При $n=1$ формула примет вид:

$$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

и она действительно верна.

2. Предположим, что формула верна при $n=k$, т. е.

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

и покажем ее истинность при $n=k+1$, т .е., что

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Сумма k первых слагаемых в левой части равенства нам известна из предположения индукции:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\left(1^2+2^2+3^2+\dots+k^2\right)+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

Остается выполнить алгебраические преобразования:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right)=$$

$$=(k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6},$$

что и требовалось доказать.

Мы проверили истинность формулы при $n=1$, и, предположив, что она верна при $n=k$, доказали ее истинность для $n=k+1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции, формула

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

справедлива при всех натуральных n.

Пример 30. Докажите, что число $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех натуральных *n*.

Доказательство. Проверим *базу индукции* – истинность нашего утверждения при $n = 1$:

$$5^1 - 4 \cdot 1 + 15 = 16 \,\vdots\, 16.$$

Следовательно, при $n = 1$ утверждение верно.

Предположим, что утверждение истинно для $n = k$ (т. е. $5^k - 4k + 15$ делится на 16) и покажем его истинность для $n = k + 1$. Имеем

$$5^{k+1} - 4(k+1) + 15 = 5^k \cdot 5 - 4k - 4 + 15 =$$

$$= (5^k \cdot 5 - 4k \cdot 5 + 15 \cdot 5) + 16k - 64 =$$

$$= 5(5^k - 4k + 15) + 16(k - 4).$$

Каждое из слагаемых этой суммы делится на 16 (первое – по предположению индукции). Следовательно, вся сумма делится на 16, а значит, в силу принципа математической индукции, утверждение верно для любого натурального *n*.

Задания к главе 2

69. Найдите среди указанных ниже предложений высказывания. Указать их истинностные значения.
   а) Который час?
   б) Целое число 1 есть наименьшее положительное целое число.
   в) Берегись автомобиля!
   г) Если $x = 3$, то $x^2 = 6$.
70. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:
   p = «Изделия с бриллиантами являются дорогостоящими»;
   q = «Я куплю бриллиантовое колье»;
   r = «У меня есть деньги».

Запишите в символической форме следующие высказывания:

а) «У меня нет денег и я не куплю бриллиантовое колье»;

б) «Неверно, что у меня есть деньги и я куплю бриллиантовое колье»;

в) «изделия с бриллиантами не являются дорогостоящим и я куплю бриллиантовое колье или изделия с бриллиантами являются дорогостоящими и я не куплю бриллиантовое колье».

71. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p = «Трудно изучать иностранный язык»;

q = «Я изучаю китайский»;

r = «Изучение китайского языка требует много времени».

Запишите следующие выражения как обычные высказывания:

а) $q \wedge r$;б) $\overline{p} \vee \overline{q}$;

в) $(p \vee r) \wedge q$;г) $p \wedge q \wedge r$.

72. Проверьте равносильность формул A и B.

а) $A = P \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$, $B = (P \wedge R) \vee (P \wedge Q)$;

б) $A = (P \sim Q) \Rightarrow P \wedge R$, $B = (P \wedge R) \vee (P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{P})$;

в) $A = (P \vee Q \vee R) \wedge (Q \vee P \vee S) \wedge (R \vee S \vee P)$,
$B = P \vee ((Q \vee R \wedge S) \wedge (S \vee R))$;

г) $A = P \Rightarrow (Q \oplus R)$, $B = (P \Rightarrow Q) \oplus (P \Rightarrow R)$;

д) $A = P \mid (Q \Rightarrow R)$, $B = (P \mid Q) \Rightarrow (P \mid R)$;

е) $A = P \downarrow (Q \sim R)$, $B = \overline{(P \downarrow Q) \sim (P \downarrow R)}$.

73. Решите уравнения.

а) $P \wedge \overline{(\overline{Q} \Rightarrow R)} = 1$;

б) $P \wedge Q \wedge R \Rightarrow \overline{P} \vee Q \vee \overline{R} = 0$;

в) $(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (\overline{Q} \Rightarrow S) \wedge (S \wedge P \Rightarrow \overline{R}) \Rightarrow Q = 0$;

г) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) = P \wedge R \Rightarrow \overline{Q}$;

д) $P \sim R \wedge \overline{Q} = R \downarrow Q \Rightarrow P$;

е) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P) = \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

74. Упростите данные формулы, используя правила равносильностей.

а) $(P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (\overline{Q} \Rightarrow S) \wedge (S \wedge P \Rightarrow \overline{R}) \Rightarrow Q$;

б) $(P \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge \overline{R}) \vee (Q \wedge R) \vee Q \vee R$;

в) $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \overline{R}) \vee (P \wedge \overline{Q})$;

г) $\neg((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow \neg P))$;

д) $(P \Rightarrow \overline{Q}) \vee (\overline{P \vee Q})$;

е) $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee ((P \Rightarrow Q) \wedge P)$.

75. Определите, являются ли данные формулы тавтологиями, противоречиями, нейтральными, выполнимыми, необщезначимыми:

а) $Q \vee R \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow P \vee R)$;

б) $\neg(P \Rightarrow (P \Rightarrow Q \sim Q))$;

в) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow S) \wedge (\overline{P} \vee \overline{S}) \Rightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$;

г) $P \wedge Q \sim P \downarrow R$;

д) $P \vee P \wedge Q \sim \overline{P}$;

е) $(P \wedge Q \Rightarrow R) \sim (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

76. Проанализируйте рассуждения.

а) Катя обещала прийти на свидание, если не будет дождя. Но пошел дождь, значит, Катя не придет.

б) Если Вася пойдет завтра на занятия в университет, то ему придется встать рано, а если он сядет вечером играть в Counter Strike, то ляжет спать поздно. Если он ляжет спать поздно, а встанет рано, то не выспится. Следовательно, Вася должен либо не пойти завтра на занятия, либо не играть в игру.

в) Каждый таракан является пингвином и любит мороженое. Слон не является тараканом. Значит, он не пингвин или не любит мороженое.

г) Если Оля выполнит все задания по математической логике, то она пойдет в субботу на каток. Оля выполнила не все задания. Значит, она не пойдет на каток.

77. Все продавцы любят кисель. Некоторые студенты любят кисель. Верно ли что все студенты являются продавцами? Верно ли, что некоторые студенты являются продавцами?

78. Три друга – баянист Собакин, пианист Кошкин и дворник Хомячков – имеют домашних питомцев: собаку, кошку и хомяка. «Интересно, что ни у кого из нас домашнее животное никак не связано с фамилией», – заметил владелец собаки. «В самом деле», – ответил Хомячков. Какой питомец живет у пианиста?

79. Установить, кто из четырех подозреваемых участвовал в ограблении, если известно, что:

1) если Иванов участвовал, то и Петров участвовал;

2) если Петров участвовал, то или Сидоров участвовал, или Иванов не участвовал;

3) если Федоров не участвовал, то Иванов участвовал, а Сидоров не участвовал;
4) если Федоров участвовал, то Иванов тоже участвовал.

80. Пусть $P(x)$ обозначает предикат «у x есть шипы». Для x, обозначающего слово «роза», запишите следующие высказывания в символьной форме:
а) «у всех роз есть шипы»;
б) «существует роза без шипов»;
в) «не бывает роз с шипами».
Постройте отрицания к этим высказываниям.

81. Даны предикаты: $P(x) =$«x – простое число», $R(x) =$ «x – четное число», $Q(x) =$ «x – нечетное число», $S(x, y) =$ «y делится на x». Переведите на русский язык следующие высказывания:
а) $P(7)$;
б) $R(2) \wedge P(2)$;
в) $\forall x(S(2,x) \Rightarrow R(x))$;
г) $\exists x(R(x) \wedge S(x,6))$;
д) $\forall x(\neg R(x) \Rightarrow \neg S(2,x))$;
е) $\forall x(R(x) \wedge \forall y(S(x,y) \Rightarrow P(y)))$;
ж) $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(R(y) \wedge S(x,y)))$;
з) $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(P(y) \Rightarrow \neg S(x,y)))$.

82. Заданы предикаты: $p(x) = \{x^2 \geq 1\}$, $g(x) = \{x > 3\}$, $r(x) = \{x = 4\}$, $s(x, y) = \{x^2 + y^2 \geq 3\}$, $d(x, y) = \{2x - 3y = 1\}$. Оцените истинность каждого из следующих выражений для заданных значений переменных:
а) $p(x) \vee q(x) \Rightarrow r(x)$, $x = 2$;
б) $\neg r(x) \wedge p(x) \sim q(x)$, $x = -1$;
в) $p(x) \vee q(x) \wedge r(x) \sim \neg g(x) \vee p(x)$, $x = 4$;
г) $s(x, y) \Rightarrow \neg d(x, y)$, $x = -1$, $y = 0$;
д) $s(x, y) \wedge d(x, y) \sim \neg s(x, y) \Rightarrow d(x, y)$, $x = 2$, $y = 1$;
е) $s(x, y) \vee d(x, y) \Rightarrow d(x, y)$, $x = -2$, $y = 3$.

83. Даны два предиката $p(x) = \{x^2 - 5x + 6 \geq 0\}$ и $q(x) = \{|x| < 1\}$, где $x \in \boldsymbol{R}$. Найдите множества истинности предикатов:

а) $p(x) \wedge q(x)$;	б) $p(x) \vee q(x)$;
в) $\neg p(x) \Rightarrow q(x)$;	г) $p(x) \sim q(x)$;
д) $\neg p(x) \vee q(x)$;	е) $\overline{p(x) \sim q(x)}$.

84. Для заданных двухместных предикатов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ укажите (заштрихуйте) на плоскости области истинности для каждого из предикатов:

1) $P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$; 2) $P(x, y) \sim Q(x, y)$; 3) $Q(x, y) \Rightarrow P(x, y)$, если:

а) $P(x, y) = \{(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\}$, $Q(x, y) = \{y \le |x|\}$;

б) $P(x, y) = \{x^2 + (y+1)^2 \ge 2\}$, $Q(x, y) = \{x + y \le 1\}$;

в) $P(x, y) = \{(x+2)^2 + y^2 \le 4\}$, $Q(x, y) = \{y \le |x+1|\}$;

г) $P(x, y) = \{x^2 + y^2 \ge 3\}$, $Q(x, y) = \{y \le x^2\}$;

д) $P(x, y) = \{(x-1)^2 + y^2 \ge 1\}$, $Q(x, y) = \{x + 2y \le 1\}$;

е) $P(x, y) = \{x^2 + (y-2)^2 \le 4\}$, $Q(x, y) = \{|x| + |y| \le 1\}$.

85. Докажите, что для любого натурального числа n справедлива формула:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \dfrac{n(n^2-1)}{3}$;

б) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

в) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \dfrac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$;

г) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^3}{5 \cdot 7} + \dots + \dfrac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

86. Докажите, что для любого натурального числа n число $n^3 - n$ делится на 3.

87. Докажите, что для любого натурального числа n число $7^n - 1$ делится на 6.

88. Докажите, что для любого натурального числа n число $10 - 4^n + 3n$ делится на 9.

89. Докажите, что для каждого натурального числа $n \ge 2$ справедлива формула

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется высказыванием?
2. Как образуются сложные высказывания?
3. Какие значения может принимать высказывание?
4. Какие логические связки вы знаете?
5. Как определяется конъюнкция высказываний? дизъюнкция? импликация? эквиваленция?
6. Как определяется отрицание высказывания?
7. Как выглядят таблицы истинности основных высказываний?
8. Как определяются штрих Шеффера, стрелка Пирса, сумма по модулю два?
9. Каков приоритет выполнения логических операций?
10. Какие формулы алгебры логики называются равносильными? Перечислите основные равносильности.
11. Что такое тавтология? Что такое контрадикция?
12. Какие формулы алгебры логики называются выполнимыми? необщезначимыми? нейтральными?
13. Что называется предикатом? Приведите примеры одноместных и двухместных предикатов.
14. Что представляет собой область истинности n-местного предиката?
15. Что представляют собой квантор общности и квантор существования?
16. Сформулируйте принцип математической индукции.
17. В чем заключается метод математической индукции?

ГЛАВА 3. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

3.1. Определение и способы задания булевых функций

Обобщением понятия сложного высказывания является понятие булевой функции.

Булевой функцией от n переменных называется всякое отображение вида

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\},$$

т. е. булева функция определена на множестве n-элементных последовательностей из нулей и единиц и принимает одно из двух возможных значений: 0 или 1.

Каждый элемент множества $\{0,1\}^n$ называют набором значений булевых переменных. Очевидно, существует 2^n различных наборов. Наборы обычно записывают в лексикографическом порядке, т. е. в порядке возрастания соответствующего двоичного числа. Так как на каждом наборе булева функция может принимать два значения (0 или 1), то существует 2^{2^n} различных булевых функций n переменных.

В частности, при $n = 1$ получаем $2^{2^1} = 4$ функции, а при $n = 2$ – $2^{2^2} = 16$ функций. Функции одной и двух переменных называются *элементарными*. С их помощью можно определить функции большего количества переменных.

Булевы функции можно задавать при помощи таблиц истинности. Рассмотрим таблицы истинности элементарных функций.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
x	0	X	$\bar{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции $f_1(x)$ и $f_4(x)$ называют, соответственно, константой 0 и константой 1, функцию $f_2(x)$ – тождественной функцией, а $f_3(x)$ – отрицанием x (или инверсией).

Таблицы истинности функций двух переменных будут иметь вид:

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
x_1	x_2	0	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{x_1 \Rightarrow x_2}$	x_1	$\overline{x_2 \Rightarrow x_1}$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

		f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$	$\bar{x}_2$	$x_2 \Rightarrow x_1$	$\bar{x}_1$	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Заметим, что функции f_1 и f_{16} представляют собой константы 0 и 1, функции f_4, f_6, f_{13} и f_{11} являются по сути функциями одной переменной (первые две являются тождественными функциями переменных, соответственно, x_1 и x_2, а вторые две – их инверсиями). Напомним, что функции f_2, f_8, f_{10}, f_{14} – основные функции логики высказываний, конъюнкция, дизъюнкция, эквиваленция и импликация соответственно. Функции f_9 и f_{15} – стрелка Пирса и штрих Шеффера – представляют собой отрицание соответственно дизъюнкции и конъюнкции. Функция f_7 есть антиэквивалентность (или сумма по модулю 2, или сумма Жегалкина). Функцию f_{12} называют конверсией, и, наконец, f_3 и f_5 – функции запрета.

Помимо табличного существуют и другие способы задания булевых функций. Булеву функцию можно задать вектором ее значений. Так, функция конверсии f_{12} может быть задана следующим образом: $f_{12} = (1011)$. Также булева функция может быть задана перечислением номеров тех наборов, на которых она принимает значение 1. При этом надо учитывать, что нумерация наборов начинается не с 1, а с 0. Например, функцию конверсии можно определить так:

$$f_{12} = \{0,2,3\}.$$

Кроме того, булева функция может быть задана аналитически, т. е. в виде формулы, содержащей внутри себя элементарные булевы функции, подобно тому как в математическом анализе сложные функции конструируются из элементарных.

Наборы элементов, на которых $f=1$, называются ***единичными***.

Две булевы функции называются ***равными***, если их таблицы истинности одинаковы.

Для булевых функций справедливы равенства, аналогичные формулам, сформулированным для высказываний, и логические операции имеют тот же приоритет.

3.2. Полные системы булевых функций

Пусть заданы булевы функции $f(x_1,\dots,x_m)$, $g_1(x_1,\dots,x_n)$, $g_2(x_1,\dots,x_n)$, ..., $g_m(x_1,\dots,x_n)$. Подставим функции $g_1(x_1,\dots,x_n)$, $g_2(x_1,\dots,x_n)$, ..., $g_m(x_1,\dots,x_n)$ в функцию $f(x_1,\dots,x_m)$. Получим новую булеву функцию

$$f(g_1(x_1,\dots,x_n), g_2(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n)),$$

которая называется ***суперпозицией функций*** $f, g_1, g_2, \dots g_m$.

Набор булевых функций $M=\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ называется ***полной системой***, если любая булева функция выражается через функции системы M при помощи операции суперпозиции в конечном числе раз.

Можно показать, что система $M=\{\wedge, \vee, \neg\}$ – система булевых функций, состоящая из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, является полной. Эту систему называют *стандартным базисом*.

Теорема 3 (*о двух системах*). Пусть имеется полная система булевых функций $M=\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Тогда для полноты другой системы булевых функций $N=\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы любая функция системы M выражалась через функции системы N при помощи операций суперпозиции.

Пример 31. Покажем, что система функций $N=\{\oplus, \wedge, 1\}$ является полной. Для этого необходимо убедиться, что любая из функций стандартного базиса $M=\{\wedge, \vee, \neg\}$ выражается через функции системы N.

Конъюнкция содержится в обеих системах.

С помощью таблицы истинности нетрудно убедиться, что $\bar{x}=x\oplus 1$. Кроме того,

$$x \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = \overline{(x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1)} = \overline{(xy \oplus x \oplus y) \oplus 1} =$$

$$= \overline{\overline{xy \oplus x \oplus y}} = xy \oplus x \oplus y.$$

Таким образом, любая функция стандартного базиса выражается через функции $\{\oplus, \wedge, 1\}$, а значит, согласно теореме о двух системах, система $N = \{\oplus, \wedge, 1\}$ является полной.

Замечание. Систему $N = \{\oplus, \wedge, 1\}$ называют *базисом Жегалкина*. Каждая булева функция может быть единственным образом выражена через функции этой системы.

3.3. Полином Жегалкина

С базисом Жегалкина связано еще одно важное понятие булевой алгебры – полином Жегалкина.

Полиномом Жегалкина называется многочлен, являющийся суммой константы и различных одночленов, в которые каждая из переменных входит не выше, чем в первой степени.

Для булевой функции одной переменной полином Жегалкина выражается формулой

$$f(x) = C_0 \oplus C_1 x.$$

Если $f(x_1, x_2)$ – функция двух переменных, то ее полином Жегалкина выглядит следующим образом:

$$f(x_1, x_2) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus C_{12} x_1 x_2.$$

Полином Жегалкина булевой функции трех переменных имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus C_3 x_3 \oplus C_{12} x_1 x_2 \oplus C_{13} x_1 x_3 \oplus$$

$$\oplus C_{23} x_2 x_3 \oplus C_{123} x_1 x_2 x_3,$$

где все коэффициенты C_i принимают значения 0 или 1.

Полином Жегалкина называется ***линейным***, если он не содержит конъюнкции переменных, и ***нелинейным*** в противном случае.

Существуют различные алгоритмы построения полинома Жегалкина: с помощью треугольника Паскаля, метода неопределенных коэффициентов и др. Если булева функция задана аналитически, то получить полином Жегалкина можно, используя формулы:

$$x \oplus 0 = x, \quad \bar{x} = x \oplus 1,$$

$$x \oplus x = 0, \quad x \vee y = x \oplus y \oplus xy.$$

Пример 32. Запишите полином Жегалкина функции $f(x, y, z) = (01011001)$.

Решение

Первый способ: треугольник Паскаля.

Запишем таблицу истинности данной функции.

x	y	z	$f(x,y,z)$	треугольник Паскаля	слагаемые
0	0	0	0	0 1 0 1 1 0 0 1	1
0	0	1	1	1 1 1 0 1 0 1	z
0	1	0	0	0 0 1 1 1 1	y
0	1	1	1	0 1 0 0 0	yz
1	0	0	1	1 1 0 0	x
1	0	1	0	0 1 0	xz
1	1	0	0	1 1	xy
1	1	1	1	0	xyz

Поясним, как заполняется таблица. Первые четыре столбца представляют собой значения переменных, записанные в лексикографическом порядке, и столбец значений функции. В пятом столбце строится треугольник Паскаля. Верхняя строка этого треугольника есть строка значений исходной функции. Элементы каждой следующей строки получаются путем сложения по модулю 2 двух соседних значений в предыдущей строке. В шестом столбце указаны конъюнкции переменных, значения которых в одном из первых трех столбцов равны единице. Например, набору (110) соответствует конъюнкция *xy*. Набору (000) соответствует 1.

Левая сторона треугольника Паскаля (она выделена цветом) состоит из чисел 01001010. Единицам этой строки соответствуют слагаемые *z*, *x*, *xy* из шестого столбца. Поэтому многочлен Жегалкина для функции $f(x, y, z)$ равен $z \oplus x \oplus xy$.

Второй способ: метод неопределенных коэффициентов.

Полином Жегалкина функции $f(x, y, z)$ имеет вид:

$$f(x,y,z) = C_0 \oplus C_1 x \oplus C_2 y \oplus C_3 z \oplus C_{12} xy \oplus C_{13} xz \oplus C_{23} yz \oplus C_{123} xyz,$$

где C_i – неопределенные коэффициенты, принимающие значения 0 или 1.

Для того чтобы их найти, будем последовательно подставлять в последнюю формулу все наборы переменных и соответствующие им значения функции:

$f(0,0,0) = 0 = C_0$,

$f(0,0,1) = 1 = C_0 \oplus C_3 \cdot 1$ (остальные слагаемые обращаются в ноль), откуда, учитывая, что $C_0 = 0$, находим $C_3 = 1$.

Далее $f(0,1,0) = 0 = 0 \oplus C_2$, значит, $C_2 = 0$.

$f(0,1,1) = 1 = 0 \oplus C_2 \cdot 1 \oplus C_3 \cdot 1 \oplus C_{23} \cdot 1 \cdot 1 = 1 \oplus C_{23}$, откуда $C_{23} = 0$.

Продолжая аналогичные рассуждения, найдем остальные значения коэффициентов:

$$C_1 = 1,\ C_{13} = 0,\ C_{12} = 1,\ C_{123} = 0.$$

Подставим найденные коэффициенты в полином Жегалкина и получим:

$$f(x, y, z) = x \oplus z \oplus xy.$$

Так как только три коэффициента оказались не равны нулю, то полином состоит из трех слагаемых. Заметим, что построенный полином Жегалкина нелинеен.

Ответ: $f(x, y, z) = x \oplus z \oplus xy$.

3.4. Классы Поста

Класс булевых функций называется ***замкнутым***, если вместе с любыми своими функциями он содержит и любую их суперпозицию.

Перечислим пять важнейших замкнутых классов булевых функций, называемых ***классами Поста***.

• T_0 – класс булевых функций, ***сохраняющих константу 0***, т. е. $f(0,0,...,0) = 0$.

• T_1 – класс булевых функций, ***сохраняющих константу 1***, т. е. $f(1,1,...,1) = 1$.

• M – класс ***монотонных*** функций.

Два набора $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ называются ***сравнимыми*** ($a \le b$), если выполнены условия $a_i \le b_i$, $\forall i = \overline{1,n}$. Например, наборы $(0,0)$ и $(1,0)$ сравнимы, а наборы $(1,0)$ и $(0,1)$ – нет.

Булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***монотонной***, если для любых наборов a и b, таких, что $a \le b$, следует $f(a) \le f(b)$.

• S – класс ***самодвойственных*** функций.

Функция f^* называется ***двойственной*** к функции f, если

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n).$$

Булева функция f называется ***самодвойственной***, если она совпадает с двойственной, т. е. $f = f^*$.

Критерий самодвойственности функции. Для самодвойственности функции необходимо и достаточно, чтобы на любых двух противоположных наборах значений переменных функция принимала различные значения (т. е. все равноудаленные от концов строки значений функции числа были противоположны).

• L – класс ***линейных*** функций.

Булева функция f называется ***линейной***, если ее полином Жегалкина линеен, т. е. имеет вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus ... \oplus C_n x_n,$$

где $C_i \in \{0,1\}$ $\forall i = \overline{0, n}$.

Теорема 4 (*теорема Поста*). Система булевых функций полна в множестве булевых функций тогда и только тогда, когда эта система не содержится целиком ни в одном из классов Поста.

Пример 33. Установите, являются ли булевы функции $f_1(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2) \Rightarrow x_1$ и $f_2(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \oplus x_2$ монотонными, линейными, сохраняющими 0, сохраняющими 1, самодвойственными. Образуют ли они полную систему?

Решение

Составим таблицы истинности данных функций.

$(x_1$	$\wedge$	$x_2)$	$\Rightarrow$	x_1
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

$(x_1$	$\wedge$	$\bar{x}_2)$	$\oplus$	x_2
0	0	1	0	0
0	0	0	1	1
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1

Так как $f_1(0{,}0)=1\neq 0$ и $f_1(1{,}1)=1$, то функция $f_1(x_1,x_2)$ не сохраняет 0 и сохраняет 1. На противоположных наборах (0,0) и (1,1) функция принимает одинаковые (а не противоположные) значения, следовательно, не является самодвойственной. Очевидно, что многочлен Жегалкина для функции $f_1=1$, следовательно, функция линейна. Кроме того, она монотонна.

Нетрудно убедиться, что функция $f_2(x_1,x_2)$: сохраняет 0, сохраняет 1, также не является самодвойственной, является монотонной. Найдем ее представление в базисе Жегалкина с помощью преобразований:

$$f_2(x_1,x_2)=(x_1\wedge\bar{x}_2)\oplus x_2=\big(x_1\wedge(1\oplus x_2)\big)\oplus x_2=x_1\oplus x_1x_2\oplus x_2,$$

а значит, функция f_2 нелинейна.

Чтобы определить, является ли система булевых функций $D=\{f_1,f_2\}=\{(x_1\wedge x_2)\Rightarrow x_1,(x_1\wedge\bar{x}_2)\oplus x_2\}$ полной, составим таблицу Поста (критериальную таблицу). В клетках данной таблицы пишем «+» или «–», в зависимости от того, входит функция, стоящая в данной строке, в соответствующий класс или нет.

	T_0	T_1	S	M	L
$(x_1\wedge x_2)\Rightarrow x_1$	–	+	–	+	+
$(x_1\wedge\bar{x}_2)\oplus x_2$	+	+	–	+	–

Так как система D целиком принадлежит классам T_1 и M, то по теореме Поста не является полной.

3.5. Нормальные формы

Любая формула вида x или $\bar{x}$, где x – произвольная переменная называется ***литералом***. Используют следующее обозначение:

$$x^{\sigma}=\begin{cases}x, & \text{если } \sigma=1,\\ \bar{x}, & \text{если } \sigma=0.\end{cases}$$

Формула вида $K=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_n^{\sigma_n}$ $(D=x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee\dots\vee x_n^{\sigma_n})$, где $\sigma_i=\{0{,}1\}$, $i=\overline{1,n}$, а среди переменных x_i могут быть совпадающие, называется ***элементарной конъюнкцией*** (***элементарной дизъюнкцией***).

Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется ***дизъюнктивной нормальной формой*** (ДНФ). Всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций называется ***конъюнктивной нормальной формой*** (КНФ).

Например,

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_3 \wedge x_2) \vee \bar{x}_3 \text{ – ДНФ;}$$

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge x_2 \text{ – КНФ;}$$

$$(x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)) \wedge x_3 \text{ – не ДНФ, не КНФ.}$$

Теорема 5. Для любой формулы A можно построить ДНФ и КНФ.

Фактически существование у функции ДНФ и КНФ означает возможность ее представления в стандартном базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$.

Пример 34. С помощью элементарных преобразований приведите функцию $(a \mid b \mid a) \Rightarrow (\bar{b} \vee c) \wedge a$ к ДНФ и КНФ.

Решение

Напомним, что $a \mid b = \overline{a \wedge b}$, $a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b$.

Преобразуем функцию, используя основные равносильности 1–11 из параграфа 2.2:

$$(a \mid b \mid a) \Rightarrow (\bar{b} \vee c) \wedge a = \big((\overline{a \wedge b}) \mid a\big) \Rightarrow (\bar{b} \vee c) \wedge a =$$

$$= \overline{(\overline{a \wedge b}) \wedge a} \Rightarrow (\bar{b} \vee c) \wedge a = \overline{(\overline{a \wedge b}) \wedge a} \Rightarrow \big((\bar{b} \wedge a) \vee (c \wedge a)\big) =$$

$$= \overline{\overline{(\overline{a \wedge b}) \wedge a}} \vee \big((\bar{b} \wedge a) \vee (c \wedge a)\big) = \big((\overline{a \wedge b}) \wedge a\big) \vee \big((\bar{b} \wedge a) \vee (c \wedge a)\big) =$$

$$= \big((\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge a\big) \vee \big((\bar{b} \wedge a) \vee (c \wedge a)\big) =$$

$$= (\bar{a} \wedge a) \vee (\bar{b} \wedge a) \vee (\bar{b} \wedge a) \vee (c \wedge a) = 0 \vee \bar{b}a \vee ca = \bar{b}a \vee ca .$$

Полученная формула является дизъюнкцией элементарных конъюнкций, а значит, *дизъюнктивной нормальной формой*.

Вынесем a за скобки и получим *конъюнктивную нормальную форму*:

$$\bar{b}a \vee ca = a \wedge (\bar{b} \vee c).$$

Ответ: $\bar{b}a \vee ca$ – ДНФ, $a \wedge (\bar{b} \vee c)$ – КНФ.

Любая булева функция может иметь много представлений в виде ДНФ и КНФ. Особое место среди этих представлений занимают совершенные ДНФ и КНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и любой литерал $x_i^{\sigma_i}$ $(i = \overline{1, n})$ входит в каждую элементарную конъюнкцию ровно один раз.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и любой литерал $x_i^{\sigma_i}$ $(i = \overline{1, n})$ входит в каждую элементарную дизъюнкцию ровно один раз.

Теорема 6. Всякая булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, отличная от тождественного нуля (единицы), представима единственным образом в виде своей СДНФ (СКНФ):

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} \text{ – СДНФ},$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0} x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} \text{ – СКНФ},$$

где дизъюнкция берется по единичным наборам функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, а конъюнкция – по нулевым.

Из теоремы следует, что СДНФ и СКНФ можно строить по таблице истинности.

Пример 35. Для булевой функции $f(x, y, z) = (x \sim y) \vee (y \sim z)$ построить СДНФ и СКНФ с помощью таблицы истинности.

Решение

Составим таблицу истинности.

$(x$	$\sim$	$y)$	$\vee$	$(y$	$\sim$	$z)$
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Для построения СДНФ в результирующем столбце выберем наборы, на которых функция принимает значение 1, и воспользуемся теоремой 6.

$$\text{СДНФ: } (x^0 \wedge y^0 \wedge z^0) \vee (x^0 \wedge y^0 \wedge z^1) \vee (x^0 \wedge y^1 \wedge z^1) \vee$$
$$\vee (x^1 \wedge y^0 \wedge z^0) \vee (x^1 \wedge y^1 \wedge z^0) \vee (x^1 \wedge y^1 \wedge z^1) =$$
$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz\,.$$

Для построения СКНФ выберем наборы, на которых функция принимает значение 0. Получим

$$\text{СКНФ: } (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}}) \wedge (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}) = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})\,.$$

3.6. Минимизация булевых функций

Построенные по таблице истинности СДНФ и СКНФ, как правило, оказываются достаточно громоздкими и содержат большое число элементарных операций. Форму записи булевой функции, в которой использовано наименьшее число элементарных операций по сравнению с другими формами записи этой же функции, называют ***абсолютно минимальной***, а задачу поиска наиболее простой записи булевой функции называют ***задачей минимизации***.

Так как наиболее распространенной формой представления булевой функции является ДНФ, то задачу упрощения булевых функций обычно решают в классе ДНФ.

Пусть имеется ДНФ булевой функции:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_s\,,$$

где K_i, $i = \overline{1, s}$ – элементарные конъюнкции. Число s называется ***длиной*** ДНФ.

Дизъюнктивная нормальная форма булевой функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется ***кратчайшей***, если она содержит наименьшее число s элементарных конъюнкций по сравнению с другими ДНФ этой же функции.

Рассмотрим некоторую элементарную конъюнкцию

$$K = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ ... x_r^{\sigma_r}\,.$$

Число r переменных в конъюнкции называется ее ***рангом***. Тогда ДНФ можно охарактеризовать числом $R = r_1 + r_2 + ... + r_s$, которое называется ***суммарным рангом ДНФ*** булевой функции.

Дизъюнктивная нормальная форма булевой функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется ***минимальной***, если ей соответствует наименьший суммарный ранг R по сравнению с другими ДНФ этой же функции.

Следовательно, задача минимизации булевой функции сводится к отысканию кратчайшей или минимальной ДНФ заданной функции. Если число переменных булевой функции $n \le 4$, то минимальная и кратчайшая ДНФ совпадают. При $n \ge 5$ эти ДНФ могут быть различными, однако поиск минимальной ДНФ проводится среди кратчайших ДНФ.

Существуют различные методы минимизации булевых функций, однако все они основаны на выполнении двух операций: склеивания и поглощения. Рассмотрим подробнее каждую из них.

Пусть K_1 и K_2 – элементарные конъюнкции, принадлежащие СДНФ булевой функции f, причем существует такая переменная x и такая элементарная конъюнкция K, что $K_1 = xK$ и $K_2 = \bar{x}K$. Запишем дизъюнкцию этих элементарных конъюнкций:

$$K_1 \vee K_2 = xK \vee \bar{x}K = K(x \vee \bar{x}) = K \cdot 1 = K.$$

Таким образом, из двух элементарных конъюнкций мы получили одну конъюнкцию K, которая на одну переменную короче, чем исходные элементарные конъюнкции. Этот процесс называется *склейкой* K_1 и K_2 по переменной x.

Операция поглощения может быть применена к элементарным конъюнкциям вида K и $K_1 = xK$. Дизъюнкция таких элементарных конъюнкций будет иметь вид:

$$K_1 \vee K = xK \vee K = K(x \vee 1) = K \cdot 1 = K,$$

что также обеспечивает «укорачивание» исходной СДНФ.

Наиболее наглядным способом минимизации булевых функций трех-четырех переменных является использование ***карт Карно***. Карта Карно для функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ представляет собой прямоугольную таблицу следующего вида:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3$	0				
x_3	1				

Для функции четырех переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ карта Карно выглядит следующим образом:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$\bar{x}_1 x_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	00				
$\bar{x}_3 x_4$	01				
$x_3 x_4$	11				
$x_3\bar{x}_4$	10				

Это фактически модифицированная таблица истинности булевой функции, предназначенная для наглядного обнаружения элементарных конъюнкций, подлежащих склейке. Каждая клетка определяется своим набором значений переменных. В клетках, соответствующих наборам переменных, на которых функция принимает значение, равное единице, ставится 1, остальные клетки остаются пустыми. Наборы, определяющие две соседние клетки в карте Карно, различаются в точности в одной позиции (т. е. отличаются значениями ровно одной компоненты). Говоря «соседние клетки», мы имеем в виду не только клетки, расположенные непосредственно рядом, но и клетки левого и правого края, а также верхнего и нижнего края, как если бы карта «закручивалась» в цилиндр, а затем в тор.

Любые две *соседние* клетки, содержащие единицу, соответствуют двум элементарным конъюнкциям, различающимся одной переменной, а значит могут быть склеены по этой переменной. На карте Карно процесс склейки выглядит так: указанные клетки покрывают прямоугольником, который представляется словом вида 0×1 («×» – знак зачеркивания на месте переменной, по которой произведена склейка, означает ее удаление).

Пример 36. Построить минимальную ДНФ для функции голосования трех переменных x_1, x_2, x_3, принимающей значение $f = 1$ на наборах (011), (110), (101) и (111).

Решение

Составим карту Карно заданной функции, записав единицы в клетках, соответствующих данным наборам:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3$	0			1	
x_3	1		1	1	1

Покрыв прямоугольниками три пары соседних клеток, получаем следующий результат:

$$11\times,\ \times 11 \text{ и } 1\times 1.$$

Эти наборы соответствуют элементарным конъюнкциям x_1x_2, x_2x_3 и x_1x_3, из которых мы получаем ДНФ: $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Так как прямоугольниками покрыты все единицы и никакой из прямоугольников не содержится в другом, то нами получена минимальная ДНФ.

Ответ: $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$..

Замечание. Заметим, что прямоугольники, образующие покрытие, могут пересекаться между собой. Следует помнить, что покрытие осуществляется прямоугольниками площади 1, 2, 4, 8, $\ldots, 2^k$ клеток. При этом, если какой-либо прямоугольник оказывается целиком внутри большего прямоугольника, то меньший, поглощенный прямоугольник, уже не рассматривается – таким образом в картах Карно реализуется операция поглощения. Чем большая площадь покрывается прямоугольником, тем короче будет минимальная ДНФ.

Например, в следующей карте можно было бы покрыть единицы двумя прямоугольниками площади две клетки, но эти прямоугольники «поглощаются» прямоугольником площади четыре клетки. Таким образом, после склейки получим слово 0××, что соответствует элементарной конъюнкции (и минимальной ДНФ) $\bar{x}_1$.

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3$	0	1	1		
x_3	1	1	1		

Также поступают и в случае функции четырех переменных.

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$\bar{x}_1 x_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	00	1			1
$\bar{x}_3 x_4$	01	1			1
$x_3 x_4$	11	1			1
$x_3\bar{x}_4$	10	1			1

Можно было бы покрыть карту двумя прямоугольниками площади 4, получив слова 00×× и 10×× и, соответственно, ДНФ, равную $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2$, но *минимальную* ДНФ $\bar{x}_2$ мы получим, если «свернем» карту Карно в цилиндр и склеим клетки крайнего правого и левого рядов. Такой склейке будет соответствовать слово ×0××, и, соответственно, ДНФ, равная $\bar{x}_2$. Заметим, что этот же результат мы могли получить, применив к построенной выше ДНФ $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2$ закон дистрибутивности:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_2(\bar{x}_1 \vee x_1) = \bar{x}_2 \cdot 1 = \bar{x}_2.$$

Замечание. Минимальные КНФ строятся аналогичным образом, только в этом случае следует покрывать прямоугольниками клетки с нулями. Кроме того, КНФ конструируют из элементарных дизъюнкций, а значит, теперь слову, например, 01×0 будет соответствовать элементарная дизъюнкция $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4$.

Пример 37. С помощью карт Карно построить минимальные ДНФ и КНФ для функции f, принимающей нулевые значения на наборах (0011), (0100), (0110), (1110), (1011), (1100).

Решение

Составим карту Карно данной функции.

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$\bar{x}_1 x_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	00	1			1
$\bar{x}_3 x_4$	01	1	1	1	1
$x_3 x_4$	11		1	1	
$x_3\bar{x}_4$	10	1			1

Напомним, что клетки, находящиеся в углах карты Карно, также считаются соседними, так как также отличаются значениями ровно одной компоненты.

Запишем результат склейки элементарных конъюнкций в соответствии с обведенными прямоугольниками:

$$\times 0 \times 0,\ \times\times 01,\ \times 1 \times 1.$$

Выписанным наборам соответствуют элементарные конъюнкции $\bar{x}_2\bar{x}_4$, $\bar{x}_3 x_4$ и $x_2 x_4$. Значит, минимальная ДНФ будет иметь вид:

$$\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 x_4 .$$

Заметим, что покрытие можно было бы изобразить по-другому:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$\bar{x}_1 x_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	00	1			1
$\bar{x}_3 x_4$	01	1	1	1	1
$x_3 x_4$	11		1	1	
$x_3\bar{x}_4$	10	1			1

Тогда ДНФ будет иметь вид:

$$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_2 x_4 .$$

Оба раза мы покрыли все клетки с единицами, причем никакой из прямоугольников не содержится в другом. Кроме того, обе ДНФ имеют одинаковую длину (содержат по пять операций), а значит, обе они являются минимальными.

Построим теперь минимальную КНФ заданной функции. Для этого покроем прямоугольниками клетки с нулями:

	00	01	11	10
00		0	0	
01				
11	0			0
10		0	0	

Выпишем соответствующие наборы: ×1×0 и 0×11.

Этим словам соответствуют элементарные дизъюнкции соответственно $\bar{x}_2 \vee x_4$ и $x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$. Запишем конъюнкцию этих элементарных дизъюнкций – это и будет минимальная КНФ:

$$(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4).$$

Ответ: $\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_2 x_4$, $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_2 x_4$ – минимальные ДНФ, $(\bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$ – минимальные КНФ.

3.7. Минимизация частично определенных булевых функций

На практике часто бывает так, что значения булевой функции определены не на всех наборах входящих в нее переменных и могут быть доопределены произвольным образом. В этом случае булеву функцию называют *частично определенной*.

Для построения минимальной ДНФ такой функции, как правило, целесообразно доопределить функцию в «неизвестных» клетках единицами (на карте Карно эти «дополнительные» единицы обозначим символом «*»). Для склейки необходимо выделять прямоугольники, каждая клетка которых содержит либо единицу, либо *, причем в каждом прямоугольнике должна существовать по крайней мере одна единичная клетка.

При построении минимальной КНФ поступают аналогичным образом с той лишь разницей, что доопределяют функцию нулями.

Пример 38. Запишите минимальные ДНФ и КНФ частично определенной булевой функции $f = (1110{*}{*}01)$.

Решение

Изобразим карту Карно согласно описанным выше правилам.

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3$	0	1	1		*
x_3	1	1		1	*

Соответствующие наборы после склейки будут иметь вид: 0×0, ×0× и 1×1, что соответствует минимальной ДНФ $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 x_3$.

Карта Карно для построения минимальной КНФ примет вид:

	00	01	11	10
0			0	$*$
1		0		$*$

Заметим, что в данной ситуации КНФ будет минимальной, если на наборе (100) функцию доопределить нулем, а на наборе (101) – единицей. Таким образом, минимальная КНФ будет иметь вид: $(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

Ответ: минимальная ДНФ – $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2$, минимальная КНФ – $(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

3.8. Минимизация релейно-контактных схем

В 1910 году французский физик П. Эренфест предложил идею использования аппарата булевой алгебры для построения автоматических устройств, однако только спустя двадцать лет эта идея была воплощена в жизнь благодаря работам советского физика В. И. Шестакова, американского математика К. Шеннона, японского инженера А. Накосима. Устройствами, к которым была впервые применена алгебра логики, стали релейно-контактные схемы. Релейно-контактная схема представляет собой устройство из проводников и контактов, связывающих полюса источника тока. Контакт обозначают как переменную (x). Каждый контакт может находиться в двух состояниях:

контакт разомкнут

Рис. 3.1

контакт замкнут

Рис. 3.2

Замыканию контакта на рис. 3.1 соответствует значение переменной $x = 1$, а размыканию – $x = 0$. На рис. 3.2, напротив, замыканию соответствует нулевое значение переменной, а размыканию – единичное.

Дизъюнкции соответствует *параллельное* соединение контактов x и y, так как цепь будет замкнута тогда и только тогда, когда замкнут хотя бы один из контактов (рис. 3.3).

Конъюнкции соответствует *последовательное* соединение контактов x и y, так как цепь будет замкнута тогда и только тогда, когда замкнуты оба контакта (рис. 3.4).

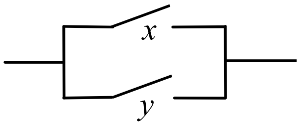


Рис. 3.3

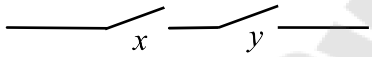


Рис. 3.4

В соответствии с описанными правилами любой контактной схеме ставится в соответствие булева функция f – *функция проводимости*, – которая принимает значение 1, если схема проводит ток, и ноль в противном случае. Две схемы с одинаковыми функциями проводимости называют равносильными. Согласно законам алгебры логики функция проводимости может быть минимизирована, а значит, соответствующая ей контактная схема будет иметь более простой вид.

Таким образом, устанавливая соответствие между контактными схемами и булевыми функциями, мы решаем ***три основных задачи***:

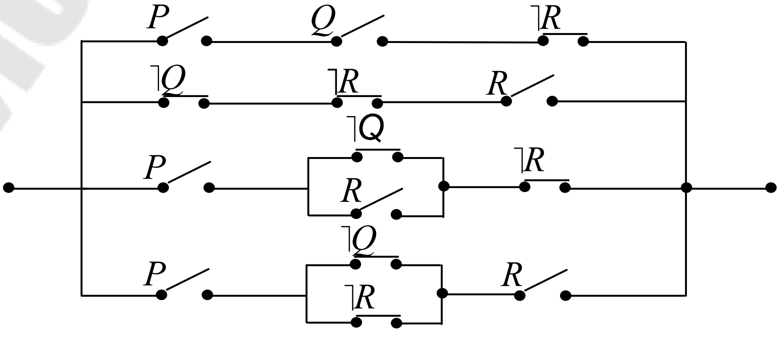
1. *Задача анализа*: построение по схеме, соответствующей булевой функции.

2. *Задача синтеза*: по данной математической модели в виде булевой функции строится контактная схема.

Поскольку одна и та же булева функция может быть выражена различными формулами, то ее реализация схемами неоднозначна. Можно построить различные контактные схемы, реализующие одну и ту же булеву функцию проводимости, которые будут являться эквивалентными. Из множества эквивалентных схем путем упрощения формул выделяют наиболее простую схему, решая таким образом третью задачу – задачу минимизации.

3. *Задача минимизации* контактной схемы: минимизация соответствующей булевой функции.

Пример 39. Упростите контактную схему.



Решение

Рассмотрим два способа решения данной задачи: с помощью логических рассуждений и равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности.

Первый способ

Запишем булеву функцию, соответствующую данной контактной схеме. Рассмотрим каждую из четырех веток схемы по отдельности:

I ветка: $P \wedge Q \wedge \overline{R} = PQ\overline{R}$.

II ветка: $\overline{Q} \wedge \overline{R} \wedge R$.

В этой формуле содержится конъюнкция переменной и ее отрицания, следовательно, $\overline{Q} \wedge \overline{R} \wedge R = 0$, и сигнал по этой ветке не пройдет никогда. Значит, ее можно просто «удалить».

III ветка: $P \wedge (\overline{Q} \vee R) \wedge \overline{R}$.

Воспользуемся законом дистрибутивности:

$$P \wedge (\overline{Q} \vee R) \wedge \overline{R} = P\overline{Q}\,\overline{R} \vee PR\overline{R} = P\overline{Q}\,\overline{R} \vee 0 = P\overline{Q}\,\overline{R}.$$

*IV вет*ка: $P \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}) \wedge R$.

Раскрыв скобки, получаем:

$$P \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}) \wedge R = P\overline{Q}R \vee P\overline{R}R = P\overline{Q}R \vee 0 = P\overline{Q}R.$$

Учитывая, что ветки соединены параллельно, объединим получившиеся слагаемые знаком дизъюнкции:

$$PQ\overline{R} \vee P\overline{Q}\,\overline{R} \vee P\overline{Q}R.$$

Упростим полученную формулу с помощью равносильных преобразований. Заметим, что во втором и третьем слагаемых можно вынести за скобки общий множитель $P\overline{Q}$:

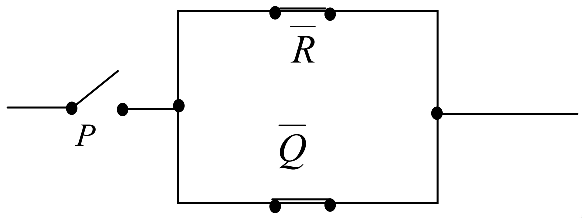
$$PQ\overline{R} \vee P\overline{Q}\,\overline{R} \vee P\overline{Q}R = PQ\overline{R} \vee P\overline{Q}(\underbrace{\overline{R} \vee R}_{1}) = PQ\overline{R} \vee P\overline{Q}.$$

Вынесем за скобки P и преобразуем выражение в скобках согласно закону дистрибутивности. Получим:

$$PQ\overline{R} \vee P\overline{Q} = P(Q\overline{R} \vee \overline{Q}) = P((Q \wedge \overline{R}) \vee \overline{Q}) =$$

$$= P \wedge (\underbrace{Q \vee \overline{Q}}_{1}) \wedge (\overline{R} \vee \overline{Q}) = P \wedge (\overline{R} \vee \overline{Q}).$$

Очевидно, упростить полученное выражение и сделать его еще короче нам не удастся. Изобразим контактную схему, отвечающую полученной формуле.



Второй способ

Можно обойтись и без элементарных преобразований. Будем придавать переменным P, Q, R различные значения (нули и единицы) и составим по данной схеме таблицу истинности:

P	Q	R	$f(P,Q,R)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Воспользовавшись картой Карно, построим минимальную ДНФ (либо КНФ) данной функции.

		$\overline{P}\overline{Q}$	$\overline{P}Q$	PQ	$P\overline{Q}$
		00	01	11	10
$\overline{R}$	0			1	1
R	1				1

Минимальная ДНФ будет иметь вид $P\overline{R} \vee P\overline{Q}$, но минимальная форма записи функции (а значит, и минимальная контрактная схема) получится, если вынести P за скобку:

$$P\overline{R} \vee P\overline{Q} = P(\overline{Q} \vee \overline{R}) = P \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}).$$

Задания к главе 3

90. Для заданных булевых функций найдите ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ с помощью равносильных преобразований и сделайте проверку с помощью таблицы истинности.

а) $(\bar{x} \Rightarrow \bar{y}) \Rightarrow (y \wedge z \Rightarrow x \wedge z)$;

б) $(x \oplus y) \Rightarrow (y \wedge z)$;

в) $(x \sim y) \Rightarrow (x \vee y \wedge z)$;

г) $(x \Rightarrow (y \downarrow z)) \Rightarrow (x \vee y)$;

д) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\overline{z \vee x} \Rightarrow y)$;

е) $\overline{x \wedge y \Rightarrow x} \vee x \wedge (y \vee z)$;

ж) $\overline{x \wedge (y \vee z)} \Rightarrow (x \wedge y \vee z)$;

з) $((x \mid y) \downarrow z) \Rightarrow (x \sim z)$;

и) $x \wedge y \Rightarrow x \sim x \wedge \bar{z} \Rightarrow \bar{y}$;

к) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \wedge x \wedge y \wedge \bar{z}$.

91. Постройте полином Жегалкина для формул:

а) $f(x, y, z) = (01111110)$;

б) $f(x, y, z) = (00001001)$;

в) $f(x, y, z) = (10000001)$;

г) $f(x, y, z) = (10110000)$;

д) $f(x, y, z) = (x \mid y) \downarrow z$;

е) $f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \wedge (y \downarrow z)$;

ж) $f(x, y, z) = ((x \Rightarrow y) \vee \bar{z}) \mid x$;

з) $f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \oplus (\bar{x} \sim z)$.

92. Установите, являются ли булевы функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ монотонными, линейными, сохраняющими 0, сохраняющими 1, самодвойственными. Образуют ли они полную систему?

а) $f_1(x_1, x_2) = x_1 \Rightarrow x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge \bar{x}_2$;

б) $f_1(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \wedge x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$;

в) $f_1(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2$, $f_2(x_1, x_2) = \bar{x}_2 \Rightarrow x_1$;

г) $f_1(x_1, x_2) = (x_1 \oplus x_2) \vee x_1$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 \oplus \bar{x}_1$;

д) $f_1(x_1, x_2) = (x_1 \downarrow \bar{x}_2)$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1$;

е) $f_1(x_1, x_2) = (1010)$, $f_2(x_1, x_2) = (0111)$.

93. Выясните, полно ли множество булевых функций F:

а) $F = \{f_1 = \bar{x}, f_2 = x \wedge (y \sim z) \sim y \wedge z, f_3 = x \oplus y \oplus z\}$;

б) $F = \{f_1 = x \wedge y \oplus y \wedge z \oplus z \wedge t, f_2 = 0, f_3 = 1, f_4 = x \vee y\}$;

в) $F = \{f_1 = (0110), f_2 = (11000011), f_3 = (10010110)\}$;

г) $F = \{f_1 = x \vee y, f_2 = (1001101111110110)\}$.

94. Найдите минимальные ДНФ и КНФ для функций:

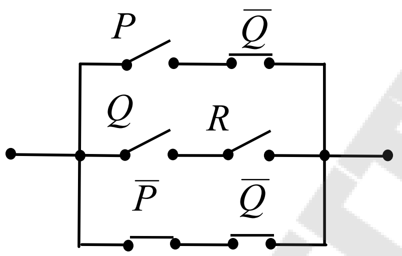
а) $f = (00111001)$; г) $f = (0000110010101111)$;
б) $f = (11010011)$; д) $f = (1111100001001100)$;
в) $f = (01111110)$; е) $f = (0000001111111101)$.

95. Задана булева функция f, значение * говорит о том, что функция не определена при соответствующих значениях переменных. Минимизируйте функцию f в классе ДНФ и КНФ.

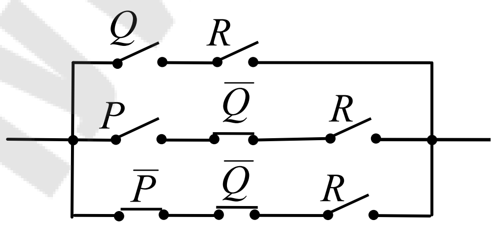
а) $f = (10*0*110)$; в) $f = (10*0*011)$;
б) $f = (01*1*000)$; г) $f = (10*1*001)$.

96. Изобразите контактную схему, реализующую булеву функцию:
а) $f(x, y, z) = (x \Leftarrow y) \wedge (y \downarrow z)$; в) $f(x, y, z) = (x \mid y) \downarrow zx$;
б) $f = (01111000)$; г) $f = (10011011)$.

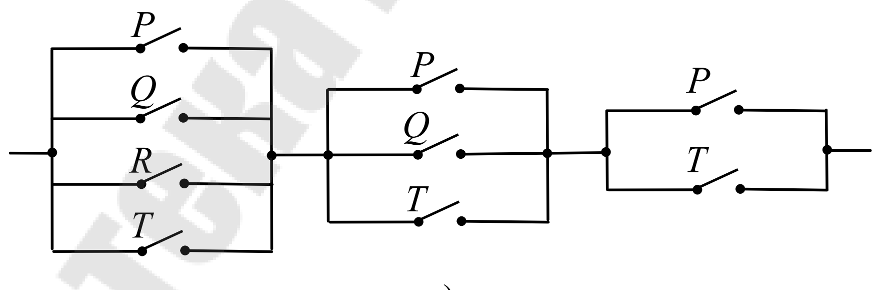
97. Упростите контактные схемы.



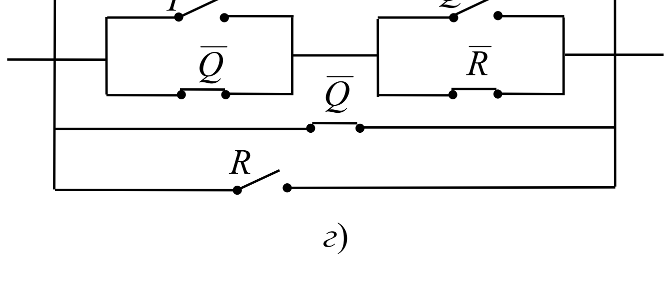
а)



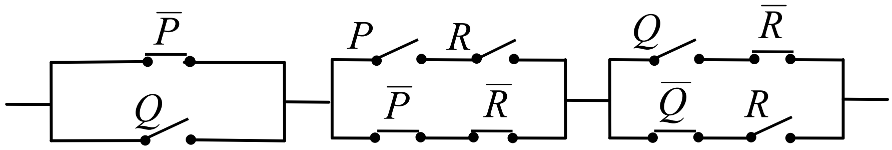
б)



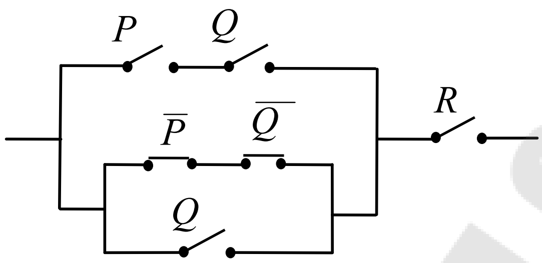
в)



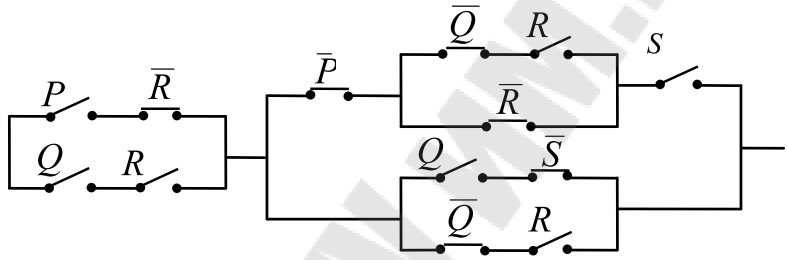
г)



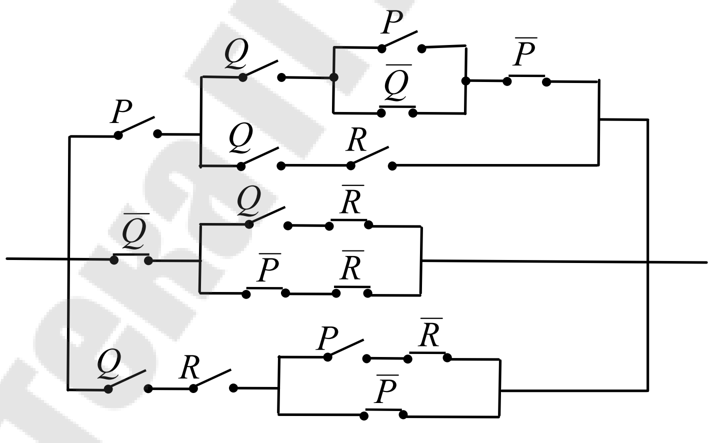
д)



е)



ж)



з)

98. Жюри состоит из трех человек. Каждый член жюри голосует «за» нажатием на свою кнопку (если голосует «против», то кнопку не нажимает). Лампочка зажигается только в том случае, если большинство членов жюри проголосовало «за». Постройте контактную схему, реализующую схему голосования этого жюри.
98. Жюри состоит из четырех человек. Предложение принимается, если за него проголосовало большинство или если голоса раздели-

лись поровну, но за предложение проголосовал председатель жюри. Постройте контактную схему, реализующую схему голосования этого жюри.

100. Постройте контактную схему, позволяющую зажигать и тушить лампочку с помощью трех независимых переключателей. Существует ли решение аналогичной задачи для n переключателей?

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение булевой функции.
2. Какие способы задания булевых функций вы знаете?
3. Сколько строк имеет таблица истинности булевой функции n переменных? Как заполняется таблица истинности?
4. Какие системы булевых функций называются полными?
5. Сформулируйте теорему о двух системах.
6. Что такое полином Жегалкина? Какие способы его построения вы знаете?
7. Какие функции составляют стандартный базис? базис Жегалкина?
8. Как определяется замкнутый класс булевых функций?
9. Какая булева функция называется линейной?
10. Какая булева функция называется монотонной?
11. Какая булева функция называется самодвойственной?
12. Какая булева функция называется сохраняющей ноль? сохраняющей единицу?
13. Как формулируется теорема Поста?
14. Что называется элементарной конъюнкцией (элементарной дизъюнкцией)?
15. Как определяется ДНФ (КНФ)?
16. Что такое СДНФ (СКНФ)? Сколько различных СДНФ может иметь отличная от нуля булева функция?
17. Как записать СДНФ (СКНФ) булевой функции по ее таблице истинности?
18. Как осуществляется минимизация булевых функций с помощью карт Карно в классе ДНФ? в классе КНФ?
19. Как осуществляется минимизация частично определенных булевых функций?
20. Соответствие между релейно-контактной схемой и булевой функцией. Минимизация релейно-контактных схем.

ОТВЕТЫ

13. а) 30; б) [22; 38]. **14.** а) 1; б) 39; в) 86. **15.** 30 %. **16.** [7; 15], [9; 28]. **17.** 30. **18.** 5; 9. **19.** 121. **20.** 79. **21.** 15; 3. **22.** 30; 7. **23.** 10; 3; 40. **36**. 2, 3, 5 – минимальные элементы, 8, 9, 10, 15 – максимальные элементы. **37.** $\varnothing$ – минимальный и наименьший элемент, A – максимальный и наибольший элемент. **38.** 24, 18 – минимальные элементы, 1 – максимальный (и наибольший) элемент**.** **42.** а) 49/5; б)10; в) 116; г) 8/99. **44.** а) 5; б) 3; 14; в) 9; г) 10; д) 8; е) 7. **45.** а) $x=18, y=8$; б) $x=3$, $n=8$; в) $x=15, y=6$. **46.** 9000; 625; 120; 24. **47.** 151200. **48.** 376992. **49.** 277200. **50.** 10^{20}. **51.** 126. **52.** $\dfrac{20!}{(5!)^4}$. **53.** 1820. **54.** 234. **55.** а) 1716; б) 1709; в) 1708; г) 700; д) 358. **57.** $\dfrac{25!}{(2!)^2(5!)^2 3!6!}$; **58.** а) 120; б) 24; в) 120; г) 24; д) 6. **60.** 35. **61.** а) $T_2=60x^4$; б) $T_3=220x^9y^{3/2}$; в) $T_7=1716a^{18}b^{14}$; г) $T_5=70m^2n^2$; д) $T_8=-3432a^{\frac{21}{2}}$; е) $T_7=1716y^{\frac{7}{2}}z^2$; $T_8=1716y^3z^{\frac{7}{3}}$. **62.** 10; $1/\sqrt{100000}$. **63.** $T_5=35z^5$. **64.** $T_4=84$. **66.** $a_n=2^n-1$. **67.** $a_n=n+2^n$. **68.** а) $a_n=5^{n+2}+5-10\cdot 3^n$; б) $a_n=n+8-n\cdot 2^{n+2}$; в) $a_n=3^n\big(2n(-1)^n+n+3\big)$; г) $a_n=\dfrac{1}{3}\big((-1)^n-2^n+n\cdot 2^{n+1}\big)$. **73.** а) $(P,Q,R)=(1,0,0)$; б) $\varnothing$; в) $(P,Q,R,S)=\{(0,0,0,1),(0,0,1,1)\}$; г) $(P,Q,R)=\{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1),(0,0,0),(0,1,0)\}$; д) $(P,Q,R)=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)\}$; е) $(P,Q)=(0,0)$. **83.** а) $(-1,1)$; б) $(-\infty;\,2]\cup[3;\,+\infty)$; в) $(-\infty;\,2]\cup[3;\,+\infty)$; г) $(-1,1)\cup(2;\,3)$; д) $\varnothing$; е) $(-\infty,\,-1]\cup[1;\,2]\cup[3;\,+\infty)$. **91.** а) $z\oplus y\oplus yz\oplus x\oplus xz\oplus xy$; б) $x\oplus xz\oplus xy$; в) $1\oplus z\oplus y\oplus yz\oplus x\oplus xz\oplus xy$; г) $1\oplus z\oplus yz\oplus x\oplus xz\oplus xyz$; д) $xy\oplus xyz$; е) $1\oplus z\oplus y\oplus yz\oplus x\oplus xz\oplus xy\oplus xyz$; ж) $1\oplus x\oplus xz\oplus xyz$; з) $1\oplus z\oplus xy$. **93.** а), б), г) – полные; в) – неполная. **94.** а) МДНФ: $\bar{x}y\vee yz\vee x\overline{yz}$, МКНФ: $(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(x\vee y)(y\vee\bar{z})$; б) МДНФ: $\overline{xy}\vee xy\vee yz$ или $\overline{xy}\vee xy\vee\bar{x}z$; МКНФ: $(x\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee y)$; в) МДНФ: $\bar{x}y\vee x\bar{z}\vee\bar{y}z$ или $\bar{x}z\vee y\bar{z}\vee x\bar{y}$; МКНФ: $(x\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})$; г) МДНФ: $x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2\vee x_1\bar{x}_4$; МКНФ: $(x_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee\bar{x}_3)\wedge(x_2\vee\bar{x}_4)$; д) МДНФ: $\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\vee x_1\bar{x}_3x_4$; МКНФ: $(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_3)\wedge(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_4)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_4)$; МДНФ:

е) $x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_4 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3$; МКНФ: $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge \wedge (x_1 \vee x_3)$. **97.** а) $\overline{Q} \vee R$; б) R; в) PT; г) $P \vee \overline{Q} \vee R$; д) $\overline{P} \wedge Q \wedge \overline{R}$; е) $R \wedge (\overline{Q} \vee \overline{P})$; ж) $Q \wedge \overline{S} \wedge (P \vee R)$; з) $QR \vee \overline{P}\overline{Q}\overline{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика : пер. с англ. / Джеймс А. Андерсон. – М. : Вильямс, 2004. – 960 с.

2. Белоусов, А. И. Дискретная математика : учеб. для вузов / А. И. Белоусов, С. Б.Ткачев ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 744 с.

3. Галушкина, Ю. И. Конспект лекций по дискретной математике / Ю. И. Галушкина, А. Н. Марьямов. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 176 с.

4. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский. – М. : Вуз. кн., 2000. – 280 с.

5. Плотников, А. Д. Дискретная математика : учеб. пособие / А. Д. Плотников. – М. : Новое знание, 2008. – 304 с.

6. Просветов, Г. И. Дискретная математика: задачи и решения : учеб. пособие / Г. И. Просветов. – М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2008. – 222 с.

7. Соболева, Т. С. Дискретная математика : учеб. для студентов вузов / Т. С. Соболева, А. В. Чечкин ; под ред. А. В. Чечкина. – М. : Академия, 2006. – 256 с.

8. Эвнин, А. Ю. Задачник по дискретной математике / А. Ю. Эвнин. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 164 с.

9. Игошин, В. И. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / В. И. Игошин. – 2-е изд. – М. : Академия, 2008. – 448 с.

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Задорожнюк Мария Викторовна
Евтухова Светлана Михайловна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебно-методическое пособие

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. Г. Мансурова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 14.12.22.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Цифровая печать. Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 5,06.
Изд. № 16.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель