

Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»**

Кафедра «Физика и электротехника»

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ПРАКТИКУМ

**для студентов второй ступени высшего
образования специальности 1-43 80 01
«Электроэнергетика и электротехника»
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2022

УДК 538.7(075.8)
ББК 31.21я73
Т38

*Рекомендовано научно-методическим советом
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 7 от 30.03.2022 г.)*

Составитель *П. С. Шаповалов*

Рецензент: зав. каф. «Электроснабжение» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *А. О. Добродей*

Техническая электродинамика : практикум для студентов второй ступени высш.
Т38 образования специальности 1-43 80 01 «Электроэнергетика и электротехника» днев. и
заоч. форм обучения / сост. П. С. Шаповалов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2022. –
37 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное
место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа:
<https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

Изложены теоретические основы технической электродинамики.
Для студентов специальности 1-43 80 01 «Электроэнергетика и электротехника» дневной
и заочной форм обучения.

УДК 538.7(075.8)
ББК 31.21я73

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2022

ВВЕДЕНИЕ

В современной технике широко применяются электротехнические устройства и линии передач электроэнергии в которых используются различные волновые электромагнитные процессы (например, направляемые волны в разнообразных линиях передачи и линейных устройствах, излучение и прием радиоволн, распространение этих волн в различных средах и др.). Их особенности работы и многообразные свойства могут быть поняты только при помощи законов электродинамики. Техническая электродинамика как раз и занимается изучением этих законов, исследованием на их основе технических устройств, в которых применяются различные способы управления электромагнитными процессами. В практикуме систематизированы основные положения электродинамики, на их базе рассмотрены, используемые в электротехнике, обсуждается практическое применение этих устройств.

ГЛАВА 1

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

1.1 Поле электрического заряда. Закон Кулона

Электрические заряды бывают двух видов: положительные и отрицательные. Они, обычно, обозначаются знаком «+», «-». Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.

Для электрических зарядов выполняется принцип дискретности: Макро заряды тел кратны целому числу элементарному заряду, т.е.

$$q = Ne, \quad (1)$$

где N - целое число, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – абсолютный заряд электрона и протона. Отрицательный заряд тела означает что суммарное число электрон в теле больше суммарного положительного заряда атомных ядер (суммарное число протонов).

Для электрических зарядов выполняется закон сохранения энергии: В замкнутой системе суммарный заряд системы сохраняется.

Пусть в некотором объеме V , ограниченном поверхностью S сосредоточен совокупный электрический заряд q . Тогда из-за малых размеров электронов, то можно считать , что в рассматриваемом объеме электрический заряд распределен не дискретно, а непрерывно. Тогда для его характеристики используем объемную плотность заряда

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (1a)$$

А если заряд распределен поверхностно по телу, то используется поверхностную плотность заряда

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (16)$$

Когда заданы законы распределения величин ρ и σ , тогда совокупный заряд q определяется как интеграл

$$q = \int_V \rho dV, \quad (2a)$$

объемного распределение заряда, и

$$q = \int_V \rho dV, \quad (26)$$

для поверхностного распределения заряда.

Взаимодействие неподвижных, постоянных во времени зарядов подчиняются закону Кулона (назван в именованием французского ученого Ш. Кулона 1785 г.). Пусть два неподвижных, постоянных во времени точечных заряда разнесены в пространстве (в вакууме) на расстояние r . Говоря о точечных зарядах, предполагают, что размеры тел, на которых распределены заряды q , значительно меньше расстояния r . Сила взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорционально величинам этих зарядов, и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Если заряды одного знака, то будет наблюдаться отталкивание зарядов. Если заряды разного знака, они будут притягиваться, т.е.

$$F_{кл} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3)$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от системы отсчета. В СИ $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

1.2 Напряженность и потенциал электрического поля

Для описания взаимодействия электрических зарядов используется теория близкодействия. Заряд создает в пространстве электрическое поле, который не действует на данный заряд, но действует, с конечной скоростью, на другие заряды, расположенные в пространстве. Поля между собой не взаимодействуют. Для описания электрических полей используется силовая характеристика поля – напряженность. Напряженности электростатического поля это сила, действующая на единичный положительный заряд помещенный в данную точку поля, т.е.

$$E = \frac{F}{q}. \quad (4)$$

Напряженность E измеряется в В/м. Из закона Кулона (подставляя (3) в (4)), получим напряженность поля точечного заряда.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (4)$$

Так как вектор напряженности направлен по силе действующей на положительный заряд, то \mathbf{E} всегда направлен от положительного заряда к отрицательному заряду или в бесконечность.

Электрическое поле является консервативным полем, т.е. работа сил электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю. Поэтому для электростатического поля вводят потенциал. Потенциал φ энергетическая характеристика поля равная работе по перемещению единичного положительного точечного заряда из данной точки поля на бесконечность, т.е.

$$\varphi = \frac{A}{q} . \quad (5)$$

Измеряется потенциал в вольтах (В). Не возможно удалить заряд на бесконечность, поэтому на практике чаще используется разность потенциалов между двумя точками поля (иногда называют эту величину напряжением).

Разность потенциалов между двумя точками поля – это работа по перемещению единичного положительного заряда между двумя этими точками, т.е.

$$\Delta\varphi = \frac{A}{q} . \quad (6)$$

Потенциал точечного заряда равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} . \quad (7)$$

Для электростатического поля верна теорема Остроградского-Гаусса: Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность равен сумме зарядов внутри данной поверхности деленную на электрическую постоянную ϵ_0 , т.е.

$$\oint_S \mathbf{E} dS = \frac{q}{\epsilon_0} . \quad (8)$$

Уравнение Остроградского-Гаусса для протяженных зарядов можно записать в таком виде:

$$\oint_S \mathbf{E} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV . \quad (8a)$$

В уравнении (8а) используем теорему Гаусса

$$\oint_S \mathbf{A} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV. \quad (9)$$

Тогда окончательно получим

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (10)$$

Уравнение (10), является одним из уравнений системы Максвелла для электромагнитного поля. Физический смысл уравнения (10) – существуют электрические заряды, которые являются источником электростатического поля.

Для электрического поля Пуассоном было получено уравнение

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (10a)$$

Из (10) и (10а) получим связь между напряженностью и потенциалом электрического поля

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \quad (11)$$

Если ось x направление наибольшего изменения потенциала электрического поля, то уравнение (11) можно переписать в следующем виде:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (11a)$$

Если существует система точечных электрических зарядов, то для электрического поля выполняется принцип суперпозиции. Напряженность поля системы электрических зарядов равен векторной сумме напряженностей полей создаваемой каждым зарядом в отдельности, т.е.

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i, \quad (12)$$

где \mathbf{E}_i – напряженность поля создаваемого i – тым зарядом.

1.3 Электрическое поле в диэлектриках

Диэлектриками называются вещества, не способные проводить электрический ток. В диэлектриках в отличие от проводников нет свободных носителей заряда.

Все молекулы диэлектрика электрически нейтральны: суммарный заряд электронов и атомных ядер, входящих в состав молекулы, равен нулю. Тем не менее, молекулы обладают электрическими свойствами. Молекулу можно рассматривать как электрический диполь с электрическим моментом:

$$p = |q| \cdot l, \quad (13)$$

где q - суммарный положительный заряд всех атомных ядер в молекуле;

l - вектор, проведенный из «центра тяжести» электронов в молекуле в «центр тяжести» положительных зарядов атомных ядер.

Диэлектрик называется неполярным, если в отсутствие внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах этого диэлектрика совпадают ($l = 0$) и соответственно дипольные моменты молекул равны нулю ($p = 0$). Молекулы, в которых «центры тяжести» положительного и отрицательного зарядов совпадают, называются симметричными.

Полярным диэлектриком называется такой диэлектрик, молекулы (атомы), которого имеют электроны, расположенные несимметрично относительно атомных ядер (H_2O , спирты, поливинилхлорид и др.). В таких молекулах «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают даже в отсутствие внешнего электрического поля и обладают дипольным моментом.

Однако дипольные моменты полярных молекул вследствие теплового движения ориентированы в пространстве хаотично и их результирующий момент объема тела равен нулю.

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле происходит поляризация диэлектрика, состоящая в том, что в любом микроскопически малом его объеме ΔV возникает отличный от нуля суммарный дипольный электрический момент молекул.

В зависимости от строения молекул (атомов) диэлектрика различают три типа поляризации: ориентационную, электронную и ионную.

Ориентационная поляризация наблюдается у полярных диэлектриков. Внешнее электрическое поле стремится ориентировать дипольные моменты полярных молекул (жестких диполей) по направлению вектора напряженности поля.

Электронная (деформационная) поляризация осуществляется у неполярных диэлектриков. Под действием внешнего электрического поля у молекул диэлектриков этого типа возникают индуцированные дипольные моменты, направленные вдоль, т.е. по направлению вектора E .

Ионная поляризация проходит в твердых диэлектриках, имеющих ионную кристаллическую решетку. Внешнее электрическое поле вызывает в таких диэлектриках смещение всех положительных ионов в направлении напряженности E поля, а всех отрицательных ионов – в противоположную сторону.

Количественной мерой поляризации диэлектрика служит вектор P , называемый поляризованностью (вектором поляризации) и равный отношению суммарного электрического дипольного момента малого объема диэлектрика к величине этого объема.

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\Delta V}, \quad (14)$$

где p_i - электрический дипольный момент i -й молекулы;

n - общее число молекул в объеме ΔV .

Для большого класса диэлектриков, поляризованность диэлектрика линейно зависит от напряженности поля E :

$$P = \chi \varepsilon_0 E, \quad \chi = \varepsilon - 1, \quad (15)$$

где χ – безразмерная величина, называемая диэлектрической восприимчивостью ($\chi > 0$);

ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Диэлектрическая проницаемость среды показывает отношение силы взаимодействия между двумя зарядами в вакууме $F = qE$, к силе взаимодействия тех же зарядов в среде, диэлектрическая проницаемость среды показывает во сколько раз электрическое поле зарядов в вакууме сильнее электрического поля тех же зарядов в диэлектрике.

При помещении диэлектрика во внешнем электростатическом поле он поляризуется, т.е. приобретает отличный от нуля дипольный момент; происходит смещение зарядов: положительными смещаются по полю, отрицательные – против поля.

В результате этого на верхней грани диэлектрика, обращенного к положительно заряженной плоскости, будет избыток отрицательных зарядов, а на нижней грани диэлектрика, обращенной к отрицательно заряженной плоскости – избыток положительных зарядов. Заряды, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называются связанными зарядами.

Появление связанных зарядов приводит к возникновению дополнительного электрического поля с напряженностью E' , которое направлено против внешнего поля E_0 и ослабляет его. Напряженность электрического поля, согласно формулы $E = \frac{E_0}{\epsilon}$, зависит от свойств среды: нормальная составляющая напряженности поля при переходе из вакуума в среду всегда уменьшается во столько раз, во сколько возрастает диэлектрическая проницаемость. На границе двух диэлектриков вектор напряженности претерпевает скачкообразное изменение, создавая тем самым неудобства при расчете электростатических полей. Поэтому помимо вектора напряженности вводится вектор электрического смещения, который для электрически изотропной среды равен: $D = \epsilon_0 \epsilon E$.

Вектор электрического смещения D характеризует электрическое поле, создаваемое свободными зарядами, но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике: поток вектора электрического смещения электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность, равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.

ГЛАВА 2 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

2.1 Сила Лоренца

Опыт показывает, что сила F , действующая на точечный заряд q , зависит в общем случае не только от положения этого заряда, но и от его скорости v . Соответственно этому силу F разделяют на две

составляющие — электрическую F_e (она не зависит от движения заряда) и магнитную F_m (она зависит от скорости заряда). В любой точке пространства направление и модуль магнитной силы зависят от скорости \mathbf{v} заряда, причем эта сила всегда перпендикулярна вектору \mathbf{v} ; кроме того, в любом месте магнитная сила перпендикулярна определенному в данном месте направлению и, наконец, ее модуль — пропорционален той составляющей скорости, которая перпендикулярна этому выделенному направлению.

Все эти свойства магнитной силы можно описать, если ввести понятие магнитного поля. Характеризуя это поле вектором \mathbf{B} , определяющим выделенное в каждой точке пространства направление, запишем выражение для магнитной силы в виде

$$\mathbf{F}_m = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (1)$$

Тогда полная электромагнитная сила, действующая на заряд q :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (2)$$

Ее называют силой Лоренца. Следует подчеркнуть, что на *покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует*. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического. Магнитное поле действует только на движущийся заряд.

Вектор \mathbf{B} характеризует силовое действие магнитного поля на движущийся заряд и, следовательно, является в этом отношении аналогом вектора \mathbf{E} , характеризующего силовое действие электрического поля.

Важной особенностью магнитной силы является то, что она всегда перпендикулярна вектору скорости заряда, поэтому *работы над зарядом не совершает*. Это значит, что в постоянном магнитном поле энергия движущейся заряженной частицы всегда остается неизменной, как бы частица ни двигалась.

В нерелятивистском приближении сила Лоренца (2), как и любая другая сила, не зависит от выбора системы отсчета (инерциальной). Вместе с тем магнитная составляющая силы Лоренца меняется при переходе от одной системы отсчета к другой (из-за \mathbf{v}). Поэтому должна меняться и электрическая составляющая $q\mathbf{E}$. Отсюда следует, что разделение полной силы \mathbf{F} - силы Лоренца - на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета. Без указания системы отсчета такое разделение не имеет смысла.

2.2 Магнитное поле равномерно движущегося заряда

Опыт показывает, что само магнитное поле порождается движущимися зарядами (токами). В результате обобщения экспериментальных данных был получен элементарный закон, определяющий поле \mathbf{B} точечного заряда q , движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью \mathbf{v} . Этот закон записывается в виде

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q [\mathbf{v} \mathbf{r}]}{4\pi r^3}, \quad (3)$$

где μ_0 – магнитная постоянная; коэффициент $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения. Конец радиуса-вектора \mathbf{r} неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью \mathbf{v} , поэтому вектор \mathbf{B} в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени.

В соответствии с формулой (3) вектор \mathbf{B} направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы \mathbf{v} и \mathbf{r} , причем вращение вокруг вектора \mathbf{v} в направлении вектора \mathbf{B} образует с направлением \mathbf{v} правовинтовую систему.

Величину \mathbf{B} называют магнитной индукцией. Единицей магнитной индукции служит тесла (Тл).

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i.$$

2.3 Закон Био–Савара

Рассмотрим вопрос о нахождении магнитного поля, создаваемого *постоянными* электрическими токами. Этот вопрос будем решать, исходя из закона (3), определяющего индукцию поля \mathbf{B} равномерно движущегося точечного заряда. Подставим в (3) вместо q заряд ρdV , где dV – элементарный объем, ρ – объемная плотность заряда, являющегося носителем тока, и учтем, что $\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$. Тогда формула (3) приобретет следующий вид:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j}\mathbf{r}]}{r^3} dV. \quad (4)$$

Если же ток I течет по *тонкому* проводу с площадью поперечного сечения ΔS , то

$$\mathbf{j} dV = \mathbf{j} \Delta S dl = I d\mathbf{l}, \quad (5)$$

где dl — элемент длины провода. Введя вектор $d\mathbf{l}$ в направлении тока I , перепишем предыдущее равенство в виде:

$$\mathbf{j} dV = I d\mathbf{l}.$$

Векторы $\mathbf{j} dV$ и $I d\mathbf{l}$ называют соответственно *объемным* и *линейным элементами тока*. Произведя в формуле (4) замену объемного элемента тока на линейный, получим

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (6)$$

Формула (6) выражает **закон Био — Савара**.

Полное поле \mathbf{B} в соответствии с принципом суперпозиции определяется в результате интегрирования выражений (6) по всем элементам тока:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (7)$$

Приведем несколько простейших примеров нахождение индукции магнитного поля тока, имеющего определенную симметрию.

Пример 1. Магнитное поле прямого тока, т. е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рис. 1)

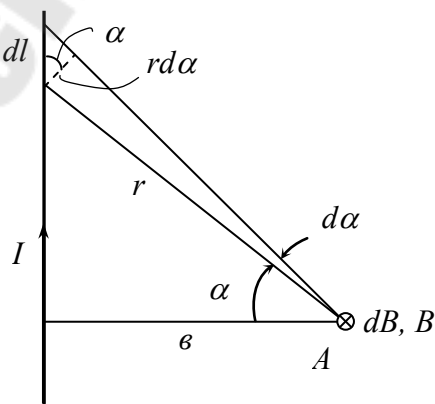


Рис. 1

Согласно (6) в произвольной точке A векторы $d\mathbf{B}$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление - за плоскость рисунка. Поэтому сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей dB , причем

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \cos \alpha}{4\pi r^2}. \quad (8)$$

Из рисунка видно, что $dl \cos \alpha = r d\alpha$ и $r = b / \cos \alpha$. Поэтому

$$dB = \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{4\pi b}.$$

Интегрируя последнее выражение по всем элементам тока, что эквивалентно интегрированию по α от $-\pi/2$ до $\pi/2$, находим

$$B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi b}. \quad (9)$$

Пример 2. Магнитное поле на оси кругового тока. На рис. 2 показан вектор $d\mathbf{B}$ от элемента тока $I dl$, находящегося справа. От всех элементов тока будет образовываться конус векторов $d\mathbf{B}$, и легко сообразить, что результирующий вектор \mathbf{B} в точке A будет направлен вверх по оси Z . Это значит, что для нахождения модуля вектора \mathbf{B} достаточно сложить проекции векторов $d\mathbf{B}$ на ось Z . Каждая такая проекция имеет вид

$$dB_z = dB \cos \beta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \beta,$$

где учтено, что угол между элементом dl и радиусом-вектором \mathbf{r} равен $\pi/2$, поэтому синус равен единице. Интегрируя это выражение по всем dl (это дает $2\pi R$) и, учитывая, что $\cos \beta = R/r$ и $r = (z^2 + R^2)^{1/2}$, получаем

$$B = \frac{\mu_0 2\pi R^2 I}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (10)$$

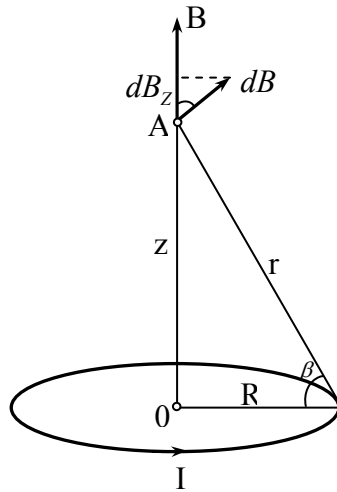


Рис. 2

Отсюда следует, что в центре витка с током ($z = 0$) и на расстоянии $z \gg R$ модуль вектора \mathbf{B} равен

$$B_{z=0} = \frac{\mu_0 2\pi I}{4\pi R}, \quad (11a)$$

$$B_{z \gg R} = \frac{\mu_0 2\pi R^2 I}{4\pi z^3}. \quad (11б)$$

2.4 Электромагнитной индукция

В 1831 г. Фарадей экспериментально открыл явление электромагнитной индукции. Оно заключается в том, что в замкнутой проводящей рамке при изменении магнитного потока (поток \mathbf{B}), охватываемого этой рамкой, возникает электрический ток – его назвали индукционным. Индукционный ток можно вызвать тремя способами:

- 1) перемещая рамку P в магнитном поле (рис.3);
- 2) изменяя угол между вектором магнитной индукции \vec{B} , который пронизывает рамку и плоскостью рамки;
- 3) изменяя магнитное поле;
- 4) одновременно перемещая рамку в магнитном поле и изменяя магнитное поле.

Во всех этих случаях гальванометр показывает наличие индукционного тока в рамке (рис. 3).

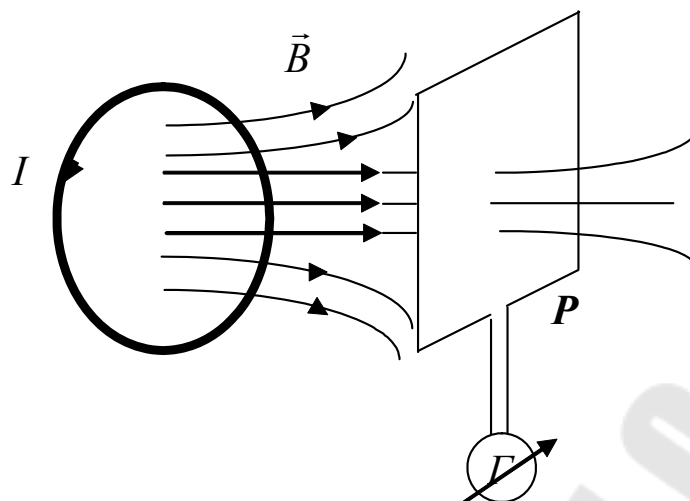


Рис. 3

Если поток магнитной индукции Φ сквозь рамку изменяется со временем, то в нем возникает ЭДС индукции ε , которая определяется выражением:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (12)$$

где $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ - поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через поверхность площади S . Вектор площади \mathbf{S} вводится следующим образом

Знак минус в равенстве (12) означает: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей (правило Ленца). То есть, индукционный ток (ток в рамке) создает свой магнитный поток, который препятствует изменению магнитного потока, вызывающего ЭДС индукции.

Если рамка неподвижна, то для возникновения индукционного тока в ней необходимо переменное магнитное поле. Для создания переменного магнитного поля по витку 1 (рис. 3) пропускают переменный ток. Переменный ток, протекая по витку, вызывает изменения индукции магнитного поля, и, соответственно, изменяется магнитный поток, пронизывающий рамку. В рамке возникает ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}, \quad (13)$$

где L – индуктивность контура.

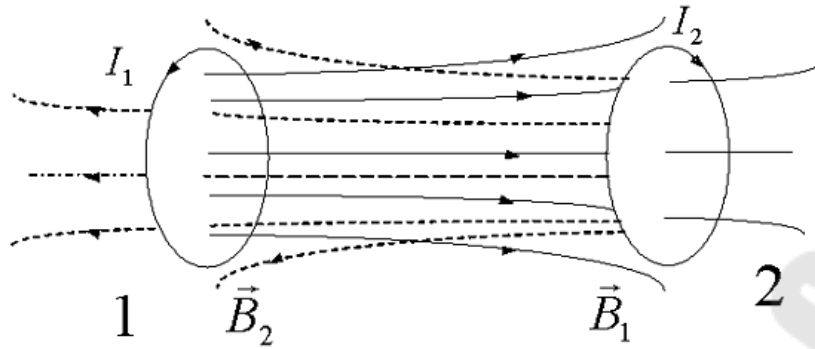


Рис. 4

Теперь рассмотрим два неподвижных витка, которые расположены на некотором расстоянии друг от друга и закреплены жестко (рис. 4). Если по витку 1 течет ток I_1 , то он создает магнитный поток Φ_1 , часть которого пронизывает виток 2 (поле, создающее этот поток, изображено на рис. 4 сплошными линиями). Обозначим через Φ_{12} ту часть магнитного потока, которая пронизывает виток 2, тогда

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1, \quad (14)$$

где L_{12} – коэффициент взаимной индукции первого витка со вторым.

Если ток в первом витке изменяется со временем $I(t)$, то, соответственно, изменяется и магнитный поток, пронизывающий поверхность, охватываемую витком 2, следовательно, в последнем наводится ЭДС взаимной индукции

$$\varepsilon_2 = - \frac{d\Phi_{12}}{dt}. \quad (15)$$

Запишем равенство (15) с учетом (14):

$$\varepsilon_2 = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}. \quad (16)$$

Если в витке 2 течет ток I_2 , то он создает магнитный поток Φ_2 (его поле изображено на рис. 4 штриховыми линиями).

Поток магнитной индукции через виток 1 будет

$$\Phi_{21} = L_{21} I_2.$$

Если поток Φ_{21} изменяется, то в первом витке индуцируется ЭДС ε_1 , которая равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока Φ_{21} , созданного током I_2 :

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt} . \quad (17)$$

Явление возникновения ЭДС в одном из витков при изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией. В этом случае говорят, что между витками существует магнитная связь. Наличие магнитной связи между витками проявляется в том, что при всяком изменении силы тока в одном из витков, в другом появляется ЭДС индукции.

Если витки 1 и 2 поменять местами и проделать все предыдущие расчеты (в условиях вакуума), то получим, что $L_{12} = L_{21}$, т. е. коэффициенты L_{12} и L_{21} назвали взаимной индуктивностью двух витков. Взаимная индуктивность зависит от формы и расположения витков в пространстве, а также от магнитных свойств окружающей среды.

Если же пространство между витками заполнено однородной средой, например ферромагнетиком, то взаимная индуктивность увеличивается в $\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)$ раз по сравнению с взаимной индуктивностью тех же витков в вакууме.

Определим взаимную индуктивность двух катушек (рис.4). Пусть питание катушки 1 осуществляется от источника переменного тока (ГНЧ) через резистор R , величина которого выбирается таким образом, чтобы выполнять неравенство $R \gg \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}$, где L_1 – индуктивность катушки 1; R_1 – активное сопротивление катушки 1.

Так как напряжение, подаваемое от генератора на катушку через резистор R , изменяется во времени по гармоническому закону $U = U_0 \cos(\omega t)$, то сила тока I_1 , текущего через катушку 1, будет:

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{U_0 \cos \omega t}{R} = I_{01} \cos \omega t . \quad (18)$$

Переменный ток I_1 , протекающий по катушке 1, создает ЭДС индукции ε_2 в катушке 2. Амплитуда ЭДС индукции ($\sin \omega t = 1$)

$$\varepsilon_{02} = L_{12} \frac{U_0}{R} \omega = L_{12} \frac{U_0}{R} 2\pi\nu , \quad (19)$$

следовательно,

$$L_{12} = \frac{\varepsilon_{02} R}{2\pi\nu \cdot U_0} . \quad (20)$$

Если катушки поменять местами, то можно определить L_{21} . Он будет

$$L_{21} = \frac{\varepsilon_{01} R}{2\pi\nu \cdot U_0}, \quad (21)$$

где ν – частота переменного тока;

U_0 и ε_0 – амплитудное значение напряжения и ЭДС индукции, соответственно.

Учитывая, что, $U_0 = U_{\text{д}} \sqrt{2}$; $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{д}} \sqrt{2}$, равенства (20) и (21) примут вид:

$$L_{12} = \frac{\varepsilon_{\text{д}2} R}{2\pi\nu \cdot U_{\text{д}}}; \quad (22)$$

$$L_{21} = \frac{\varepsilon_{\text{д}1} R}{2\pi\nu \cdot U_{\text{д}}}, \quad (23)$$

где $\varepsilon_{\text{д}1}$ – индуцируемая ЭДС в катушке 1;

$U_{\text{д}}$ – величина напряжения на катушке.

Таким образом, по формулам (22) и (23) можно рассчитать коэффициент взаимной индукции первой катушки со второй L_{12} и второй с первой L_{21} .

По результатам измерений рассчитывают коэффициент взаимной индуктивности первой катушки со второй. Затем катушки меняют местами посредством переключателей 5 и 6 и определяют взаимную индуктивность катушки 2 с катушкой 1.

ГЛАВА 3 **СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА** **В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ**

3.1 Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Система уравнений, состоящая из уравнений Максвелла для электромагнитного поля представляет собой единую систему уравнений, описывающую все явления, обусловленные электромагнитным взаимодействием. Поэтому, строго говоря, их необходимо решать совместно в задачах электродинамики. Однако в такой наиболее общей

постановке решать задачи о взаимодействии электромагнитного поля с веществом чрезвычайно трудно. Сложность проблемы заключается в том, что вещество состоит из громадного количества частиц, движение которых каждой в отдельности невозможно описать. С такой проблемой сталкиваются в классической механике при попытках описать механическое движение газов, жидкостей и твердых тел. Чтобы обойти эту трудность физикам приходилось строить определенные модели механических систем: модель абсолютно твердого тела, модель сплошной среды и др. При изучении взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем также приходится вводить некоторые модели. Одной из таких широко употребляемых, является модель сплошной среды, состоящая из электрических диполей (*диэлектрик*). Эта модель электрического диполя играет очень важную роль в физике, так как атомы и молекулы представляют собой системы заряженных частиц, которые в целом нейтральны, но могут обладать отличным от нуля дипольным моментом и поэтому создавать электрическое поле.

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света.

Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

Здесь вектор \mathbf{E} - вектор напряженности электрического поля, \mathbf{B} - вектор индукции магнитного поля.

Первое из этих уравнений связывает значение \mathbf{E} с изменениями вектора \mathbf{B} во времени и является по существу выражением закона электромагнитной индукции. Оно показывает, что источником вихревого поля вектора \mathbf{E} является меняющееся со временем вихревое магнитное поле. Второе уравнение указывает на отсутствие источников магнитного поля, т.е. магнитных зарядов, как в вакууме, так и в намагниченном веществе.

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (4)$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ - вектор электрического смещения, $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ - напряженность магнитного поля, \mathbf{M} - намагниченность вещества, \mathbf{P} - вектор поляризации среды, \mathbf{j} - вектор плотности тока, ρ - объемная плотность заряда.

Первое уравнение устанавливает связь между токами проводимости и токами смещения, и порождаемым ими магнитным полем. Второе показывает, что источниками вектора \mathbf{D} служат сторонние заряды.

Вышеперечисленные уравнения представляют собой дифференциальную форму уравнений Максвелла. Можно отметить, что в первую пару уравнений входят только основные характеристики поля - \mathbf{E} и \mathbf{B} . Во второй паре фигурируют только вспомогательные величины \mathbf{D} и \mathbf{H} .

Можно отметить, что вид уравнений (2) и (4) не зависит от наличия среды, в то время как векторы \mathbf{D} и \mathbf{H} , а также величины ρ и \mathbf{j} , входящие в уравнения (3) и (4), зависят от свойств вещества и условий, в которых оно находится. Любое макроскопическое тело, рассматриваемое как сплошная среда, состоит из заряженных частиц - электронов и ядер, обладающих также и магнитными моментами, и поэтому взаимодействующих с электромагнитным полем, являясь в то же время и его источниками. Таким образом, величины \mathbf{D} , \mathbf{H} , ρ и \mathbf{j} следует определять, исходя из электрических и магнитных свойств вещества.

Выводя формулу (1), Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве поля \mathbf{E}_v , независимо от присутствия в пространстве проводящего контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование в соответствующих точках пространства электрического поля.

Рассмотрим случай электромагнитной индукции, когда проводящий контур, в котором индуцируется ток, неподвижен, а изменения магнитного потока обусловлены изменениями магнитного поля. Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изме-

нения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители тока. Эти сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в проводе; они также не могут быть магнитными силами, потому что такие силы над зарядами работы не совершают. Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в проводе электрическим полем. Обозначим напряженность этого поля \mathbf{E}_B (это обозначение является вспомогательным так же как и \mathbf{E}_q). Электродвижущая сила равна циркуляции вектора \mathbf{E}_B по данному контуру:

$$\varepsilon_i = \oint \mathbf{E}_B d\vec{l} \quad (5)$$

Подстановка в формулу $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ выражения (5) для ε_i и выражения $\int \mathbf{B} d\mathbf{S}$ для Φ приводит к соотношению

$$\oint \mathbf{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

(интеграл в правой части берется по произвольной поверхности, опирающейся на контур). Поскольку контур и поверхность неподвижны, операции дифференцирования по времени и по поверхности можно поменять местами:

$$\oint \mathbf{E}_B d\vec{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad (6)$$

В связи с тем, что вектор \mathbf{B} зависит, вообще говоря, как от времени, так и от координат, то можно написать под знаком интеграла символ частной производной по времени (интеграл $\int \mathbf{B} d\mathbf{S}$ является функцией только времени).

Левую часть равенства (6) преобразуем по теореме Стокса. В результате получится:

$$\int_S [\nabla \mathbf{E}_B] d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Ввиду произвольности выбора поверхности интегрирования должно выполняться равенство

$$[\nabla \mathbf{E}_B] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (7)$$

Ротор поля E_B в каждой точке пространства равен взятой с обратным знаком производной по времени от вектора B .

Это поле E_B , порождающееся изменением магнитного поля, существенно отличается от порождаемого электрическими зарядами электрического поля E_q . Электростатическое поле потенциально, его линии начинаются и заканчиваются на зарядах. Ротор вектора E_q в любой точке равен нулю:

$$[\nabla E_q] = 0.$$

Согласно (7) ротор вектора E_B отличен от нуля. Следовательно, поле E_B так же, как и магнитное является вихревым. Линии напряженности E_B замкнуты.

Таким образом, электрическое поле может быть как потенциальным (E_q) так и вихревым (E_B). В общем случае электрическое поле складывается из этих двух полей. Сложив вместе E_q и E_B , получим следующее уравнение:

$$[\nabla E] = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (8)$$

Существование взаимосвязи между электрическим и магнитным полями служит причиной того, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, электростатическое поле создается системой неподвижных зарядов в одной системе координат, однако они могут двигаться относительно другой инерциальной системы отсчета и тогда они будут во второй системе подвижными, следовательно, будут создавать магнитное поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета оказывается «чисто» электрическим или «чисто» магнитным, относительно других систем отсчета будет представлять собой совокупность электрического и магнитных полей, образующих единое электромагнитное поле.

Выводя формулу (3), Максвелл пересмотрел уравнения для ротора вектора H для случая стационарного (не изменяющегося со временем) электромагнитного поля, где ротор вектора H равен в каждой точке плотности тока проводимости:

$$[\nabla H] = j, \quad (9)$$

где вектор \mathbf{j} связан с плотностью заряда в той же точке уравнением непрерывности:

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt} . \quad (10)$$

Электромагнитное поле может быть стационарным лишь при условии, что плотность заряда ρ и плотность тока \mathbf{j} не зависят от времени. В этом случае согласно (6) дивергенция \mathbf{j} равна нулю.

Поэтому можно выяснить, является ли справедливым уравнение (6) справедливым в случае изменяющихся со временем полей. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущим при зарядке конденсатора от источника постоянного напряжения U (рис. 6).

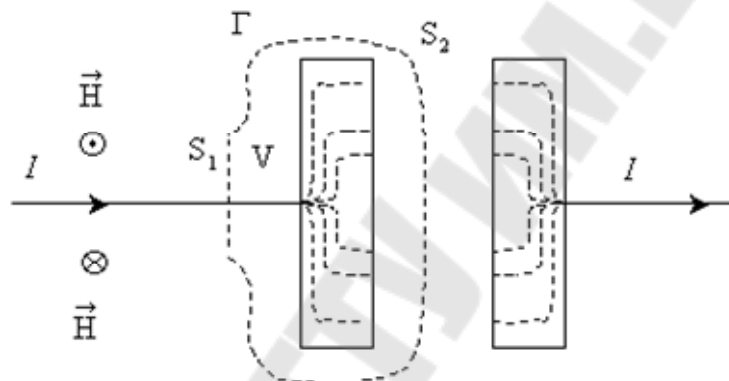


Рис. 6

Этот ток непостоянен во времени (в момент, когда напряжение на конденсаторе становится равным U , ток прекращается). Линии тока проводимости терпят разрыв в промежутке между обкладками конденсатора.

Возьмем круговой контур Γ , охватывающий провод, по которому течет ток к конденсатору, и проинтегрируем соотношение (5) по пересекающей провод поверхности S_1 , ограниченной контуром:

$$\oint_{S_1} [\nabla \mathbf{H}] d\mathbf{S} = \oint_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S} .$$

Преобразовав левую часть по теореме Стокса, получим циркуляцию вектора \vec{H} по контуру Γ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} dl = \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S} = I \quad (11)$$

(I – сила тока заряжающего конденсатор). Прделав такие же вычисления для поверхности S_2 , придем к явно неверному соотношению:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (12)$$

Полученный результат указывает на то, что в случае изменяющихся со временем полей уравнение (9) перестает быть справедливым. Напрашивается вывод, что в этом уравнении отсутствует слагаемое, зависящее от произвольных полей во времени. Для стационарных полей это слагаемое обращается в нуль.

На неправомочность уравнения (9) в случае нестационарных полей указывает также, следующие соображения. Возьмем дивергенцию от обеих частей соотношения (9):

$$\nabla[\nabla\mathbf{H}] = \nabla\mathbf{j}.$$

Дивергенция ротора должна быть обязательно равна нулю. Таки образом, можно прийти к выводу, что дивергенция вектора \mathbf{j} также должна быть всегда равной нулю. Однако этот вывод противоречит уравнению непрерывности, где \mathbf{j} отлична от нуля.

Чтобы согласовать уравнения (9) и (10), Максвелл ввел в правую часть уравнения (9) дополнительное слагаемое. Естественно, что это слагаемое должно иметь размерность плотности тока. Максвелл назвал его плотностью *тока смещения*. Таким образом, согласно Максвеллу уравнение (3.1) должно иметь вид:

$$[\nabla\mathbf{jH}] = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{смещ.} \quad (13)$$

Сумму тока проводимости и тока смещения принято называть полным током. Плотность полного тока равна:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{полн.} \quad (14)$$

Если положить дивергенцию тока смещения равной дивергенции тока проводимости, взятой с обратным знаком,

$$\mathbf{j}_{смещ.} = -\nabla\mathbf{j}, \quad (15)$$

то дивергенция правой части уравнения (13), так же как и дивергенция левой части, всегда будет равна нулю.

Заменив в (15) $\nabla\mathbf{j}$ согласно (10) через $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, получим следующее выражение для дивергенции тока смещения:

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{смещ.}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (16)$$

Чтобы связать ток смещения с величинами, характеризующими изменение электрического поля со временем, воспользуемся соотношением:

$\nabla \mathbf{D} = \rho$. Продифференцировав это соотношение по времени, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \mathbf{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Теперь поменяем в левой части порядок дифференцирования по времени и по координатам. В результате придем к следующему выражения для производной ρ по t .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right).$$

Подстановка этого выражения в формулу (16) дает:

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{смещ.}} = \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right).$$

Отсюда

$$\mathbf{j}_{\text{смещ.}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (17)$$

Подставив выражение (17) в формулу (14), придем к уравнению

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Каждое из векторных уравнений (1) и (3) эквивалентно трем скалярным уравнениям, связывающим компоненты векторов, стоящих в левой и правой частях равенств. Воспользовавшись правилом раскрытия дифференциальных операторов, можно записать их в следующем виде:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

для первой пары уравнений, и:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \quad (19)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (20)$$

для второй.

Всего получилось 8 уравнений, в которых входят 12 функций (по три компоненты векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} .) Поскольку число уравнений меньше числа известных функций, уравнений (1) - (4) недостаточно для нахождения полей по заданным распределениям зарядов и токов. Чтобы осуществить расчет полей, нужно дополнить уравнения Максвелла уравнениями, связывающими \mathbf{D} и \mathbf{j} с \mathbf{E} , а также \mathbf{H} с \mathbf{B} . Эти уравнения имеют вид.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (21)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (22)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (23)$$

Совокупность этих уравнений образуют основу электродинамики покоящихся сред.

Уравнения:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (24)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{l} = 0, \quad (25)$$

(первая пара) и

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}, \quad (26)$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad (27)$$

(вторая пара) представляют собой уравнения Максвелла в интегральной форме.

Уравнение (24) получается путем интегрирования соотношения (1) по произвольной поверхности S с последующим преобразованием левой части по теореме Стокса в интеграл по контуру Γ , ограничивающему поверхность S . Уравнение (26) получается таким же спосо-

бом из соотношения (3). Уравнения (25) и (27) получаются из соотношений (2) и (4) путем интегрирования по произвольному объему V с последующим преобразованием левой части по теореме Остроградского-Гаусса в интеграл по замкнутой поверхности S , ограничивающей объем V .

3.2 Граничные условия

При решении задач электродинамики, учитывается, что все макроскопические тела ограничены поверхностями. При переходе через эти поверхности физические свойства макроскопических тел изменяются скачком и поэтому также скачком могут изменяться электромагнитные поля, создаваемые этими телами. Другими словами векторные функции \mathbf{D} и \mathbf{H} являются кусочно-непрерывными функциями координат, т.е. они непрерывны вместе со своими производными внутри каждой однородной области, но могут претерпевать разрывы на границах раздела двух сред. В связи с этим представляется удобным решать уравнения Максвелла (1) - (4) в каждой области, ограниченной некоторой поверхностью раздела отдельно, а затем полученные решения объединять с помощью граничных условий.

При нахождении граничных условий удобно исходить из интегральной формы уравнений Максвелла. Согласно уравнению (4) и теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int D_n dS = \int \rho dV = Q, \quad (28)$$

где Q – полный заряд внутри объема интегрирования.

Рассмотрим бесконечно малый объем в виде цилиндра с высотой h и площадью основания S , расположенный в средах 1 и 2 (рис. 1).

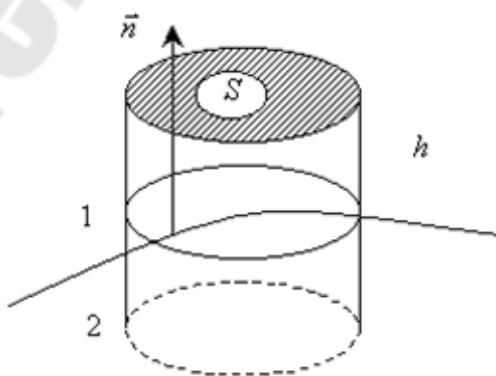


Рис. 1

Соотношение (28) в этом случае можно записать в виде:

$$D_{1n}S - D_{2n}S + \int_{бок} D_n dS = Q. \quad (29)$$

Здесь \mathbf{n} - вектор нормали к границе раздела двух сред, направленная из среды 2 в среду 1. Знак «минус» во втором слагаемом обусловлен тем, что внешняя нормаль \mathbf{n} поверхности интегрирования в среде 2 направлена противоположно нормали \mathbf{n} в среде 1. Пусть основание цилиндра стремится к границе раздела двух сред. Так как площадь боковой стремится к нулю, то $\int_{бок} D_n dS \rightarrow 0$, и поэтому (29) приобретет вид:

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{S} = \sigma, \quad (30)$$

где D_{2n} и D_{1n} - значения нормальных составляющих вектора \mathbf{D} по разные стороны поверхности раздела; σ - поверхностная плотность зарядов, избыточных по отношению к связанным зарядам самого вещества. Если поверхность раздела не заряжена, то в формуле (18) необходимо положить $\sigma=0$. Пользоваться понятием поверхностной плотности удобно тогда, когда избыточные (сторонние) заряды расположены в очень тонком слое вещества d , а поле рассматривается на расстояниях от поверхности $r \gg d$. Тогда из определения объемной плотности заряда $\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot d}$ следует:

$$\sigma = \rho d = \frac{\Delta Q}{\Delta S}.$$

Если учесть, что $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, а $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})$ - поверхностная плотность поляризационных зарядов, то формулу (18) можно записать в виде:

$$\varepsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}) = \sigma + \sigma_{полн},$$

где $\sigma_{полн} = P_{1n} - P_{2n} = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}$, а величина σ , которая входит в граничное условие (30), есть поверхностная плотность зарядов, избыточных по отношению к связанным зарядам самого вещества.

Используя уравнение (2) и проводя аналогичные рассуждения, получаем граничное условие для вектора \mathbf{B} :

$$B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad (31)$$

Выражения (30) и (31) – граничные условия для нормальных составляющих векторов \mathbf{B} и \mathbf{D} . Чтобы получить условия для тангенциальных составляющих можно использовать уравнения (1) и (3). Умножим уравнение (3) скалярно на положительную нормаль \mathbf{N} к поверхности S , ограниченной контуром L , имеющим вид прямоугольника (рис. 2).

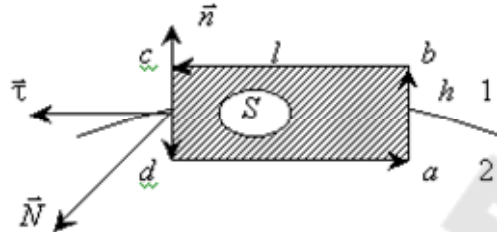


Рис. 2

Используя теорему Стокса, получим:

$$\int (N \cdot \text{rot } \mathbf{H}) dS = \oint_L (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{\partial}{\partial t} \int (N \cdot \mathbf{D}) dS + \int (N \cdot \mathbf{j}) dS.$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) &= \int_a^b H_n dh + \int_b^c (\mathbf{H}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}) dl - \int_d^a (\mathbf{H}_2 \cdot \boldsymbol{\phi}) dl - \int_d^a H_n dh = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int (N \cdot \mathbf{D}) dh dl + \int (N \cdot \mathbf{j}) dh dl. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 - значения вектора \mathbf{H} соответственно в средах 1 и 2, $\boldsymbol{\phi}$ - единичный вектор, касательный к поверхности раздела, \mathbf{n} - нормаль к поверхности раздела, направленная из среды 2 в среду 1.

Пусть теперь $h \rightarrow 0$ при малом, но фиксированном l . Тогда $\int H_n dh \rightarrow 0$, $\int D_n dS \rightarrow 0$ и соотношение (32) примет вид:

$$(\mathbf{H}_1 \cdot \boldsymbol{\phi} - \mathbf{H}_2 \cdot \boldsymbol{\phi}) \cdot l = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{N}) hl$$

и после сокращения на l имеем:

$$(\mathbf{H}_1 \cdot \boldsymbol{\phi} - \mathbf{H}_2 \cdot \boldsymbol{\phi}) = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{N}) h = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{N})$$

Здесь $\mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot h$. Вектор $\boldsymbol{\phi}$, как следует из рис. 2, можно записать как в виде $\boldsymbol{\phi} = [\mathbf{N}, \mathbf{n}]$. Тогда предыдущее выражение можно записать, как

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot [\mathbf{N}, \mathbf{n}] = [\mathbf{n}, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] \cdot \mathbf{N} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{N}.$$

Поскольку эта формула справедлива для любой ориентации поверхности, а следовательно, и вектора \mathbf{N} , то имеем

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_1] - [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2] = \mathbf{i}. \quad (33)$$

В граничном условии (33) присутствует поверхностная плотность тока, избыточная по отношению к токам намагничивания. Если токи отсутствуют, то следует положить $\mathbf{i} = 0$. Учитывая, что $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$, а $[\mathbf{M}, \mathbf{n}]$ есть поверхностная плотность тока намагничивания, запишем формулу (33) в виде:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{B}_1] - [\mathbf{n}, \mathbf{B}_2] = (\mathbf{i} + \mathbf{i}_{\text{нам.}}) \mu_0,$$

где $\mathbf{i}_{\text{нам.}} = [\mathbf{M}_1, \mathbf{n}] - [\mathbf{M}_2, \mathbf{n}] = [(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2), \mathbf{n}]$.

Используя уравнение (1) и проводя аналогичные рассуждения, получаем граничные условия для вектора \mathbf{E} :

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_1] - [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2] = 0. \quad (34)$$

Таким образом, уравнения Максвелла (1)–(4) должны быть дополнены граничными условиями (30), (31), (33) и (34). Эти условия означают непрерывность тангенциальных составляющих вектора \mathbf{E} (34) и нормальной составляющей вектора \mathbf{B} (31) при переходе через границу раздела двух сред. Нормальная составляющая вектора \mathbf{D} при переходе через границу раздела испытывает скачок, тангенциальная составляющая вектора \mathbf{H} , также испытывает скачок, если имеются поверхностные токи (33).

Еще одно граничное условие можно получить, используя уравнение непрерывности ($\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$) и уравнение (4), из которых следует:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} + \text{div } \mathbf{j} = \text{div} \left\{ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right\}.$$

Так как граничное условие (31) является следствием уравнения (2), то по аналогии находим:

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{1n}}{\partial t} + j_{1n} = \frac{\partial \mathbf{D}_{2n}}{\partial t} + j_{2n}. \quad (35)$$

Если же на поверхности раздела нет зарядов, поверхностная плотность которых зависит от времени, то из (18) и (23) следует непрерывность нормальных составляющих плотности тока:

$$j_{1n} = j_{2n}.$$

Итак, граничные условия на поверхности раздела двух сред имеют вид:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma; \quad [\mathbf{n}, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0, \quad (36a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0; \quad [\mathbf{n}, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \mathbf{i}, \quad (36b)$$

где \mathbf{n} - нормаль к границе раздела, направленная из среды 2 в среду 1, и должны выполняться в любой момент времени и в каждой точке поверхности раздела.

3.3 Уравнения Максвелла в системе уравнений магнитостатики и электростатики

Так как на практике почти всегда приходится решать уравнения Максвелла (1)–(4) в кусочно-непрерывных средах, то граничные условия (36) следует рассматривать как неотъемлемую часть уравнений Максвелла (1)–(4).

В случае стационарных электрических и магнитных полей ($\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$) система уравнений Максвелла (1)–(4) распадается на систему уравнений электростатики:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (37)$$

и уравнений магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (38)$$

а граничные условия остаются те же.

Пример

В качестве примера решения электростатических задач можно вычислить электрическое поле, создаваемое диэлектрическим шаром радиуса R , находящемся в однородном электрическом поле \mathbf{E}_0 . Уравнения электростатики в диэлектрике (37) при $\rho = 0$ имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}. \quad (39)$$

Из этих уравнений следует, что потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \varphi) = 0, \quad (40)$$

причем $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, $\mathbf{D} = -\varepsilon_0 \varepsilon \nabla \varphi$. В однородном диэлектрике $\varepsilon = \text{const}$, поэтому уравнение (39) переходит в обычное уравнение Лапласа $\Delta \varphi = 0$.

Граничное условия (36), выражающее непрерывность вектора индукции, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \quad \text{при } r=R. \quad (41)$$

Здесь φ_1 – решение уравнения вне сферы, а φ_2 – внутри сферы. Вместо граничного условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля можно использовать эквивалентное ему условие непрерывности потенциала

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (42)$$

Это условие можно получить, рассматривая интеграл $\int \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$ по контуру, изображенному на рис. 1. Воспользовавшись теоремой Стокса и уравнением $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, находим

$$\int (\mathbf{N} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}) \, dS = \oint (\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) = -\oint (\nabla \varphi \cdot d\mathbf{l}) = \oint d\varphi = 0$$

Так как интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то это значит, что функция φ непрерывна, откуда и следует условие (42). Из (30) очевидно так же, что

$$d\varphi_1 = (\nabla \varphi_1 \cdot d\mathbf{l}) = d\varphi_2 = (\nabla \varphi_2 \cdot d\mathbf{l}),$$

где элемент $d\mathbf{l}$ направлен касательно к границе раздела. Из этого равенства следует, что тангенциальные компоненты вектора \mathbf{E} также непрерывны.

Для решения поставленной задачи используем сферическую систему координат, полярная ось которой (ось z) совпадает с направлением напряженности однородного внешнего электрического поля \mathbf{E}_0 .

Поскольку на достаточно большом удалении от диэлектрического шара электрическое поле не искажается наличием этого шара, то потенциал φ_1 должен удовлетворять условию

$$\varphi_1 \rightarrow -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) = -E_0 \cdot r \cos \theta, \quad -\nabla \varphi_1 = \mathbf{E}_0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Из соображений симметрии ясно, что потенциал не должен зависеть от азимутального угла, поэтому решение уравнения Лапласа запишем в виде разложения по полиномам Лежандра $P_l(\cos \theta)$:

$$\varphi_1 = CrP_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad r > R,$$

$$\varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r < R.$$

Здесь потенциал нормирован так, чтобы $\varphi_2 = 0$ при $r = 0$. Так как $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, то из условия на бесконечности находим $C = -E_0$.

Воспользуемся теперь граничными условиями (41) и (42):

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) - E_0 R P_1(\cos \theta),$$

$$\varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)}{R^{l+2}} B_l P_l(\cos \theta) - E_0 P_1(\cos \theta).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра, получаем

$$A_0 = \frac{B_0}{R}, \quad B_0 = 0 \quad \text{при } (l=0),$$

$$\varepsilon A_1 = - \frac{2}{R^3} B_1 - E_0 \quad \text{при } (l=1),$$

$$A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}}, \quad \varepsilon l A_l R^{l-1} = - \frac{(l+1)}{R^{l+2}} B_l \quad \text{при } (l>1).$$

Из этих уравнений находим

$$A_1 = - \frac{3E_0}{\varepsilon + 2}, \quad B_1 = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + 2} R^3 E_0.$$

Все остальные коэффициенты равны нулю, если $l \neq 1$.

Тким образом, решение задачи имеет вид:

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{R^3}{r} E_0 \cos \theta = -(\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{R^3}{r} \right), \quad (43)$$

$$\varphi_2 = -\frac{3E_0 r}{\varepsilon + 2} \cos \theta = -\frac{3}{\varepsilon + 2} \cdot (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}).$$

Используя формулу $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}$, вычислим вектор поляризации диэлектрической сферы

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E} = -\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\nabla\varphi_2 = 3\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}\mathbf{E}.$$

С помощью вектора поляризации формулы (43) можно записать в виде:

$$\varphi_1 = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{V}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \quad (44)$$

$$\varphi_2 = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})}{3\varepsilon_0}, \quad (45)$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ - объем сферы.

Первые два слагаемых в (44) и (45) представляют собой потенциал однородного внешнего поля, создаваемого внешними источниками. Вторые – это потенциал электрического поля, создаваемого электрическим шаром, поляризованным внешним полем. Вне сферы – это потенциал диполя с дипольным моментом $\vec{p} = \vec{P}V$. Внутри сферы поляризованный шар создает однородное электрическое поле с напряженностью

$$\mathbf{E}_i = -\nabla\left(\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{3\varepsilon_0}\right) = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P}. \quad (46)$$

Полная напряженность внутри шара

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi_2 = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\mathbf{E}_0. \quad (47)$$

Таким образом, электрическое поле внутри шара не зависит от радиуса шара и ослаблено на значение поля $\mathbf{E}_l = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P}$, которое называется деполяризующим полем. Возникновение деполяризующего поля есть частный случай явления экранировки внешнего поля связанными или свободными зарядами.

Литература

1. Семенов, Н. А. Техническая электродинамика : учеб. пособие для вузов / Н. А. Семенов. – М. : Связь, 1973. – 481 с.
2. Фальковский, О. И. Техническая электродинамика : учебник / О. И. Фальковский. – Изд. 2-е. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 429, [1] с.
3. Федорченко, А. М. Классическая электродинамика / А. М. Федорченко. – К. : Вища школа, 1988. – 280 с.
4. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Электричество / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1983. – 688 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики. 3 том / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1988. – 496 с.

Оглавление

| | |
|---|----|
| Введение..... | 3 |
| ГЛАВА 1 ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ..... | 4 |
| 1.1 Поле электрического заряда. Закон Кулона..... | 4 |
| 1.2 Напряженность и потенциал электрического поля..... | 5 |
| 1.3 Электрическое поле в диэлектриках..... | 8 |
| ГЛАВА 2 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ..... | 10 |
| 2.1 Сила Лоренца..... | 10 |
| 2.2 Магнитное поле равномерно движущегося заряда..... | 12 |
| 2.3 Закон Био–Савара..... | 12 |
| 2.4 Электромагнитной индукция..... | 15 |
| ГЛАВА 3 СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ..... | 19 |
| 3.1 Уравнения Максвелла в дифференциальной форме..... | 19 |
| 3.2 Граничные условия..... | 28 |
| 3.3 Уравнения Максвелла в системе уравнений магнитостатики и электростатики..... | 32 |
| Литература..... | 36 |

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Практикум

**для студентов второй ступени высшего
образования специальности 1-43 80 01
«Электроэнергетика и электротехника»
дневной и заочной форм обучения**

Составитель Шаповалов Петр Степанович

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 16.09.22.

Рег. № 32Е.
<http://www.gstu.by>