Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

А. А. Бабич, А. В. Емелин, Л. Д. Корсун

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по одноименной дисциплине для студентов специальностей
1-36 04 02 «Промышленная электроника»,
1-40 04 01 «Информатика и технологии
программирования», 1-40 05 01 «Информационные
системы и технологии (по направлениям)»
и 1-53 01 07 «Информационные технологии
и управление в технических системах»
дневной формы обучения

Гомель 2018

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171+22.172я73
Б12

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого* (*протокол № 11 от 27.06.2017 г.*)

Рецензент: зав. каф. «Промышленная электроника» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *Ю. В. Крышнев*

Бабич, А. А.

Б12 Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.-метод. пособие по одноим. дисциплине для студентов специальностей 1-36 04 02 «Промышленная электроника», 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» и 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» днев. формы обучения / А. А. Бабич, А. В. Емелин, Л. Д. Корсун. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2018. – 110 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткие теоретические сведения по каждой теме с разобранными типовыми примерами и достаточное количество задач для решения.

Для студентов технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171+22.172я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть I
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Основные понятия теории вероятностей

Событие – это то, что может произойти или нет при выполнении определенного комплекса условий, или, как говорят, при проведении ***испытания***. События будем обозначать буквами $A, B, C, \ldots$ Среди возможных событий выделяют достоверные и невозможные. ***Достоверным*** называется событие, которое в результате опыта непременно должно произойти. ***Невозможным*** называется событие, которое в результате опыта не может произойти. Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие.

Если событие A не является достоверным или невозможным, то оно называется ***случайным***.

События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других. Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов испытания.

Два несовместных события, образующих полную группу, называют ***противоположными***.

Для количественной оценки возможности появления случайного события A вводится понятие вероятности.

Вероятностью события A называют отношению числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу n попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Исход опыта является благоприятствующим событию A, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события A.

Вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Пример 1.

В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Решение. Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие A, появление зеленого – событие B, появление белого – событие C.

Тогда получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10}.$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Относительной частотой события A называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие A к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта. Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна: $W(A) = \frac{2}{5}$. Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

Равновозможными называют события, вероятности которых равны.

Пример 2.

Из полной колоды игральных карт извлекается наудачу одна карта. Найти вероятность того, что эта карта окажется: 1) тузом; 2) пиковой масти; 3) пиковым тузом.

Решение. 1) Так как число карт полной колоды равно $n=52$, и каждая из них имеет одинаковую вероятность быть извлеченной из колоды, а число тузов в колоде $m=4$, поэтому вероятность извлечения туза равна $p=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

2) Общее число карт пиковой масти равно 13. Поэтому вероятность извлечения карты этой масти равна $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.

3) Вероятность извлечения туза пик равна $\frac{1}{52}$.

Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика — раздел математики, в котором исследуется, сколько всевозможных комбинаций (вариантов), подчиненных тем или иным условиям их образования, можно составить из элементов данного множества.

Для того чтобы узнать количество комбинаций, обладающих определенными свойствами, можно сначала перечислить их и затем пересчитать. В большинстве случаев такой способ определения комбинаций занимает много времени, поэтому в комбинаторике, которая обслуживает теорию вероятностей, рассматривают несколько видов комбинаций: перестановки, размещения и сочетания. Эти виды комбинаций можно пересчитать по специальным формулам или с помощью основных правил комбинаторики, т. е. без непосредственного перечисления вариантов.

1. Число всех различных ***перестановок*** P_n из n элементов равно
$$P_n=n!$$
2. Число всех различных ***размещений*** A_n^m m элементов из n $(m\le n)$ равно
$$A_n^m=n\cdot(n-1)\ldots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

При этом различные комбинации из m элементов, взятых из n элементов, различаются не только составом, но и порядком следования.

3. Число всех различных ***сочетаний*** C_n^m m элементов из n $(m\le n)$ равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

При этом различные комбинации из m элементов, взятых из n элементов, различаются только составом.

<u>Пример 3.</u>

В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Решение.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь m деталей из N деталей, т.е. C_N^m – числу сочетаний из N элементов по m.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди m деталей ровно k стандартных): k стандартных деталей можно взять из n стандартных деталей C_n^k способами; при этом остальные $(m-k)$ деталей должны быть нестандартными и взять их из $N-n$ нестандартных деталей можно C_{N-n}^{m-k} способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$.

Искомая вероятность:

$$p = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

З А Д А Н И Я

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что а) сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится четверка; б) сумма очков на выпавших гранях равна семи.

2. В мешочке имеются 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о,п,р,с,т. Найти вероятность того, что из вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно прочитать слово «спорт».

3. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а,т,м,р,с,о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «трос».

4. В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

5. Буквы слова «РЕМОНТ» выписаны на карточках. Карточки перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «МОРЕ»?

6. Из 8 книг, находящихся на полке, 6 учебников. Найти вероятность того, что взятые наугад 3 книги будут учебниками.

7. В лотерее разыгрывается 100 билетов. Выигрыш падает на 10 билетов. Некто купил 3 билета. Какова вероятность того, что ровно один из них выиграет?

8. Профессор вызвал через старосту на обязательную консультацию трех студентов из шести отстающих. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал наудачу трех отстающих студентов. Какова вероятность того, что староста послал именно тех студентов, которых вызвал профессор?

9. В зале имеется 20 белых и 10 синих кресел. Случайным образом места занимают 15 человек. Найти вероятность того, что они займут 5 белых и 10 синих кресел.

10. Из пакета, в котором лежат 5 пирожков с капустой и 7 – с яблоками, берут 3 пирожка. Найти вероятность того, что один из них – с яблоками.

11. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «КНИГА». Буквы перемешали и собрали в произвольном порядке. Найти вероятность того, что снова получилось слово «КНИГА».

12. Из шести букв разрезной азбуки составлено слово «АНАНАС». Буквы перемешали и собрали в произвольном порядке. Найти вероятность того, что снова получилось слово «АНАНАС».

13. Восемь человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что два фиксированных лица окажутся рядом.

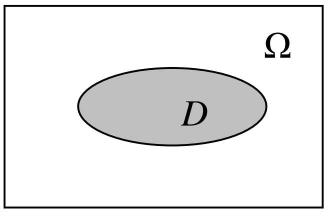
14. Восемь человек случайным образом рассаживаются вдоль стены. Найти вероятность того, что два фиксированных лица окажутся рядом.

15. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; каждый шарик попадает в ту или иную лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и туже лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что одной из лунок окажется три шарика, в другой – один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

2. Геометрическая вероятность

Классическое определение вероятности предполагает, что множество элементарных исходов Ω конечно. На практике это бывает не всегда (например, когда мы говорим о времени или расстоянии). В таких случаях удобно применять геометрическое определение вероятности.

Рассмотрим на плоскости некоторую область Ω, имеющую площадь S_Ω, и внутри нее область D с площадью S_D.



В область Ω случайным образом «бросают точку», при этом предполагают, что все точки области Ω равноправны (все элементарные события равновозможны). Пусть событие A – «брошенная точка попадет в область D».

Геометрической вероятностью события A называется отношение площади области D к площади области Ω, т.е.

$$P(A) = \frac{S_D}{S_\Omega}.$$

Замечание: Геометрическое определение вероятности применимо и в случае, когда области Ω и D линейные или объемные, только площади областей в формуле потребуется заменить, соответственно, на их длины или объемы.

З А Д А Н И Я

1. В круг радиуса R вписан квадрат. Какова вероятность того, что точка, брошенная в круг наудачу, окажется внутри квадрата?

2. На плоскость с нанесенной квадратной сеткой со стороной 4 см бросают монету радиуса 1 см. Найти вероятность того, что монета не пересечет линии.

3. В равносторонний треугольник со стороной a вписан круг. Какова вероятность того, что точка, брошенная в треугольник наудачу, окажется внутри круга?

4. Двое условились встретиться в определенном месте. Договорились, что каждый из них будет на месте встречи между 13 и 14 часами, и пришедший, не застав другого, подождет его в течение 1/4 часа. Вычислить вероятность того, что встреча произойдет.

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A+B) = p(A) + p(B).$$

Для большого числа несовместных событий:

$$p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n).$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1.$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Cобытия A и B называют ***независимыми***, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B).$$

Для большего числа событий, независимых в совокупности:

$$p(A_1 A_2 \ldots A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB),$$

где AB – произведение событий A и B.

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий:

$$p(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC).$$

Событие $\overline{A}$ называется ***противоположным*** событию A, если оно состоит в непоявлении события A. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p(A)+p(\overline{A})=1.$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Условной вероятностью события A при наличии B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $p(A/B)$ или $p_B(A)$.

Для независимых событий

$$p(A/B)=p(A); \qquad p(B/A)=p(B).$$

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B/A)$$

или

$$p(AB)=p(B)\cdot p(A/B).$$

Для нескольких зависимых событий:

$$p(A_1A_2A_3\ldots A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot p(A_3/A_1A_2)\ldots p(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$

где $p(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})$ – вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1,A_2,\ldots,A_{n-1}$ наступили.

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть события $A_1,A_2,\ldots,A_n$ независимы, причем $p(A_1)=p_1$, $p(A_2)=p_2$, $\ldots$, $p(A_n)=p_n$; пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них.

Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из независимых событий $A_1,A_2,\ldots,A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\ldots$, $\overline{A}_n$:

$$p(A)=1-q_1q_2\ldots q_n.$$

<u>Пример 1.</u>

Зависимы или независимы:

1) несовместные события;

2) события, образующие полную группу;
3) равновозможные события?

Решение.

1) Зависимы, так как появление любого из них обращает в нуль вероятности всех остальных; 2) зависимы, так как непоявление всех, кроме одного, обращает в единицу вероятность последнего; 3) могут быть как зависимы, так и независимы.

Пример 2.

Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события:

A – появление туза;
B – появление карты красной масти;
C – появление бубнового туза;
D – появление десятки.

Зависимы или независимы следующие пары событий: 1) A и B; 2) A и C; 3) B и C; 4) B и D; 5) C и D?

Решение.

1) независимы, так как $p(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$; $p(A/B)=\frac{2}{26}=\frac{1}{13}$;

2) зависимы, так как $p(A)=\frac{1}{13}$; $p(A/C)=1$;

3) зависимы, так как $p(B)=\frac{1}{2}$; $p(B/C)=1$;

4) независимы, так как $p(B)=\frac{1}{2}$; $p(B/D)=\frac{1}{2}$;

5) зависимы, так как несовместны.

Пример 3.

На стеллаже в библиотеке в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

Решение.

Первый способ. Событие A будет осуществлено, если произойдет любое из трех несовместных событий:

B – один учебник в переплете, два без переплета,

C – два учебника в переплете, один без переплета,

D – три учебника в переплете.

$$A = B + C + D.$$

По теореме сложения

$$p(A) = p(B) + p(C) + p(D),$$

$$p(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad p(B) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}, \quad p(B) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

Окончательно получим

$$p(A) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91}.$$

Второй способ. События A (хотя бы один из взятых трех учебников имеет переплет) и $\overline{A}$ (ни один из взятых трех учебников не имеет переплета) – противоположные, поэтому

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1.$$

Вероятность

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Пример 4.

В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение.

Событие может появиться в двух несовместных вариантах: *бч* или *чб*; по теоремам сложения и умножения

$$p(бч + чб) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Пример 5.

Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Решение.

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна . Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

Пример 6.

В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек.

Решение.

Вероятность выстрела при первом нажатии на курок (событие A) равна $P(A)=\frac{4}{6}$, вероятность осечки - $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$. Вероятность выстрела при втором нажатии на курок зависит от результата первого нажатия.

Так если в первом случае произошел выстрел, то в барабане осталось только 3 патрона, причем они распределены по 5 гнездам, т.к. при втором нажатии на курок напротив ствола не может оказаться гнездо, в котором был патрон при первом нажатии на курок.

Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B/A)=\frac{3}{5}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A})=\frac{4}{5}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B}/A)=\frac{2}{5}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1}{5}$ - если в первый раз была осечка.

Рассмотрим вероятности того, что во втором случае произойдет выстрел (событие B) или произойдет осечка (событие $\overline{B}$) при условии, что в первом случае произошел выстрел (событие А) или осечка (событие $\overline{A}$).

$P(B)=P(A)P(B/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{15}=0{,}4$ - два выстрела подряд;

$P(B) = P(\overline{A})P(B / \overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первая осечка, второй выстрел;

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B} / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первый выстрел, вторая осечка;

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$ - две осечки подряд.

Эти четыре случая образуют полную группу событий (сумма их вероятностей равна единице).

Анализируя полученные результаты, видим, что вероятность хотя бы одного выстрела равна сумме $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0{,}933$.

Теперь рассмотрим другой случай. Предположим, что после первого нажатия на курок барабан раскрутили и опять нажали на курок.

Вероятности первого выстрела и первой осечки не изменились - $P(A) = \frac{4}{6}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{6}$. Условные вероятности второго выстрела и осечки вычисляются из условия, что напротив ствола может оказаться то же гнездо, что и в первый раз.

Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B / A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз был выстрел, $P(B / \overline{A}) = \frac{4}{6}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B} / A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{2}{6}$ - если была осечка.

Тогда:

$P(B) = P(A)P(B / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ - два выстрела подряд;

$P(B) = P(\overline{A})P(B / \overline{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$ - первая осечка, второй выстрел;

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B} / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ - первый выстрел, вторая осечка;

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$ - две осечки подряд.

В этом случае вероятность того, что произойдет хотя бы один выстрел, равна

$$P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889.$$

Пример 7.

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Решение.

Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие A, вторым – событие B, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$.

$$P(A) = 0{,}7; \quad P(\overline{A}) = 0{,}3; \quad P(B) = 0{,}8; \quad P(\overline{B}) = 0{,}2.$$

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет равна

$$P(A)P(\overline{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14.$$

Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет равна

$$P(\overline{A})P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24.$$

Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком равна

$$P = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38.$$

Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны:

$$P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56; \quad P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок равна:

$$P = 1 - 0{,}56 - 0{,}06 = 0{,}38.$$

Пример 8.

Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет бракованной равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажется не бракованными.

Решение.

Обозначим бракованную деталь – событие A, не бракованную – событие $\overline{A}$.

$$P(A) = 0{,}2; \quad P(\overline{A}) = 0{,}8.$$

Если среди трех деталей оказывается только одна бракованная, то это возможно в одном из трех случаев: бракованная деталь будет первой, второй или третьей.

$$P = P(A)P(\overline{A})P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(A)P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(\overline{A})P(A).$$

$$P = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}384.$$

Пример 9.

Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности того, что эта деталь находится: а) не более, чем в трех ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

Решение.

а) Вероятность того, что данная деталь находится во всех четырех ящиках, равна

$$P = P_1 P_2 P_3 P_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024.$$

Вероятность того, что нужная деталь находиться не более, чем в трех ящиках равна вероятности того, что она не находится во всех четырех ящиках.

$$P(A) = 1 - P = 1 - 0{,}3024 = 0{,}6976.$$

б) Вероятность того, что нужная деталь находится не менее, чем в двух ящиках, складывается из вероятностей того, что деталь находиться только в двух ящиках, только в трех ящиках, только в четырех ящиках. Конечно, эти вероятности можно посчитать, а потом сложить, однако, проще поступить иначе. Та же вероятность равна вероятности того, что деталь не находится только в одном ящике и имеется вообще.

Вероятность того, что деталь находится только в одном ящике, равна

$$P = P_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 P_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 P_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 P_4 .$$

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = \\ = 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}0216 = 0{,}0404 .$$

$$Q = 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596 .$$

Вероятность того, что нужной деталь нет ни в одном ящике, равна:

$$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024 .$$

$$Q_0 = 1 - 0{,}0024 = 0{,}9976 .$$

Искомая вероятность равна

$$P(B) = Q \cdot Q_0 = 0{,}9596 \cdot 0{,}9976 = 0{,}9573.$$

З А Д А Н И Я

1. По мишени производятся три выстрела. Рассматриваются события A_i – попадание при i-ом выстреле ($i = 1,2,3$). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A_i}$ следующие события:

A – все три попадания;
B – все три промаха;
C – хотя бы одно попадание;
D – хотя бы один промах;
E – не меньше двух попаданий;
F – не больше одного попадания;
G – попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

2. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

A – обнаружен ровно один из четырех объектов;
B – обнаружен хотя бы один объект;
C – обнаружено не менее двух объектов;
D – обнаружено ровно два объекта;
E – обнаружено ровно три объекта;

F – обнаружены все четыре объекта.
Указать, в чем состоят события:
1) $A+B$; 2) AB; 3) $B+C$; 4) BC; 5) $D+E+F$; 6) BF.
Совпадают ли события BF и CF?
Совпадают ли события BC и D?

3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

4. Брошены три игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится 5 очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков; в) на двух выпавших гранях появится одно очко, а на третьей грани – другое число очков; г) на всех выпавших гранях появится разное число очков.

5. Бросаются две монеты. Рассматриваются события: A – выпадение герба на первой монете; B – выпадение герба на второй монете.
Найти вероятность события $C=A+B$.

6. В двух ящиках находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 6 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 18, 8, и 6. Из каждого ящика наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

7. Вероятности попадания в цель каждого из трех стрелков соответственно равны: 0,9; 0,85; 0,75. Стрелки произвели один залп. Найти вероятность: а) только одного попадания; б) не менее двух попаданий; в) ни одного попадания.

8. Ведется стрельба по самолету, уязвимыми агрегатами которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того, чтобы поразить (вывести из строя) самолет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. Вероятность поражения первого двигателя $p_1=0{,}05$, второго двигателя $p_2=0{,}04$, кабины пилота $p_3=0{,}1$. Агрегаты самолета поражаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

9. В цехе работают 10 мужчин и 6 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

10. В ящике 12 деталей, среди которых 8 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

11. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором вопросы.

12. В урне a белых и b черных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

13. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

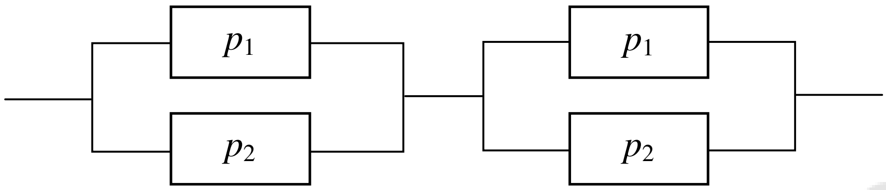
14. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиабомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятность попадания которых соответственно равны: 0,6; 0,4; 0,7; 0,8.

15. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

16. Имеется группа из k космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью p. За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга m радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

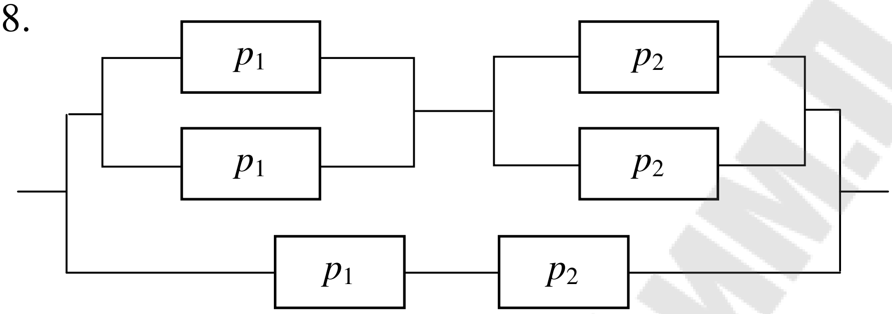
Устройство состоит из элементов, собранных по указанной в каждом варианте схеме. Предполагается, отказы элементов являются независимыми событиями. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого элемента p_i. Вычислить надежность всего устройства.

17.



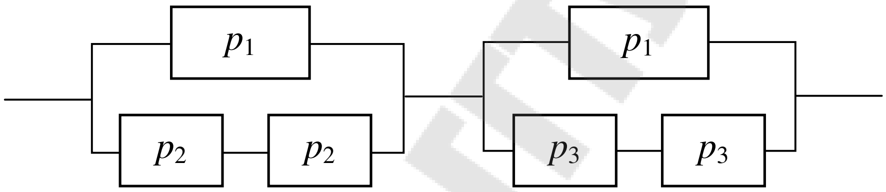
$p_1 = 0{,}75$
$p_2 = 0{,}85$

18.



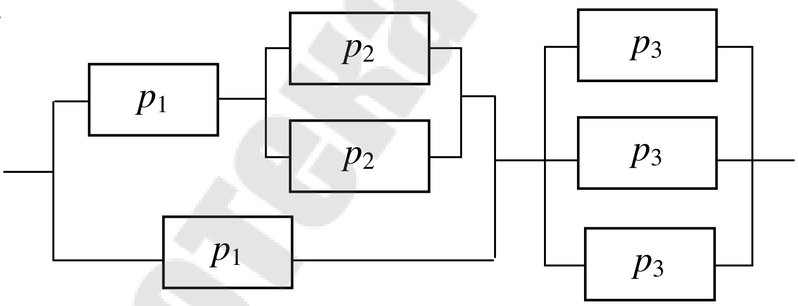
$p_1 = 0{,}80$
$p_2 = 0{,}85$

19.



$p_1 = 0{,}90$
$p_2 = 0{,}85$
$p_3 = 0{,}80$

20.



$p_1 = 0{,}75$
$p_2 = 0{,}80$
$p_3 = 0{,}70$

21. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A / H_k).$$

Это равенство называют ***формулой полной вероятности.***

Пример 1.

В урну, содержащую белый шар опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

Решение.

Обозначим через A событие - извлечен белый шар. Возможны следующие предположения (гипотезы) о первоначальном составе шаров: H_1 - два черных шара, H_2 - один белый и один черный шар, H_3 - два белых шара.

Поскольку всего имеется три гипотезы, причем по условию они равновероятны, и сумма вероятностей гипотез равна единице (так как они образуют полную группу событий), то вероятность каждой из гипотез равна 1/3, т. е. $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Условная вероятность того, что будет извлечен белый шар, при условии гипотезы H_1, что первоначально в урне не было белых шаров, $P(A / H_1) = 1/3$ (т.к. в урне всего 3 шара, из них один белый). Аналогично находим условные вероятности для двух оставшихся гипотез: $P(A / H_2) = 2/3$, $P(A / H_3) = 1$.

Искомую вероятность того, что будет извлечен белый шар, находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) +$$
$$+ P(H_3) \cdot P(A / H_3) = 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 1 = 2/3.$$

Формула Байеса

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A / H_k)}{P(A)},$$

где $P(A)$ – полная вероятность.

<u>Пример 2.</u>

Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй — 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение.

Обозначим через A событие-деталь отличного качества. Можно сделать два предположения (гипотезы): H_1- деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй, т.е. из трех произведенных деталей две произведены первым автоматом, а одна вторым) $P(H_1) = 2/3$; H_2- деталь произведена вторым автоматом, причем $P(H_2) = 1/3$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, равна $P(A / H_1) = 0{,}6$. Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, равна $P(A / H_2) = 0{,}84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) = 2/3 \cdot 0{,}6 + 1/3 \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Байеса равна

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17} = 0{,}59.$$

ЗАДАНИЯ

1. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

2. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли но одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

3. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором - 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартна.

4. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60% изготовлено первым заводом и 40% — вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных первым заводом, 90 соответствуют стандарту, а из 100 шт., изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту 80. Определить вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка будет соответствовать стандарту.

5. В тире имеется шесть ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

6. На наблюдательной станции установлены четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью

первого локатора равна 0,86, второго - 0,90, третьего - 0,92, четвертого - 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

7. С первого автомата на сборку поступает 40%, со второго - 35%, с третьего - 25% деталей. Среди деталей первого автомата 0,2% бракованных, второго - 0,3%, третьего - 0,5%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

8. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем 25% сообщений «точка» и 20% сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 3:2. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если: а) принят сигнал «точка»; б) принят сигнал «тире».

9. Имеются две партии одинаковых изделий по 15 и 20 шт., причем в первой партии два, а во второй - три бракованных изделия. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего выбирается наудачу одно изделие из второй партии. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным.

10. Приборы одного наименования изготовляются тремя заводами, первый завод поставляет 45% всех изделий, поступающих на производство, второй-30% и третий 25 %. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом, равна 0,8, вторым - 0,85 и третьим - 0,9. Определить полную (среднюю) надежность прибора, поступившего на производство.

11. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

12. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проез-

жающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

13. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5, для третьего - 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.

14. Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь с первого автомата - высшего качества, равна 0,8, для второго - 0,6, для третьего - 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества; б) взятая наугад деталь высшего качества изготовлена первым автоматом.

15. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2 %, на втором - 3 %. Найти вероятность того, что: а) наугад взятое после обработки изделие стандартное; б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке.

16. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа - 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; б) компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, первого типа.

17. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы - 0,7. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную института, б) Студент

попал в сборную института. В какой группе он вероятнее всего учится?

18. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй 10, из них 3 неисправных, а) Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию. б) Наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

19. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа - с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат, б) К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

20. Имеется 6 коробок диодов типа A и 8 коробок диодов типа B. Вероятность безотказной работы диода типа A равна 0,8, типа B - 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад диод проработает гарантийное число часов, б) Взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. К какому типу он вероятнее всего относится?

5. Повторение опытов. Формула Бернулли. Формула Пуассона

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом из них не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события* A.

Формула Бернулли

Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью $p(A)=p$, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A})=1-p=q$.

Определим вероятность $P_n(k)$ того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно k раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли.

Если в результате n опытов событие A наступает ровно k раз, то остальные $n-k$ раз это событие не наступает. Событие A может появиться k раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по k. Это количество ***сочетаний*** находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^k q^{n-k}.$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем ***формулу Бернулли*:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ или } P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k};$$

где $q = 1 - p$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, - находят соответственно по формулам:

а) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1)$;

б) $P_n(k+1) + P_n(k+2) + ... + P_n(n)$;

в) $P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n)$;

г) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k)$.

Наивероятнейшее число m_0 наступлений события A в n опытах, в каждом из которых оно может наступить с вероятностью p (и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$), определяется из двойного неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Если событие A в каждом опыте может наступить с вероятностью p то количество n опытов, которые необходимо произвести для того, чтобы с вероятностью P можно было утверждать, что данное событие A произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n \ge \frac{\lg(1-P)}{\lg(1-p)}.$$

Формула Пуассона

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу – формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях, а $\lambda = np$ - среднее число появлений события в n испытаниях.

Пример 1.

Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,95. Какова вероятность того, что среди десяти изделий одно нестандартное?

Решение.

По условию задачи $n = 10$, $q = 0{,}95$, $p = 1 - q = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Тогда по формуле Бернулли получаем

$P_{10}(1) = C_{10}^1 \cdot 0.05 \cdot 0.95^9 = 0.315$.

Пример 2.

При установившемся технологическом процессе 80% всей произведенной продукции оказывается продукцией высшего сорта. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 250 изделий.

Решение.

При $n = 250$, $p = 0{,}8$ и $q = 0{,}2$ неравенство дает $199.8 \le m_0 \le 200.8$. Поскольку m_0 может быть только целым, то $m_0 = 200$.

Пример 3.

За один час автомат изготовляет 20 деталей. За сколько часов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,952, если вероятность того, что любая деталь бракованная, равна 0,01?

Решение.

Найдем вначале количество изготовляемых деталей, чтобы с вероятностью P=0,952 можно было утверждать о наличии по крайней мере одной бракованной детали, если вероятность брака p=0,01:

$$n \ge \frac{\lg(1-0{,}952)}{\lg(1-0{,}01)} = \frac{\lg 0{,}048}{\lg 0{,}99} \approx 302.$$

Следовательно, за t=302/20=15,1 ч автомат с вероятностью 0,952 изготавливает по крайней мере одну бракованную деталь.

Пример 4.

Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение.

По условию, n=100 000, p = 0,0001, k = 5. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся формулой Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Найдем λ:

$\lambda = np = 100000 \cdot 0.0001 = 10$.

Искомая вероятность

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5 \cdot e^{-10}}{5!} = \frac{10^5 \cdot 0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

ЗАДАНИЯ

1. Вероятность выигрыша по одной лотерее 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных лотерей выигрышными окажутся: а) три; б) две; в) не менее двух.

2. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи: а) трех экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов.

3. Вероятность поражения мишени для данного стрелка в среднем составляет 80 %. Стрелок произвел 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что мишень была поражена: а) пять раз; б) не менее пяти раз; в) не более пяти раз.

4. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) семь; б) не более семи; в) более семи.

5. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80 % высшего сорта. Найти вероятность того, что среди пяти изделий: а) хотя бы четыре высшего сорта; б) четыре высшего сорта; в) не более четырех высшего сорта.

6. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит три искажения; в) содержит не более трех искажений.

7. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

Указание. Принять $e^{-2} = 0{,}13534$.

8. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

9. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

10. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

11. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

12. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

13. Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4,чтобы наивероятнейшее число появления события в этих испытаниях было равно 25?

14. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

15. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,3. Сколько должно быть произведено независимых выстрелов, чтобы вероятность по меньшей мере одного попадания в десятку была больше 0,9?

6. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведены в таблице 1; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p(0 < p < 1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\left(z^2/2\right)} dz \qquad \text{- функция Лапласа,}$$

$$x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}, \quad x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}.$$

Таблица 2 функции Лапласа для положительных значений $x(0 \le x \le 5)$ приведена в приложении; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$).

Пример 1.

Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

Решение.

По условию $n = 243;\ k = 70;\ p = 0{,}25;\ q = 0{,}75$. Так как $n = 243$ - достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \text{где } x = (k - np) / \sqrt{npq}.$$

Найдем значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}37.$$

По таблице приложения 1 найдем $\varphi(1{,}37) = 0{,}1561$. Искомая вероятность $P_{243}(70) = 1/6{,}75 \cdot 0{,}1561 = 00231$.

<u>Пример 2.</u>

Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянная и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Решение.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$, где $\Phi(x)$-функция Лапласа,

$$x' = (k_1 - np) / \sqrt{npq}, \quad x'' = (k_2 - np) / \sqrt{npq}.$$

а) По условию $n = 100; p = 0{,}8; q = 0{,}2; k_1 = 75; k_2 = 90$. Вычислим x' и x'':

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим

$$P_{100}(75; 90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице приложения 2 найдем:
$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$; $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$.

Искомая вероятность

$P_{100}(75;90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76,…, либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять $k_1 = 75, k_2 = 100$. Тогда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5.$$

По таблице приложения 2 найдем $\Phi(5) = 0,5;\ \Phi(1,25) = 0,3944.$
Искомая вероятность

$$P_{100}(75;90) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.$$

в) События – «A появилось не менее 75 раз» и «A появилось не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность
$P_{100}(0;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0,8944 = 0,1056.$

ЗАДАНИЯ

1. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

2. Вероятность появления события а каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0,8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) но более 74 раз.

3. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаниях равна 0,7.Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не более 1470 раз; в) не более 1469 раз.

4. Вероятность появления события в каждом независимом испытании постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что в 145 испытаниях событие наступит ровно120 раз.

5. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 10 бракованных.

6. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится не менее 104 раз, если вероятность его наступления в каждом независимом испытании равна 0,2.

7. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 1000 рождающихся детей мальчиков будет не менее 500, но не более 550.

8. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Часть II
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной (СВ) называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Дискретной случайной величиной (ДСВ) называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Непрерывной случайной величиной (НСВ) называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Например, расстояние, которое может пролетать снаряд при выстреле. НСВ может принимать любое значение из промежутка $[l_{\min}, l_{\max}]$.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

7. Дискретные случайные величины

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

Закон распределения может быть задан в виде таблицы, графически и аналитически в виде формулы.

Пример 1.

В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50$ и 10 выигрышей в 1$. Найти закон распределения случайной величины X - стоимости возможного выигрыша для владельца одного билета.

Решение.

СВ X может принимать следующие значения: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 50.$ Найдем вероятности появления x_1, x_2, x_3.

Среди 100 билетов невыигрышных $m = 100 - 1 - 10 = 89$.

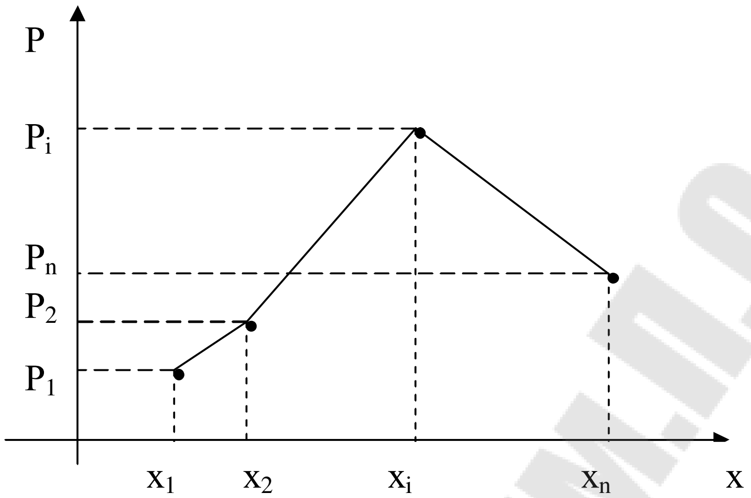
$$P(x_1) = \frac{89}{100} = 0{,}89;\ P(x_2) = \frac{10}{100} = 0{,}1;\ P(x_3) = \frac{1}{100} = 0{,}01;$$

Контроль: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = 1$; $0{,}89 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1$.

Составляем таблицу-закон распределения.

X	0	1	50
P	0,89	0,1	0,01

Графически закон распределения строят, нанося в прямоугольной системе координат точки $(x_i; p_i)$ и соединяя их отрезками прямой. Полученная ломанная называется многоугольником распределения.

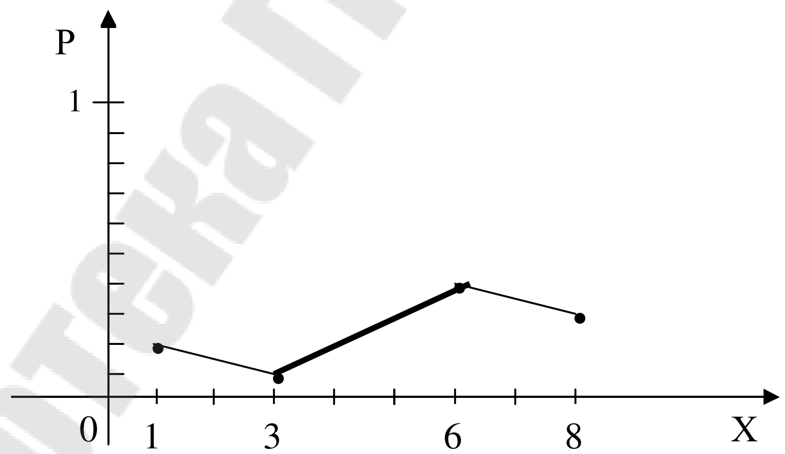


Пример 2.

Дискретная величина X задана законом распределения

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения.



Закон распределения может быть задан формулой, связывающей вероятность появления с численным значением СВ X.

Например: Пусть случайная величина X - число появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Вероятность возможного значения – число k появлений события вычисляют по формуле Бернулли

$$\mathrm{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Такой закон распределения называется биномиальным.

Если число испытаний велико, а вероятность появления события в каждом испытании мала, то используют приближенную формулу:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

В этом случае говорят, что случайная величина распределена по закону Пуассона.

Функцией распределения (интегральной функцией распределения) случайной величины X называется функция $F(x) = P(X < x)$, задающего вероятность того, что СВ X примет значение меньшее, чем x.

Функция распределения дискретной СВ X вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X < x_i).$$

Свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1, \quad -\infty < x < \infty$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
3. $F(x)$ - неубывающая функция на всей числовой оси;
4. $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

Вероятность попадания СВ X на произвольный полуинтервал $[x_1; x_2)$ определяется формулой:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

<u>Пример 3.</u>

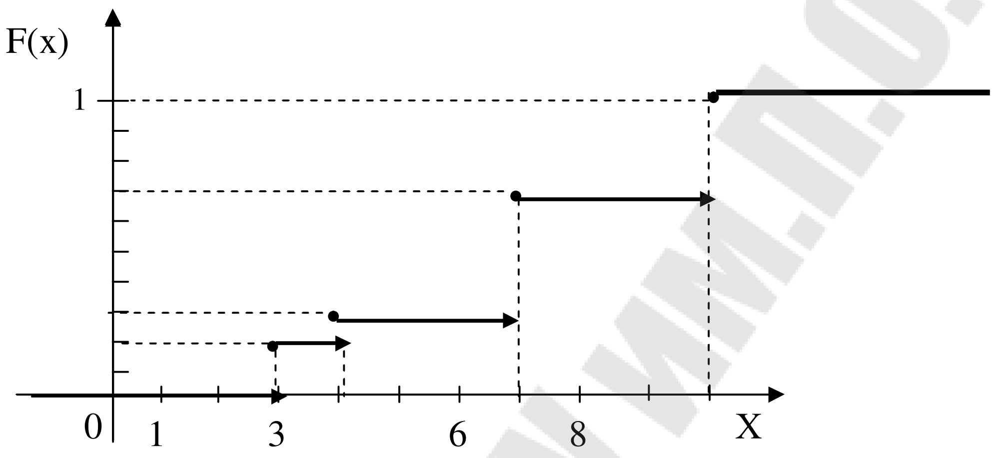
Дискретная СВ x распределена по закону

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти $F(x)$ и построить ее график. Вычислить $P(3 < x < 8)$.

Решение.

При $x \le 3 \qquad F(x) = 0;$
при $3 < x \le 4 \quad F(x) = 0{,}2;$
при $4 < x \le 7 \quad F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3;$
при $7 < x \le 10 \quad F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}7;$
при $x > 10 \quad F(x) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1;$
Строим график:



Вероятность попадания СВ X в интервал $3 < x < 8$ найдем как
$P(3 < x < 8) = F(8) - F(3) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$.

Числовые характеристики ДСВ

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений значений случайной величины на их вероятности

$$M[x] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ .$$

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной $M(C) = C$.
2. Произведением СВ X на постоянную C будем называть СВ Y, принимающую значения $Cx_1, Cx_2, \ldots, Cx_n$ с вероятностями $P_1, P_2, \ldots P_n$.

Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M[CX] = C \cdot M[X].$$

3. Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая случайная величина.

Произведением СВ X и Y называется СВ XY, которая принимает все возможные значения $x_i y_i$. Вероятности полученных значений равны произведению вероятностей сомножителей. Если некоторые из произведений оказались равными, то их верояности складываются.

Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y].$$

Суммой СВ X и Y называется СВ $(X+Y)$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y. Вероятности полученных значений $(x_i + y_i)$ для независимых СВ X и Y равны произведению вероятностей слагаемых; для зависимых СВ X и Y - произведению вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y].$$

Пример 4.

Найти математическое ожидание СВ X, распределенной по закону

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

Решение.

$M[X] = 0{,}21 \cdot 0{,}1 + 0{,}54 \cdot 0{,}5 + 0{,}61 \cdot 0{,}4 = 0{,}535$.

Пример 5.

Найти математическое ожидание суммы чисел очков, которая может выпасть при бросании двух костей.

Решение.

Пусть СВ X - число очков, выпавшее на первой кости;

СВ Y - число очков, выпавшее на второй кости.

$M[X+Y]=M[X]+M[Y]=2M[X]$.

Появление любого из возможного числа очков равновероятно, поэтому все значения СВ имеют вероятности $P=\frac{1}{6}$.

Тогда $M[X]=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$.

Таким образом $M[X+Y]=2\cdot\frac{7}{2}=7$.

Отклонением называют разность между значением СВ и ее математическим ожиданием.

Дисперсией дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D[X]=M\left((X-M[X])^2\right).$$

Дисперсия дискретной случайной величины может быть найдена по формуле

$$D[X]=M\left[X^2\right]-(M[X])^2.$$

Пример 6.

Найти дисперсию СВ X, которая задана законом распределения

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Решение.

Найдем математическое ожидание $M[X]$:

$M[X]=2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}6+5\cdot 0{,}3=3{,}5$.

Найдем $M\left[X^2\right]$:

$M\left[X^2\right]=2^2\cdot 0{,}1+3^2\cdot 0{,}6+5^2\cdot 0{,}3=13{,}3$.

Тогда $D[X]=13{,}3-(3{,}5)^2=1{,}05$.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю - $D[C]=0$;

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат $D[CX] = C^2 D[X]$;
3. Дисперсия суммы двух независимых СВ равна сумме дисперсий слагаемых $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$;
4. Дисперсия разности двух независимых СВ равна сумме их дисперсий $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Пример 7.

Найти среднее квадратическое отклонение СВ X заданной законом распределения

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Решение.

Найдем $M[X] = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$

Найдем $M[X^2] = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}5 = 54$

Найдем $D[X] = 54 - (6{,}4)^2 = 13{,}04$

Тогда искомое среднее квадратическое отклонение

$\sigma[X] = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61$.

Пример 8.

В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают обратно и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

Т.к. шары в каждом опыте возвращаются обратно и перемешиваются, то испытания можно считать независимыми (результат предыдущего опыта не влияет на вероятность появления или непоявления события в другом опыте).

Таким образом, вероятность появления белого шара в каждом опыте постоянна и равна $P_Б = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

Таким образом, в результате пяти последовательных испытаний белый шар может не появиться вовсе, появиться один раз, два, три, четыре или пять раз.

Для составления закона распределения надо найти вероятности каждого из этих событий.

1) Белый шар не появился вовсе: $P_Б(0) = (1 - P_Б)^5 = 0{,}0102$.

2) Белый шар появился один раз: $P_Б(1) = C_5^1 P_Б^1 (1 - P_Б)^4 = \frac{5!}{1!\cdot 4!} 0{,}6 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}0768$

3) Белый шар появиться два раза: $P_Б(2) = \frac{5!}{2!\cdot 3!} 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}2304$.

4) Белый шар появиться три раза: $P_Б(3) = \frac{5!}{3!\cdot 2!} 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456$.

5) Белый шар появиться четыре раза: $P_Б(4) = \frac{5!}{4!\cdot 1!} 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^1 = 0{,}2592$.

6) Белый шар появился пять раз: $P_Б(5) = 0{,}6^5 = 0{,}0778$.

Получаем следующий закон распределения случайной величины X.

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
p(x)	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

$$M(X) = 0{,}0768 + 2\cdot 0{,}2304 + 3\cdot 0{,}3456 + 4\cdot 0{,}2592 + 5\cdot 0{,}0778 = 3{,}0002.$$

$$M(X^2) = 0{,}0768 + 4\cdot 0{,}2304 + 9\cdot 0{,}3456 + 16\cdot 0{,}2592 + 25\cdot 0{,}0778 = 10{,}201.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 10{,}201 - 9{,}0012 = 1{,}1998.$$

ЗАДАНИЯ

1. Дискретня случайная величина задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

а)

X	2	4	5
P	0,3	0,1	0,2

б)

X	10	15	20
P	0,1	0,7	0,2

2. В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной СВ X - числа стандартных деталей среди отобранных.

3. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой дополнительный вопрос равна 0,9. Требуется составить закон распределения случайной дискретной величины X - числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту.

4. Дискретная СВ X распределена по закону

X	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

5. В десятиламповом радиоприемнике перегорела одна лампа. Для устранения неисправности выбранную наугад лампу заменяют исправной из запасного комплекта, после чего сразу проверяют работу приемника. Постройте закон распределения, функцию распределения и найдите математическое ожидание и дисперсию числа провененных ламп.

6. В энергосистеме имеется группа из четырех однотипных агрегатов, находящихся в одинаковых условиях. Вероятности исправного состояния агрегата в течении времени T равны 0,6 и независимы. Случайная величина X - число агрегатов, находящихся в исправном состоянии в течение времени T. Построить закон распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

7. Техническое устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа первого элемента равна 0,1; второго и третьего – 0,2; четвертого и пятого – 0,3. Построить закон распределения и найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X-числа отказавших элементов.

8. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0,9. В каждой партии содержится пять изделий. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X- числа партий, в каждой из которых содержится ровно четыре стандартных изделия, - если проверке подлежит 50 партий. (Указание: математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону $m = np$).

9. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = -1; x_2 = 1$, а также известны математические ожидания $M[X] = 0{,}1;\ M\left[X^2\right] = 0{,}9$. Найти закон распределения СВ X.

10. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M[X] = 2{,}6$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X] = 0{,}8$.

8. Основные законы распределения дискретных случайных величин

Среди законов распределения для дискретных случайных величин наиболее распространенным является ***биноминальное распределение.*** Оно имеет место, когда случайная величина X выражает число появлений события A в n независимых опытах, при условии, что вероятность появления события A в каждом опыте постоянна и равна p.

Возможными значениями случайной величины X являются: $x_0 = 0,\ x_1 = 1, ..., x_n = n$. Верояности этих возможных значений определяются по формуле Бернулли:

$$P(x = m) = C_n p^m (1 - p)^{n-m}.$$

Математическое ожидание случайной величины X, имеющей биномиальное распределение

$$m_x = np.$$

Дисперсия

$$D_x = npg.$$

<u>Пример 1.</u>

Для работы десяти станков время от времени используется электрическая энергия. Снабжение рассчитано на шесть единиц энергии. Каждому станку с одной и той же вероятностью P может потребоваться энергия. Определить вероятность перегрузки электросети, если известно, что станки работают независимо друг от друга и каждый из них потребляет энергию в среднем 12 мин. в течение часа. Найти математическое ожидание числа станков, потребляющих энергию одновременно.

Решение.

Пусть случайная величина X - число станков, потребляющих электроэнергию в течение часа. Тогда ее возможные значения: 0,1,2,…,10. Так как станок потребляет энергию в среднем 12 мин. в течение часа, то вероятность использования электроэнергии в данный момент одним станком $P = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$; причем каждый станок потребляет электроэнергию независимо друг от друга, поэтому СВ X распределена по биномиальному закону. Перегруз в сети наступит, если X примет одно из значений: 7,8,9,10. Поэтому искомая вероятность равна:

$$P = P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10) =$$

$$= C_{10}^7 \left(\frac{1}{5}\right)^7 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^3 + C_{10}^8 \left(\frac{1}{5}\right)^8 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 + C_{10}^9 \left(\frac{1}{5}\right)^9 \left(1 - \frac{1}{5}\right) + C_{10}^{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{10}.$$

Используя свойства числа сочетаний

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Находим

$$P=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{4^3}{5^{10}}+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{4^2}{5^{10}}+10\frac{4}{5^{10}}+\frac{1}{5^{10}}=$$
$$=\frac{120\cdot 64+45\cdot 16+40+1}{5^{10}}=0{,}00086.$$
Математическое ожидание
$$M=10\cdot\frac{1}{5}=2.$$

Случайная величина X называется распределенной по ***закону Пуассона***, если ее возможные значения равны 0,1,2,…, а соответствующие вероятности определяются формулой
$$P(x=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$
Характерной особенностью распределения Пуассона является совпадение математического ожидания и дисперсии, причем
$$m_x=D_x=a.$$

Распределение Пуассона связано с понятием потока событий.

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени (число вызовов скорой помощи, число вызовов на АТС, и т.д.).

Плотностью (интенсивностью) потока называется среднее число событий в единицу времени.

Поток событий называется пуассоновским, если он обладает свойствами: стационарностью; «отсутствием последствий» и ординарностью.

Свойство стационарности состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени зависит только от числа k и длительности промежутка t и не зависит от начала его отсчета.

Свойство «отсутствия последствий» состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Свойство ординарности состоит в том, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно.

Если постоянная интенсивность потока X известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

<u>Пример 2.</u>

Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 мин. поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов.

Решение.

а) По условию $\lambda = 3, t = 2$. Воспользуемся формулой Пуассона. Вероятность того, что за 2 мин. поступит четыре вызова найдем:

$$P_2(4) = \frac{(3\cdot 2)^4}{4!} e^{-3\cdot 2} = \frac{6^4}{4!} e^{-6} \approx 0{,}135.$$

б) Событие «поступило менее четырех вызовов» есть сумма следующих несовместных событий: поступило 3 вызова; поступило 2 вызова; поступил 1 вызов; вызовов не поступало.

$$P_2(k<4) = P_2(3) + P_2(2) + P_2(1) + P_2(0) = \frac{(3\cdot 2)^3}{3!} e^{-3\cdot 2} +$$

$$+\frac{(3\cdot 2)^2}{2!} e^{-3\cdot 2} + \frac{(3\cdot 2)^1}{1!} e^{-3\cdot 2} + \frac{(3\cdot 2)^0}{0!} e^{-3\cdot 2} = e^{-6}\left(\frac{6^3}{3!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^1}{1!} + 1\right) =$$

$$= e^{-6}(36 + 18 + 6 + 1) \approx 0{,}1525.$$

в) Событие поступило «не менее четырех вызовов» противоположно событию поступило «менее четырех вызовов». Поэтому

$$P_2(k \ge 4) = 1 - P_2(k<4) = 1 - 0{,}1525 = 0{,}8475.$$

ЗАДАНИЯ

1. Прибор состоит из восьми узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Какова вероятность того, что за время t откажет: а) ровно один узел; б) хотя бы один узел; в) не менее двух узлов.

2. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $P = 0{,}4$. Случайная величина X -число появлений события A в четырех испытаниях. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

3. Техническое устройство содержит 2000 одинаково надежных элементов. Вероятность отказа для каждого элемента за время T равна 0,001. Какова вероятность того, что за это время откажет не менее двух и не более четырех элементов?

4. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту равно 120. Найдите вероятность того, что: а) за 2сек. на АТС не поступит ни одного вызова; б) за 2сек. поступит менее двух вызовов; в) за 3сек. поступит не менее 6 вызовов.

5. При работе технического устройства в случайные моменты времени возникают неисправности. Поток неисправностей можно считать простейшим. Среднее число неисправностей за 100ч непрерывной работы равно двум. Определить вероятность того, что: а) в течение 50ч работы возникнет хотя бы одна неисправность; б) за 200ч работы устройства не будет ни одной неисправности; в) за 1000ч работы устройства возникнет не более трех неисправностей.

9. Непрерывные случайные величины

Плотностью распределения вероятности случайной величины X называют предел отношения вероятности попадания ее на элементарный участок от x до $x+\Delta x$ к длине участка Δx, когда $\Delta x \to 0$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x},$$

учитывая, что $P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F$.

Таким образом, плотность распределения вероятности случайной величины X равна первой производной от функции распределения

$$f(x) = F'(x).$$

Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси, а плотность распределения вероятности $f(x)$ существует везде, за исключением, быть может, конечного числа точек.

График функции $f(x)$ называется кривой распределения.

Свойства $f(x)$***:***

1. Плотность распределения неотрицательна, т.е. $f(x) \geq 0$;

2. Условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

Интегральная функция распределения $F(x)$ может быть найдена по известной $f(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Вероятность попадания СВ X в интервал $[\alpha;\beta)$ может быть найдена по формуле

$$P(\alpha \leq x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

<u>**Пример 1.**</u>

Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0; \\ \sin x, \text{ при } 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, \text{ при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Решение.

Плотность распределения $f(x)$ равна первой производной от $F(x)$. Поэтому получаем:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le 0;\\ \cos x,\ при\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0,\ при\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Пример 2.

Плотность распределения случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}a\cos x,\ при\ |x|\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0,\ при\ |x|>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

Определить коэффициент a.

Решение.

Все значения $f(x)$ сосредоточены в $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, поэтому условие нормировки имеет вид:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx=1;$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx=2a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2a\sin x\Big|_0^{\pi/2}=2a=1.$$

Таким образом $a=\dfrac{1}{2}$.

Пример 3.

Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 1;\\ x-\dfrac{1}{2}, \text{при } 1<x\le 2;\\ 0, \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания СВ X в интервал $[1{,}1;1{,}9)$.

Решение.

Используем формулу $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$

при $x\le 1$ $f(x)=0$, поэтому $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1} 0dx=0$.

Если $1<x\le 2$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1}0dx+\int\limits_{1}^{x}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left.\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right|_1^x=\frac{(2x-1)^2}{8}-\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{2}=$$

$$=\frac{4x^2-4x+1-1}{8}=\frac{4x^2-4x}{8}=\frac{x^2-x}{2}.$$

Если $x>2$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{1}0dx+\int\limits_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\int\limits_{2}^{x}0dx=0+\left.\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right|_1^2+0=\frac{(2x-1)^2}{8}=$$

$$=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}=1.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 1;\\ \dfrac{x^2-x}{2}, \text{при } 1<x\le 2;\\ 1, \text{при } x>2.\end{cases}$$

Вероятность попадания СВ X в интервал $(1{,}1;1{,}9)$ найдем как

$$P(1{,}1 \le x < 1{,}9) = \int\limits_{1{,}1}^{1{,}9}\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{(x-0{,}5)^2}{2}\Bigg|_{1{,}1}^{1{,}9} = \frac{(1{,}9-0{,}5)^2}{2} - \frac{(1{,}1-0{,}5)^2}{2} =$$

$$= \frac{1{,}4^2 - 0{,}6^2}{2} = \frac{1{,}96 - 0{,}36}{2} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8.$$

Пример 4.

Случайная величина подчинена закону распределения с плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x, & при \quad 0 \le x \le \pi \\ 0, & при \quad x < 0 \quad или \quad x > \pi \end{cases}$$

Требуется найти коэффициент a.

Для нахождения коэффициента a воспользуемся свойством $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\pi} a\sin xdx + \int\limits_{\pi}^{\infty} 0dx = a\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx = -a\cos x\Big|_{0}^{\pi} = 2a = 1;$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

Пример 5.

Задана непрерывная случайная величина x своей функцией распределения *f(x)*.

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & при \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x| > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент A, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина x попадет в интервал $\left(\dfrac{\pi}{6};\, 2\right)$.

Найдем коэффициент A.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Найдем функцию распределения:

1) На участке $x < -\frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

2) На участке $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.$$

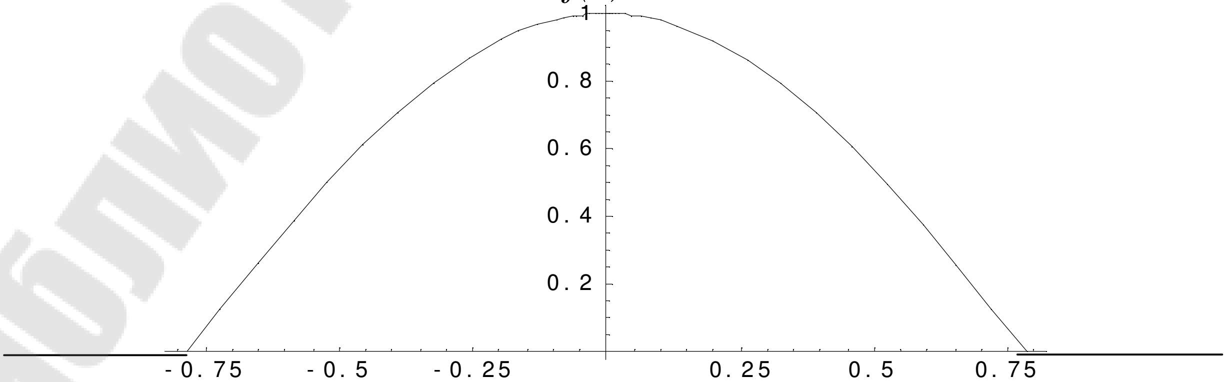
3) На участке $x > \frac{\pi}{4}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

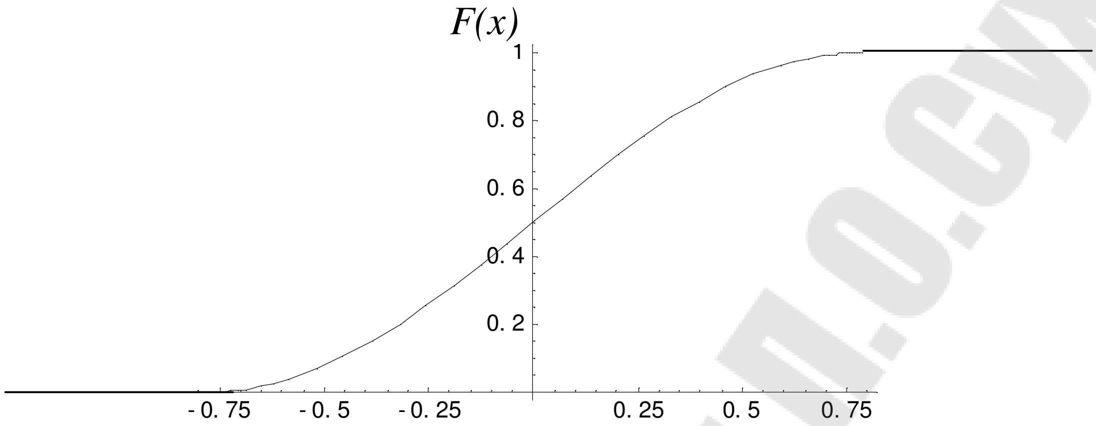
Итого: $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases};$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ 1, & при \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Построим график плотности распределения:



Построим график функции распределения:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6};2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int\limits_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{2} 0 dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067;$$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3)+1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

Числовые характеристики НСВ

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяется равенством:

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно. В частности, если все возможные значения $f(x)$ принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$M[X]=\int_a^b xf(x)dx.$$

Все свойства математического ожидания, приведенные для дискретных случайных величин, сохраняются для непрерывных случайных величин.

Пример 6.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{x}{2}$ в интервале $(0;2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание.

Решение.

$$M[X]=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2 x\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{6}x^3\bigg|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяются равенством:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}[X-M[X]]^2 f(x)dx$$

или равносильным равенством

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}X^2 f(x)dx-(M[X])^2.$$

В частности, если все значения $f(x)$ принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$D[X]=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M[X])^2.$$

Все свойства дисперсии, приведенные для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины, как и в случае дискретной случайной величины, определяется как

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}. \qquad (9.10)$$

Пример 7.

Случайная величина X в интервале $(0,5)$ задана плотностью распределения $f(x)=\frac{2}{25}x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию X.

Решение.

Будем вычислять дисперсию по формуле

$$D[X]=\int_0^5 x^2 f(x)dx-(M[X])^2$$

$$M[X]=\int_0^5 xf(x)dx=\int_0^5 x\frac{2}{25}xdx=\frac{2}{25}\int_0^5 x^2dx=\frac{2}{75}x^3\Big|_0^5=\frac{2\cdot 125}{75}=\frac{10}{3}$$

$$\int_0^5 x^2 f(x)dx=\int_0^5 x^2\frac{2}{25}xdx=\frac{2}{25}\int_0^5 x^3dx=\frac{x^4}{50}\Big|_0^5=\frac{625}{50}=\frac{25}{2}.$$

Таким образом,

$$D[X]=\frac{25}{2}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{25}{2}-\frac{100}{9}=\frac{125}{18}.$$

ЗАДАНИЯ

В задачах 89-91 по заданной функции распределения $F(x)$ найти плотность распределения $f(x)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

1. $F(x)=\begin{cases}0, при\ x\le 0;\\ \sin 2x, при\ 0<x\le\frac{\pi}{4};\\ 1, при\ x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases}0, при\ x<0;\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), при\ 0\le x\le\pi;\\ 1, при\ x>\pi.\end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases}0, при\ x<1;\\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right), при\ 1\le x\le 2;\\ 1, при\ x>2.\end{cases}$

Задана плотность распределения $f(x)$. Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания значений случайной величины X в указанный промежуток $(\alpha;\beta)$.

4. $f(x)=\begin{cases}0, при\ x\le\dfrac{\pi}{6};\\ 3\sin 3x, при\ \dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{3},\ \left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right);\\ 0, при\ x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}0, при\ x\le 0;\\ \dfrac{x}{8}, при\ 0<x\le 4,\ (1;3);\\ 0, при\ x>4.\end{cases}$

6. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей числовой оси OX равенством $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$. Найти постоянный параметр C.

7. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ равна $f(x)=C\sin 2x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

8. Плотность распределения непрерывной случайной величины X в интервале $(0;1)$ равна $f(x)=C\,arctgx$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянный параметр C.

9. Случайная величина X в интервале $(-3;3)$ задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Что вероятнее: в результате испытания окажется $x<1$ или $x>1$?

10. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \textit{при } x\le -2;\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, \textit{при} -2<x\le 2;\\ 1, \textit{при } x>2.\end{cases}$$

11. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \textit{при } x<0;\\ a(1-\cos x), \textit{при } 0\le x\le \pi;\\ 1, \textit{при } x>\pi.\end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятности $f(x)$; б) найти коэффициент a; в) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины; г) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

10. Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Случайная величина X называется ***равномерно распределенной*** на $[a;b]$, если она с постоянной плотностью распределения вероятностей принимает все значения $x\in[a;b]$.

Равномерный закон распределения (плотность распределения равномерно распределенной СВ X) имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{\textit{если} } a \le x \le b;\\ 0, \text{\textit{если} } x < a \text{ \textit{и} } x > b.\end{cases}$$

Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины

$$m_x=\frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия равномерно распределенной случайной величины

$$D_x=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 1.

Цена деления шкалы амперметра равна 0,1А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02А.

Решение.

В качестве случайной величины X рассмотрим ошибку округления отсчета. Данная СВ является равномерно распределенной на промежутке между двумя делениями. По условию задачи длина интервала равна 0,1. Поэтому $f(x)=\frac{1}{0{,}1}=10$. Ошибка отсчета превысит 0,02А, если она будет заключена в интервале (0,02;0,08).

Тогда искомая вероятность:

$$P(0{,}02;0{,}08)=\int\limits_{0{,}02}^{0{,}08} f(x)dx=10\int\limits_{0{,}02}^{0{,}08} dx=10x\Big|_{0{,}02}^{0{,}08}=0{,}8-0{,}2=0{,}6.$$

Непрерывная случайная величина X распределена по ***показательному закону***, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \text{\textit{при} } x \ge 0;\\ 0, \text{\textit{при} } x < 0.\end{cases}$$

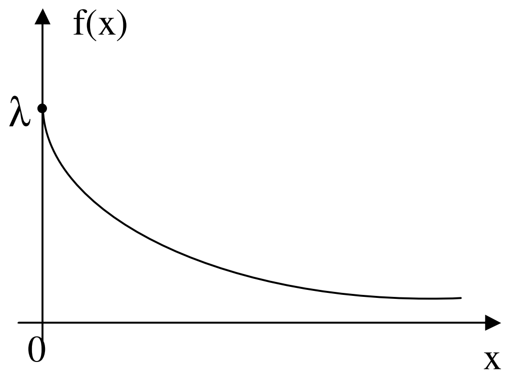
Для показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны между собой и равны $\frac{1}{\lambda}$

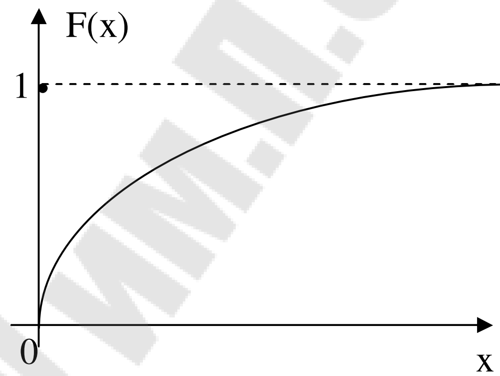
$$m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \; при \; x \geq 0; \\ 0, при \quad x < 0. \end{cases}$$

Графики плотности распределения и функции распределения случайной величины, распределенной по показательному закону





Замечательным свойством показательного распределения является то, что при наступлении события $y \geq x$ случайная величина $z = y - x$ имеет такой же закон распределения, что и случайная величина X.

Показательному распределению подчиняются такие случайные величины как, время безотказной работы элементов технического устройства, распада радиоактивного атома, обслуживания технической системы и т.д.

Пусть T- время безотказной работы устройства. Тогда $F(t) = P(T < t)$- вероятность выхода из строя устройства за время t. Тогда $R(t) = 1 - F(t)$ - вероятность безотказной работы устройства за время t.

Функция $R(t)$ называется функцией надежности.

При показательном законе распределения вероятностей $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $R(t) = e^{-\lambda t}$, где λ-интенсивность отказов.

Пример 2.

Устройство состоит из четырех элементов, работающих назависимо друг от друга. Среднее время безотказной работы каждого элемента 600ч. Устройство работает при условии работы всех четырех элементов. Определить вероятность безотказной работы устройства в течение не менее 1000ч.

Решение.

Пусть событие A_k состоит в том, что элемент $k \left(k = 1,4\right)$ работает безотказно в течение 1000ч. Тогда вероятность безотказной работы всего устройства

$$P = P\left(A_1, A_2, A_3, A_4\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)P\left(A_3\right)P\left(A_4\right).$$

По условию $P\left(A_1\right) = P\left(A_2\right) = P\left(A_3\right) = P\left(A_4\right) = P(A)$. $P = \left(P(A)\right)^4$.

Найдем $P(A)$. По условию задачи математическое ожидание времени безотказной работы $T = 600$, поэтому $\lambda = \frac{1}{T} = \frac{1}{600}$. Функция распределения

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{600}}, \, при \, t \geq 0; \\ 0, \, при \quad t < 0. \end{cases}$$

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - F(t) = e^{-\frac{t}{600}}\Bigg|_{t=1000} = e^{-\frac{1000}{60}} = e^{-\frac{5}{3}} \approx 0{,}189.$$

Тогда вероятность безотказной работы всего устройства в течение 1000 часов $P = \left(0{,}189\right)^4 \approx 0{,}0016$.

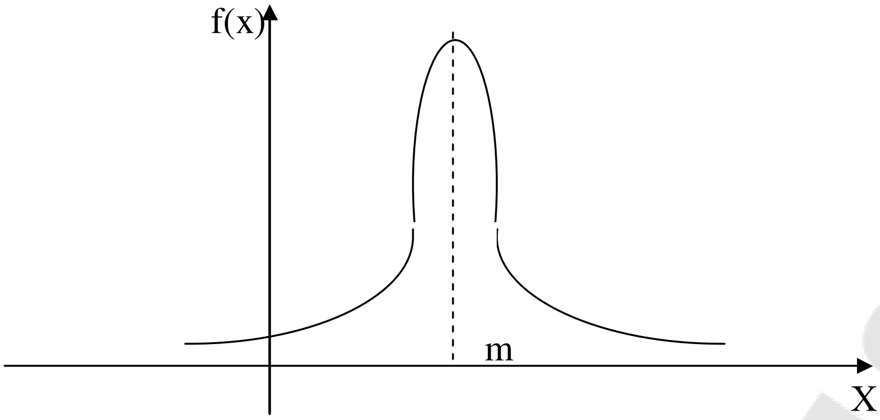
Если плотность распределения вероятности случайной величины X определяется формулой

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

то распределение случайной величины X называется нормальным или Гауссовым.

Величины m и σ, входящие в формулу закона нормального распределения являются математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением СВ X.

График нормального распределения имеет вид:



Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция Лапласа, значения которой приведены в таблице.

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины X от своего математического отклонения менее чем на величину δ может быть найдена по формуле

$$P(|x - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Пример 3.

Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не проевосходящей по абсолютной величине 15мм.

Решение.

По условию математическое ожидание случайных ошибок равно нулю. Искомую вероятность найдем по формуле

$$P(|x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

$$\delta = 15,\ \sigma = 10;\ P(|x| < 15) = 2\Phi(1{,}5).$$

Значение $\Phi(1{,}5)$ находим из таблицы $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$.
Тогда искомая вероятность
$P(|x| < 15) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664$.

Пример 4.

Определить среднеквадратичную ошибку измерительного прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные ошибки измерения имеют нормальное распределение и с вероятностью 0,9 не выходят за пределы ± 5 мм.

Решение.

Пусть случайная величина X - ошибка измерений. Тогда из условия задачи следует, что $P(|x| < 5) = 0{,}9$.
Т.к. СВ X распределена нормально, то справедлива формула

$$P(|x| < 5) = 2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right).$$

Таким образом, находим

$$2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}9, \quad \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}45.$$

По таблице находим значение аргумента соответсвующего значению функции Лапласа $\Phi(x) = 0{,}45$, $x = 1{,}65$.

Таким образом, $\dfrac{5}{\sigma} = 1{,}65$; $\sigma = \dfrac{5}{1{,}65} \approx 3\textit{мм}$.

ЗАДАНИЯ

1. Закон равномерного распределения задан плотностью вероятности $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ в интервале $(a;b)$; вне этого инетрвала $f(x) = 0$. Найти функцию распределения $F(x)$. Получить математическое ожидание и дисперсию.

2. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 3 мин.

3. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20с.

4. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x)=3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0{,}13; 0{,}7)$.

5. Время безотказной работы двигателя автомобиля распределено по показательному закону. Среднее время наработки двигателя на отказ между техническим обслуживанием – 1000 ч. Определите вероятность безотказной работы двигателя в течение 800 ч.

6. Среднее время работы каждого из двух элементов, входящих в техническое устройство, равно 1000 ч. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа каждого его элемента. Определите вероятность того, что устройство будет безотказно работать от 550 до 800 ч., если время T работы элементов независимо и распределено по показательному закону.

7. Испытывают три элемента, которые работают независимо друг от друга. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t)=1-e^{-0{,}1t}$; для второго $F_2(t)=1-e^{-0{,}2t}$; для третьего элемента $F_{31}(t)=1-e^{-0{,}3t}$. Найти вероятность того, что в интервале времени $(0;5)$ч откажет: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

8. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(15;25)$.

9. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a=10$. Вероятность попадания X в интервал $(10;20)$ равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(0;10)$.

10. Случайная величина X-ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением 4мВ. Систематическая ошибка отсутствует. Найдите вероятность того, что в четырех независимых измерениях ошибка X а) превзойдет по модулю 5мВ не более двух раз; б) хотя бы один раз окажется в интервале 0,5-3,5 мВ.

11. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

12. Три независимых измерения производят прибором, имеющим систематическую ошибку 2 мм и дисперсию 16 мм^2. Какова вероятность того, что хотя бы одно измеренное значение будет отклоняться от истинного не более чем на 6 мм.

11. Многомерные случайные величины

Рассмотренные выше случайные величины были одномерными, т.е. определялись одним числом, однако, существуют также случайные величины, которые определяются двумя, тремя и т.д. числами. Такие случайные величины называются двумерными, трехмерными и т.д.

В зависимости от типа, входящих в систему случайных величин, системы могут быть дискретными, непрерывными или смешанными, если в систему входят различные типы случайных величин.

Более подробно рассмотрим системы двух случайных величин.

Законом распределения системы случайных величин называется соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений системы случайных величин и вероятностями появления системы в этих областях.

Функцией распределения системы двух случайных величин называется функция двух аргументов $F(x, y)$, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств $X < x, Y < y$.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Отметим следующие свойства функции распределения системы двух случайных величин:

1) Если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то функция распределения системы стремится к функции распределения одной случайной величины, соответствующей другому аргументу.

$$\lim_{y \to \infty} F(x, y) = F_1(x);$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x, y) = F_2(y).$$

2) Если оба аргумента стремятся к бесконечности, то функция распределения системы стремится к единице.

$$F(\infty, \infty) = 1.$$

3) При стремлении одного или обоих аргументов к минус бесконечности функция распределения стремится к нулю.

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

4) Функция распределения является неубывающей функцией по каждому аргументу.

5) Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, вычисляется по формуле:

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$

Плотностью совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть легко найдена по формуле:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy.$$

Двумерная плотность распределения неотрицательна и двойной интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1.$$

По известной плотности совместного распределения можно найти плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины.

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy; \qquad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$F_1(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy; \quad F_2(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy.$$

Условные законы распределения

Как было показано выше, зная совместный закон распределения можно легко найти законы распределения каждой случайной величины, входящей в систему.

Однако, на практике чаще стоит обратная задача – по известным законам распределения случайных величин найти их совместный закон распределения.

В общем случае эта задача является неразрешимой, т.к. закон распределения случайной величины ничего не говорит о связи этой величины с другими случайными величинами.

Кроме того, если случайные величины зависимы между собой, то закон распределения не может быть выражен через законы распределения составляющих, т.к. должен устанавливать связь между составляющими.

Все это приводит к необходимости рассмотрения условных законов распределения.

Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется ***условным законом распределения***.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения так и плотностью распределения.

Условная плотность распределения вычисляется по формулам:

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx},$$

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}.$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами плотности распределения одной случайной величины.

***Условным математическим ожидание*м** дискретной случайной величины Y при $X = x$ (x – определенное возможное значение X) называется произведение всех возможных значений Y на их условные вероятности.

$$M(Y/X=x)=\sum_{i=1}^{m} y_i p(y_i/x).$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M(Y/X=x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy,$$

где $f(y/x)$ – условная плотность случайной величины Y при $X=x$.

Условное математическое ожидание $M(Y/x)=f(x)$ является функцией от x и называется ***функцией регрессии X на Y*.**

<u>Пример 1</u>.

Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X= x_1=1$ для дискретной двумерной случайной величины, заданной таблицей:

Y	X			
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=8$
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2=6$	0,30	0,10	0,03	0,07

$$p(x_1) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45;$$

$$p(y_1 / x_1) = p(x_1, y_1) / p(x_1) = 0{,}15 / 0{,}45 = 1/3;$$

$$p(y_2 / x_1) = p(x_1, y_2) / p(x_1) = 0{,}30 / 0{,}45 = 2/3;$$

$$M(Y / X = x_1) = \sum_{j=1}^{2} y_j p(y_j / x_1) = y_1 p(y_1 / x_1) + y_2 p(y_2 / x_1) = 3/3 + 12/3 = 5.$$

Аналогично определяются условная дисперсия и условные моменты системы случайных величин.

Зависимые и независимые случайные величины

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.

Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

Теорема. *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих.*

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y).$$

Аналогичную теорему можно сформулировать и для плотности распределения:

Теорема. *Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного* *распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих*

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}.$$

Практически используются формулы:

Для дискретных случайных величин:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)][y_j - M(Y)] p(x_i, y_j).$$

Для непрерывных случайных величин:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x, y) dxdy.$$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин *X* и *Y*. Этот факт является недостатком этой числовой характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных моментов различных случайных величин.

Для того, чтобы устранить этот недостаток применятся другая характеристика – коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

Свойство: Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий.

$$\left|\mu_{xy}\right| \le \sqrt{D_x D_y}\ .$$

Свойство: Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

$$\left|r_{xy}\right| \le 1.$$

Случайные величины называются ***коррелированными***, если их корреляционный момент отличен от нуля, и ***некоррелированными***, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

Наряду с коэффициентом корреляции степень зависимости случайных величин можно охарактеризовать и другой величиной, которая называется ***коэффициентом ковариации***. Коэффициент ковариации определяется формулой:

$$k(X,Y) = M(XY) - M(X)\cdot M(Y)\,.$$

<u>Пример 2.</u> Задана плотность распределения системы случайных величин X и Y.

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}\,.$$

Выяснить являются ли независимыми случайные величины X и Y.

Для решения этой задачи преобразуем плотность распределения:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2 + y^2(1 + x^2))} = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)} = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \frac{1}{\pi(1 + y^2)}$$

Таким образом, плотность распределения удалось представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от y. Т.е. случайные величины X и Y независимы. Разумеется, они также будут и некоррелированы.

Линейная регрессия

Рассмотрим двумерную случайную величину *(X, Y)*, где X и Y – зависимые случайные величины.

Представим приближенно одну случайную величину как функцию другой. Точное соответствие невозможно. Будем считать, что эта функция линейная

$$Y \cong g(X) = \alpha X + \beta .$$

Для определения этой функции остается только найти постоянные величины α и β.

Функция *g(X)* называется ***наилучшим приближением*** случайной величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Также функция *g(x)* называется ***среднеквадратической регрессией*** *Y* на *X*.

<u>Теорема.</u> *Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X вычисляется по формуле:*

$$g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x),$$

в этой формуле $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$, $r = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$ - коэффициент корреляции величин X и Y.

Величина $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется ***коэффициентом регрессии*** *Y* на *X*.

Прямая, уравнение которой

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),$$

называется ***прямой сренеквадратической регрессии*** *Y* на *X*.

Величина $\sigma_y^2(1-r^2)$ называется ***остаточной дисперсией*** случайной величины *Y* относительно случайной величины *X*. Эта величина характеризует величину ошибки, образующейся при замене случайной величины *Y* линейной функцией $g(X)=\alpha X+\beta$.

Видно, что если $r=\pm 1$, то остаточная дисперсия равна нулю, и, следовательно, ошибка равна нулю и случайная величина *Y* точно представляется линейной функцией от случайной величины *X*.

Прямая среднеквадратичной регрессии *X* на *Y* определяется аналогично по формуле:

$$x-m_x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y).$$

Прямые среднеквадратичной регрессии пересекаются в точке $(m_x,\ m_y)$, которую называют ***центром совместного распределения*** случайных величин *X* и *Y*.

Линейная корреляция

Если две случайные величины *X* и *Y* имеют в отношении друг друга линейные функции регрессии, то говорят, что величины *X* и *Y* связаны ***линейной корреляционной зависимостью***.

Теорема. *Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.*

ЗАДАНИЯ

1. Система случайных величин (X,Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата со стороной 1. Написать выражение плотности распределения $f(x,y)$. Найти функцию распределения $F(x,y)$. Написать выражения $f_1(x), f_2(y)$. Определить, являются ли СВ (X,Y) независимыми или зависимыми.

2. В прямоугольник с вершинами (0,0), (2,0), (2,1) и (0,1) наудачу ставится точка. (X,Y) – случайные координаты этой точки. Вычислить $M(X\pm Y), M(X^2+Y^2), M(XY)$.

3. Имеются независимые СВ (X,Y). СВ X распределена по нормальному закону с параметрами $M_x = 0, \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. СВ Y распределена равномерно на интервале (0,1). Написать выражения для $f(x,y)$ и $F(x,y)$.

4. Поверхность распределения $f(X,Y)$ системы случайных величин (X,Y) представляет прямой круговой цилиндр, центр основания которого совпадает с началом координат, а высота равна h. Определить радиус цилиндра r, найти $f_1(x), f_2(y), M_x, D_x$.

5. Случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью $f(x,y) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, (-\infty < x < \infty)$. Найти плотность распределения обратной величины $Y = \frac{1}{X}$.

6. Через точку А, лежащую на оси Oy на расстоянии 1 от начала координат, проводится прямая AB под углом α к оси Oy. Все значения угла $\alpha[-\pi/2, \pi/2]$ равновероятны. Найти плотность распределения абсциссы X точки В пересечения прямой с осью абсцисс.

7. Дискретная случайная величина X характеризуется законом распределения

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

Найти законы распределения случайных величин: $Y = X^2 + 1; \quad Z = |X|$. Найти $M(Z), D(Z)$.

8. Непрерывная СВ X распределена по показательному закону $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Найти математическое ожидание СВ $Y = e^{-X}$.

9. Через произвольную точку А на окружности радиуса r случайным образом проводится хорда АВ, так что все ее направления одинаково вероятны. Найти среднее значение длины хорды.

10. На окружность радиуса r наудачу ставятся две точки, которые затем соединяются между собой и с центром окружности. Найти математическое ожидание площади полученного треугольника.

12. Предельные теоремы теории вероятностей

Закон больших чисел. Неравенство Чебышева

(Чебышев Пафнутий Львович (1821 – 1824) – русский математик)

На практике сложно сказать какое конкретное значение примет случайная величина, однако, при воздействии большого числа различных факторов поведение большого числа случайных величин практически утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Этот факт очень важен на практике, т.к. позволяет предвидеть результат опыта при воздействии большого числа случайных факторов.

Однако, это возможно только при выполнении некоторых условий, которые определяются законом больших чисел. К законам больших чисел относятся теоремы Чебышева (наиболее общий случай) и теорема Бернулли (простейший случай), которые будут рассмотрены далее.

Рассмотрим дискретную случайную величину X (хотя все сказанное ниже будет справедливо и для непрерывных случайных величин), заданную таблицей распределения:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Требуется определить вероятность того, что отклонение значения случайной величины от ее математического ожидания будет не больше, чем заданное число ε.

<u>**Теорема.**</u> (***Неравенство Чебышева***) *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания*

по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2.$$

<u>Теорема.</u> ***(Теорема Чебышева)*** *Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышаю постоянного числа С), то, как бы мало не было положительное число ε, вероятность неравенства*

$$\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right] < \varepsilon$$

будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Т.е. можно записать:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. В этом случае теорема Чебышева несколько упрощается:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Дробь, входящая в записанное выше выражение есть не что иное как среднее арифметическое возможных значений случайной величины.

Теорема утверждает, что хотя каждое отдельное значение случайной величины может достаточно сильно отличаться от своего математического ожидания, но среднее арифметическое этих значений будет неограниченно приближаться к среднему арифметическому математических ожиданий.

Отклоняясь от математического ожидания как в положительную так и в отрицательную сторону, от своего математического ожидания, в среднем арифметическом отклонения взаимно сокращаются.

Таким образом, величина среднего арифметического значений случайной величины уже теряет характер случайности.

Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равно p.

Возможно определить примерно относительную частоту появления события A.

Теорема. *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянно, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний p достаточно велико*

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1.$$

Здесь m – число появлений события А. Из всего сказанного выше не следует, что с увеличением число испытаний относительная частота неуклонно стремится к вероятности p, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m}{n} = p$. В теореме имеется в виду только вероятность приближения относительной частоты к вероятности появления события А в каждом испытании.

В случае, если вероятности появления события А в каждом опыте различны, то справедлива следующая теорема, известная как ***теорема Пуассона.***

Теорема. *Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в каждом опыте равна p_i, то при увеличении n частота события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_i.*

Предельные теоремы

Как уже говорилось, при достаточно большом количестве испытаний, поставленных в одинаковых условиях, характеристики случайных событий и случайных величин становятся почти неслучайными.

Это позволяет использовать результаты наблюдений случайных событий для предсказания исхода того или иного опыта.

Предельные теоремы теории вероятностей устанавливают соответствие между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом количестве испытаний.

В рассмотренном выше законе больших чисел нечего не говорилось о законе распределения случайных величин.

Поставим задачу нахождения предельного закона распределения суммы

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

когда число слагаемых *n* неограниченно возрастает. Эту задачу решает ***Центральная предельная теорема Ляпунова***, которая была сформулирована выше.

В зависимости от условий распределения случайных величин X_i, образующих сумму, возможны различные формулировки центральной предельной теоремы.

Допустим, что случайные величины X_i взаимно независимы и одинаково распределены.

Теорема. *Если случайные величины X_i взаимно независимы и имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, причем существует третий абсолютный момент ν_3, то при неограниченном увеличении числа испытаний n закон распределения суммы $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.*

Случайные величины X_i, рассмотренные в центральной предельной теореме, могут обладать произвольными распределениями вероятностей.

Если все эти случайные величины одинаково распределены, дискретны и принимают только два возможных значения 0 или 1, то получается простейший случай центральной предельной теоремы, известный как ***теорема Муавра – Лапласа***.

Теорема. (Теорема Муавра – Лапласа) *Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с* *вероятностью p, то для любого интервала (α, β) справедливо соотношение:*

$$P\left(\alpha < \frac{Y-np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right] = \overline{\Phi}(\beta) - \overline{\Phi}(\alpha),$$

где Y – число появлений события A в n опытах, q = 1 – p, Ф(x) – функция Лапласа, $\overline{\Phi}(x)$ *- нормированная функция Лапласа* .

Теорема Муавра – Лапласа описывает поведение биноминального распределения при больших значениях *n*.

Данная теорема позволяет существенно упростить вычисление по формуле биноминального распределения.

Расчет вероятности попадания значения случайной величины в заданный интервал $P(\alpha < Y < \beta) = \sum\limits_{\alpha < k < \beta} C_n^k p^k q^{n-k}$ при больших значениях *n* крайне затруднителен. Гораздо проще воспользоваться формулой:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}\right)\right].$$

Теорема Муавра – Лапласа очень широко применяется при решении практических задач.

Пример 1. Вероятность наступления события А в каждом испытании равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что в 10000 испытаниях отклонение относительной частоты появления события А от его вероятности не превзойдет по абсолютной величине 0,01.

Решение. В соответствии с неравенством Чебышева вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания будет меньше некоторого числа ε, ограничена в соответствии с неравенством $P(|X - m_x| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}$.

Надо определить математическое ожидание и дисперсию числа появления события А при одном опыте. Для события А случайная величина может принимать одно из двух значений: 1- событие появилось, 0- событие не появилось. При этом вероятность значения 1 равна вероятности p=0,3, а вероятность значения 0- равна вероятности ненаступления события А

$$q=1-p=0{,}7.$$

По определению математического ожидания имеем:

$$m_x = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = 0{,}3$$

Дисперсия: $D_x = (0-p)^2 q + (1-p)^2 p = pq = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$.

В случае n независимых испытаний получаем $m_x = np; \quad D_x = npq$.

В нашем случае получаем: $m_x = 3000; \quad D_x = 2100.$

Вероятность отклонения относительной частоты появления события А в n испытаниях от вероятности на величину, не превышающую ε=0,01 равна:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P(|m - np| < n\varepsilon) = P(|m - m_x| < n\varepsilon) = P(|m - 3000| < 100).$$

Выражение полученное в результате этих простых преобразований представляет собой не что иное, как вероятность отклонения числа m появления события А от математического ожидания на величину не большую, чем δ=100.

В соответствии с неравенством Чебышева эта вероятность будет не меньше, чем величина $1 - \frac{D_x}{\delta^2} = 1 - \frac{2100}{10000} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$

<u>Пример 2.</u> Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,96, можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты годных деталей от вероятности детали быть годной, равной 0,98, не превысит 0,02.

Решение. Условие задачи фактически означает, что выполняется неравенство:

$$P\left(\left|\frac{n}{m} - 0{,}98\right| \le 0{,}02\right) \ge 0{,}96.$$

Здесь n- число годных деталей, m- число проверенных деталей. Для применения неравенства Чебышева преобразуем полученное выражение:

$$P(|n-0{,}98m| \le 0{,}02m) \ge 1-\frac{D_x}{(0{,}02m)^2} \ge 0{,}96.$$

После домножения выражения, стоящего в скобках, на m получаем вероятность отклонения по модулю количества годных деталей от своего математического ожидания, следовательно, можно применить неравенство Чебышева, т.е. эта вероятность должна быть не меньше, чем величина $1-\frac{D_x}{(0{,}02m)^2}$, а по условию задачи еще и не меньше, чем 0,96.

Таким образом, получаем неравенство $0{,}96 \le 1-\frac{D_x}{(0{,}02m)^2}$. Как уже говорилось в предыдущей задаче, дисперсия может быть найдена по формуле $D_x = mpq$.

Итого, получаем:

$$D_x \le (0{,}02m)^2 - 0{,}96\cdot(0{,}02m)^2; \quad m\cdot 0{,}98\cdot 0{,}02 \le 0{,}04\cdot(0{,}02m)^2;$$

$$m \ge \frac{0{,}98\cdot 0{,}02}{0{,}04\cdot 0{,}0004}; \qquad m \ge 1225.$$

Т.е. для выполнения требуемых условий необходимо не менее 1225 деталей.

Пример 3. Суточная потребность электроэнергии в населенном пункте является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 3000 кВт/час, а дисперсия составляет 2500. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход электроэнергии в этом населенном пункте будет от 2500 до 3500 кВт/час. Требуется найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал: $P(2500 \le X \le 3500) = ?$

Решение. Крайние значения интервала отклоняются от математического ожидания на одну и ту же величину, а именно – на 500. Тогда можно записать с учетом неравенства Чебышева:

$$P(2500 \le X \le 3500) = P(|X - m_x| \le 500) \ge 1 - \frac{D_x}{500^2}.$$

Отсюда получаем:

$$P \ge 1 - \frac{2500}{250000} = 0{,}99.$$

Т.е. искомая вероятность будет не меньше, чем 0,99.

Пример 4. Среднее квадратическое отклонение каждой из 2500 независимых случайных величин не превосходит 3. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превосходит 0,3. Требуется найти вероятность

$$p = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{xi}}{n}\right| \le 0{,}3\right)$$

Решение. Неравенство Чебышева в случае суммы случайных величин имеет вид:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{xi}}{n}\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2 \varepsilon^2}.$$

Если среднее квадратическое отклонение не превосходит 3, то, очевидно, дисперсия не превосходит 9. Величина ε по условию задачи равна 0,3.

Тогда $p \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2 \varepsilon^2} = 1 - \frac{9n}{n^2 \cdot 0{,}09}$. Отсюда получаем при n=2500: $p \ge 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

Пример 5. Выборочным путем требуется определить среднюю длину изготавливаемых деталей. Сколько нужно исследовать деталей, чтобы с вероятностью, большей чем 0,9, можно было утверждать, что средняя длина отобранных изделий будет отличаться от математического ожидания этого среднего (средняя длина деталей всей партии) не более, чем на 0,001 см.? Установлено, что среднее квадратическое отклонение длины детали не превышает 0,04 см.

Решение. По условию если среднее квадратическое отклонение не превышает 0,04, то дисперсия, очевидно, не превышает $(0{,}04)^2$. Также по условию задано, что

$$p = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| \le 0{,}001\right) > 0{,}9.$$

Если преобразовать соотношение, стоящее в скобках и после этого применить неравенство Чебышева, получаем:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - nm_x\right| \le 0{,}001n\right) \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2 \cdot 0{,}001^2} > 0{,}9;$$

$$1 - \frac{n \cdot 0{,}04^2}{n^2 \cdot 0{,}001^2} > 0{,}9;$$

$$0{,}1 \cdot 0{,}001^2 n > 0{,}04^2;$$

$$n > \frac{0{,}04^2}{0{,}1 \cdot 0{,}001^2};$$

$$n > 16000.$$

Т.е. для достижения требуемой вероятности необходимо отобрать более 16000 деталей.

Описанный подход, как видно, позволяет решить множество чисто практических задач.

ЗАДАНИЯ

1. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,2. Определить вероятность того, что среди 50 наугад выбранных деталей бракованных окажется не менее 6.

2. Известно, что 60% всего числа изготавливаемых заводом изделий являются изделиями первого сорта. Приемщик берет первые попавшиеся 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них окажется из от 120 до 150 изделий первого сорта?

3. Проверкой установлено, что 96% изделий служат не меньше гарантируемого срока. Наугад выбирают 15000 изделий. Найти вероятность того, что со сроком службы менее гарантируемого будет от 570 до 630 изделий.

13. Теория массового обслуживания. Случайные процессы

Система массового обслуживания состоит из некоторого числа обслуживающих единиц или ***каналов***, работа которых состоит в выполнении поступающих по этим каналам ***заявок***.

Примеры систем массового обслуживания весьма распространены на практике. Это различные телефонные станции, ремонтные мастерские и проч. Вид и количество поступающих на эти системы заявок различны и, вообще говоря, случайны.

Теория массового обслуживания описывает закономерности функционирования таких систем.

Процесс функционирования системы массового обслуживания называется ***случайным процессом.***

Чтобы оптимизировать процесс функционирования системы массового обслуживания его надо изучить и описать математически.

Теория массового обслуживания является очень быстро развивающимся разделом теории вероятностей, т.к. ее применение на практике чрезвычайно широко.

Случайный процесс, протекающий в системе массового обслуживания состоит в том, что система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое. Меняется число заявок, число занятых каналов, число заявок в очереди и проч.

Если переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, а количество состояний системы (конечное или бесконечное) можно пронумеровать, то такая система называется ***системой дискретного типа.***

Если количество возможных состояний счетно, то сумма вероятностей нахождения системы в одном из состояний равна 1

$$\sum_{k} p_k(t) = 1.$$

Совокупность вероятностей $p_k(t)$ для каждого момента времени характеризует данное ***сечение*** случайного процесса.

Случайные процессы со счетным множеством состояний бывают двух типов: ***с дискретным*** или ***непрерывным временем***.

Если переходы системы из одного состояния в другое могут происходить только в строго определенные моменты времени, то случайный процесс будет процессом с дискретным временем, а если переход возможен в любой момент времени, то процесс будет процессом с непрерывным временем.

Поскольку в реальности заявки на систему массового обслуживания могут поступать в любой момент времени, то большинство реальных систем массового обслуживания будут системами с процессом с непрерывным временем.

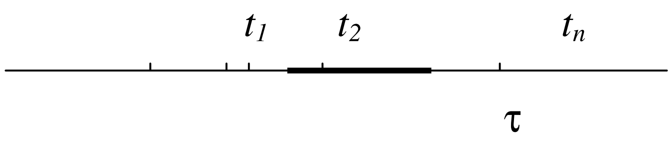
Для того, чтобы описать случайный процесс в системе с непрерывным временем необходимо прежде всего проанализировать причины, вызывающие изменение состояния системы. Эти причины определяются потоком заявок, поступающих на систему.

Поток событий

Потоком событий называется последовательность событий, происходящих один за другим в какие- то моменты времени.

Характер событий, образующих поток может быть различным, а если события отличаются друг от друга только моментом времени, в который они происходят, то такой поток событий называется ***однородным***.

Однородный поток можно изобразить последовательностью точек на оси, соответствующей времени:



Поток событий называется ***регулярным***, если события следует одно за другим через строго определенные промежутки времени.

Поток событий называется ***стационарным,*** если вероятность попадания того ли иного числа событий на участок времени τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси расположен этот участок.

Стационарность потока событий означает, что плотность потока постоянна, отсутствуют промежутки времени, в течение которых событий больше чем обычно. Классический пример – “час пик” на транспорте.

Поток событий называется ***потоком без последействий,*** если для любых неперекрещивающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, опадающих на другие.

Отсутствие последействий означает, что заявки в систему поступают независимо друг от друга. Поток выходных событий систем массового обслуживания обычно имеет последействие, даже если входной поток его не имеет. Пример – вход пассажиров на станцию метро – поток без последействия, т.к. причины прихода отдельного пассажира не связаны с причинами прихода всех остальных, а выход пассажиров со станции – поток с последействием, т.к. он обусловлен прибытием поезда.

Последействие, свойственное выходному потоку следует учитывать, если этот поток в свою очередь является входным для какой-либо другой системы.

Поток событий называется ***ординарным,*** если вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более событий достаточно мало по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Условие ординарности означает, что заявки на систему приходят по одному, а не парами, тройками и т.д. Однако, если заявки поступают только парами, только тройками и т.д., то такой поток легко свести к ординарному.

Если поток событий стационарен, ординарен и без последействий, то такой поток называется ***простейшим (пуассоновским)*** потоком.

Это название связано с тем, что в этом случае число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, распределено по распределению Пуассона.

В соответствии с этим законом распределения математическое ожидание числа точек, попавших попадающих на участок времени τ, имеет вид:

$$a = \lambda\tau ,$$

λ - плотность потока – среднее число событий в единицу времени.

Вероятность того, что за время τ произойдет ровно *m* событий, равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} .$$

Вероятность того, что в течение данного времени не произойдет ни одного события, равна:

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} .$$

Пусть *T* – промежуток времени между двумя произвольными соседними событиями в простейшем потоке. Найдем функцию распределения

$$F(t) = P(T < t) .$$

В соответствии с законом распределения Пуассона, получаем:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \qquad f(t) = \lambda e^{-\lambda t} .$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны:

$$m_t = \frac{1}{\lambda}; \quad D_t = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_t = \frac{1}{\lambda} .$$

Таким образом, для величины T получили <u>показательный закон распределения.</u>

<u>Пример 1.</u>

В бюро обслуживания в среднем поступает 12 заявок в час. Считая поток заказов простейшим, определить вероятность того, что: а) за 1 минуту не поступит ни одного заказа, б) за 10 минут поступит не более трех заказов.

Решение. Сначала найдем плотность (интенсивность) потока, выразив ее в количестве заявок в минуту. Очевидно, эта величина равна $\lambda = \frac{12}{60} = 0{,}2$.

Далее находим вероятность того, что за время $\tau = 1$ мин не поступит ни одной заявки по формуле:

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} = e^{-0{,}2} \approx 0{,}819.$$

Вероятность того, что за 10 минут поступит не более трех заказов будет складываться из вероятностей того, что не поступит ни одного заказа, поступит один, два или ровно три заказа.

$$P(m \le 3) = \sum_{m=0}^{3} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} = e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4}{2}e^{-2} + \frac{8}{6}e^{-2} = \frac{19}{3}e^{-2} = 0{,}8571.$$

<u>Пример 2.</u>

В ресторан прибывает в среднем 20 посетителей в час. Считая поток посетителей простейшим, и зная, что ресторан открывается в 11.00, определите:

а) вероятность того, что в 11.12 в ресторан придет 20 посетителей при условии, что в 11.07 их было 18

б) вероятность того, что между 11.28 и 11.30 в ресторане окажется новый посетитель, если известно, что предшествующий посетитель прибыл в 11.25.

Решение. Для ответа на первый вопрос фактически надо найти вероятность того, что в промежуток от 11.07 до 11.12 ($\tau = 5$ минут) придет ровно 2 посетителя. При этом мы знаем интенсивность потока посетителей - $\lambda = 20/60 = 1/3$ посетителей в минуту. Конечно, данная величина носит условный характер, т.к. посетители не могут приходить по частям.

Искомая вероятность равна:

$$P_2(5) = \frac{\left(\frac{1}{3}\cdot 5\right)^2}{2!} e^{-\frac{1}{3}\cdot 5} \approx 0{,}2623.$$

Теперь перейдем ко второму вопросу. Нам не сказано, сколько именно новых посетителей будет в промежутке от 11.28 до 11.30, главное чтобы был хоть один. Эта вероятность равна

$1-P_0(2)=1-e^{-\frac{2}{3}}\approx 0{,}4866$. Здесь $P_0\ (2)$ – вероятность того, что в этом промежутке не будет ни одного посетителя.

Часть III
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

14. Выборочный метод. Оценка параметров распределения

Математическая статистика — раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей. ***Предметом*** математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений. Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные сначала надо обработать:

1) ***упорядочить***, представить в удобном для обозрения и анализа виде.

*2)****оценить***, хотя бы приблизительно, *интересующие* нас *характеристики* наблюдаемой случайной величины. Например, дать оценку неизвестной вероятности события, оценку математического ожидания, оценку дисперсии случайной величины, оценку параметров распределения, вид которого неизвестен, и т.д.

*3)****проверка статистических гипотез***, то есть решение вопроса согласования результатов оценивания с опытными данными. Например, выдвигается гипотеза, что наблюдаемая случайная величина подчиняется нормальному закону или случайное событие обладает данной вероятностью.

Одной из важнейших задач математической статистики является разработка методов, позволяющих по результатам обследования выборки (т. е. части исследуемой совокупности объектов) делать обоснованные выводы о распределении признака изучаемых объектов по всей совокупности.

Для обработки статистических данных созданы специальные программные пакеты (STADIA, SYSTAT, STAT-GRAPHICS и др.). Простейшие статистические функции имеются в программируемых калькуляторах и офисных программах (EXCEL).

Результаты исследования статистических данных методами математической статистики *используются для принятия решения*, т.е. для научных и практических выводов.

Генеральная совокупность и выборка

Пусть требуется изучить множество однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Если сплошное обследование невозможно, то из всей совокупности выбирают для изучения часть объектов.

Статистическая совокупность, из которой отбирают часть объектов, называется ***генеральной совокупностью (случайной величиной X).*** Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называется ***выборкой***.

Число объектов генеральной совокупности и выборки называется соответственно объемом генеральной совокупности и объемом выборки. Все объекты генеральной совокупности должны иметь одинаковую вероятность попасть в выборку, т. е. выбор должен производится случайно.

Пример. Плоды одного дерева (200 шт.) обследуют на наличие специфического для данного сорта вкуса. Для этого отбирают 10 шт. Здесь 200 — объем генеральной совокупности, а 10 — объем выборки.

Статистическое распределение выборки. Полигон. Гистограмма

Рассмотрим эксперимент, описание которого строится при помощи случайной величины *X*. Это означает, что однократный эксперимент дает нам возможность определить одно из возможных значений случайной величины *X*. Пусть в результате n экспериментов получен набор значений случайной величины *X*: $x_1, x_2, \ldots x_k$. То есть, из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, x_k — n_k раз и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ — объем выборки. Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \ldots x_k$ называются ***вариантами***, а последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке, — вариационным рядом. Числа наблюдений

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ называют частотами, а их отношения к объему выборки относительными частотами:

$$\frac{n_1}{n} = p_1^*, \frac{n_2}{n} = p_2^*, \ldots, \frac{n_k}{n} = p_k^*,$$

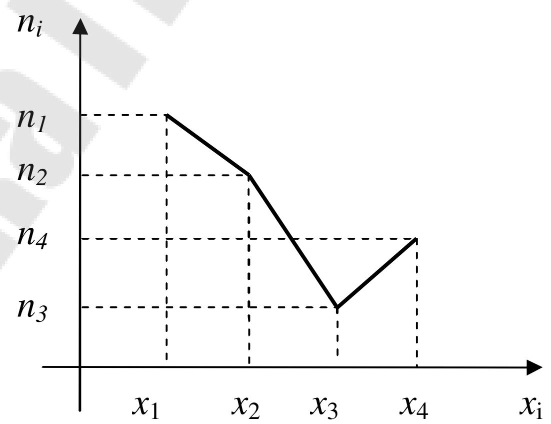
Отметим, что сумма относительных частот равна единице:

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_k^* = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_k}{n} = 1.$$

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (непрерывное распределение). В качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал.

Для графического изображения статистического распределения используются ***полигоны*** и ***гистограммы***.

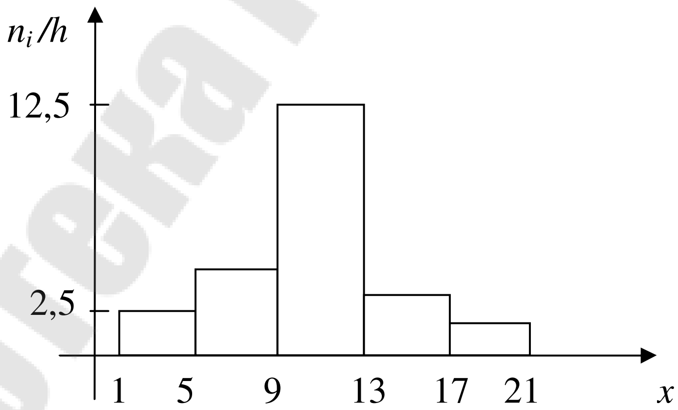
Для построения полигона на оси Ox откладывают значения вариант $x_i, i = 1,...,k$, на оси Oy — значения частот $n_i, i = 1,...,k$ (относительных частот p_i^*). Точки соединяем ломаной.



Полигоном обычно пользуются в случае небольшого количества вариант. В случае большого количества вариант и в случае непрерывного распределения признака чаще строят гистограммы. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i — сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. Затем на этих интервалах как на основаниях строят прямоугольники с высотами n_i/h (плотность частоты). Площадь i-го частичного прямоугольника равна n_i. Следовательно, площадь гистограммы равна сумме всех частот, т. е. объему выборки (или единице).

Пример. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n = 100$:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2



Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке

Пусть в эксперименте изучается случайная величина X и, из теоретических соображений, известен ее закон распределения. Естественно, возникает задача оценки (приближенного нахождения) параметров θ_i, которыми определяется это распределение. Например, если известно, что случайная величина X распределена в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить, т. е. приближенно найти математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки генеральной совокупности, например $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полученные в результате n наблюдений (здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр.

1. Числовые характеристики выборки. ***Выборочной средней*** $\bar{x}_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки. Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выборки объема n различны, то

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Если же значения выборки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i^*.$$

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\bar{x}_{\text{в}}$, вводят выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией $D_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака X от выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot n_i = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot p_i^*.$$

Можно показать, что $D_{\text{в}}$ может быть вычислена по формуле:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - (\bar{x}_{\text{в}})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением $\sigma_{\text{в}}$ называется квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}.$$

Особенность $\sigma_{\text{в}}$ состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и измеряемый признак.

Пример. Выборочным путем были получены следующие данные о массе 20 хомячков при рождении (в г): 30, 30, 25, 32, 30, 25, 33, 32, 29, 28, 27, 36, 31, 34, 30, 23, 28, 34, 36, 30. Найти выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}$ и выборочную дисперсию $D_{\text{в}}$.

Решение. Согласно формулам имеем:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{20}(23 + 25 \cdot 2 + 27 + 28 \cdot 2 + 29 + 30 \cdot 5 + 31 \cdot 2 +$$
$$32 \cdot 2 + 33 + 34 + 36 \cdot 2) = 30.$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{11}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot n_i = \frac{1}{20}(7^2 + 5^2 \cdot 2 + 3^2 + 2^2 \cdot 2 +$$
$$+ 1 + 0 + 1 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 \cdot 2) = 11{,}2.$$

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{11{,}2} \approx 3{,}35.$$

2. Оценки параметров распределения. Для оценки параметров распределения θ_i из данных выборки составляют выражения, которые должны служить оценками неизвестных параметров. Для того чтобы оценка $\tilde{\theta}$ давала хорошее приближение, она должна удовлетворять определенным требованиям: быть несмещенной и состоятельной.

Несмещенной называют оценку $\tilde{\theta}$, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ:

$$M(\tilde{\theta}) = \theta,$$

в противном случае оценка называется ***смещенной***.

Пример. Оценка $\bar{x}_в$ является несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания), так как $M(\bar{x}_в) = M(X)$.

Пример. Оценка $\sigma_в^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D(X)$, так как

$$M(D_в) = M(\sigma_в^2) = \frac{n}{n-1} D(X).$$

Естественно в качестве приближенного неизвестного параметра брать несмещенные оценки, для того чтобы не делать систематической ошибки в сторону завышения или занижения.

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит ***исправленная выборочная дисперсия***:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2.$$

Для оценки генерального среднего квадратического отклонения используют ***исправленное среднее квадратическое отклонение***, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2}.$$

Метод моментов

Пусть изучается случайная величина X с математическим ожиданием $M(X)$ и дисперсией $D(X)$ и оба эти параметра неизвестны.

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. То есть точечная оценка характеристики генеральной совокупности — это число, определяемое по выборке.

Метод моментов для нахождения точечных оценок неизвестных параметров заданного распределения состоит *в приравнивании теоретических моментов распределения соответствующим эмпирическим моментам*, найденных по выборке.

Так, если распределение зависит от одного параметра θ, то для нахождения его оценки $\tilde{\theta}$ надо решить относительно θ одно уравнение:

$$M(X) = \bar{x}_\text{в}.$$

Если распределение зависит от двух параметров, то надо решить относительно θ_1 и θ_2 систему уравнений

$$\begin{cases} M(X) = \bar{x}_\text{в}, \\ D(X) = D_\text{в}. \end{cases}$$

Пример. Пусть СВ Х имеет распределение Пуассона: $P(X = k) = \dfrac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}$. Наблюдаемые: $x_1 = 14, x_2 = 12, x_3 = 9, x_4 = 8, x_5 = 15, x_6 = 7, x_7 = 11, x_8 = 8$. Нужно оценить неизвестный параметр θ с помощью метода моментов.

Решение. Известно, что математическое ожидание распределения Пуассона $M(X) = \theta$. Для того, чтобы найти оценку неизвестного параметра θ решаем уравнение $M(X) = \bar{x}_\text{в}$. Для этого приравняем $M(X) = \theta$ и $\bar{x}_\text{в}$. Тогда оценка $\theta = \bar{x}_\text{в} = 9{,}25$.

Доверительные интервалы.

Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ можно сказать, что внутри этого интервала находится точное значение оцениваемого параметра

$$P(\tilde{\theta} \in (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)) = \gamma = 1 - \alpha.$$

При этом интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ называется ***доверительным*** интервалом, γ - доверительной вероятностью или надежностью, а α - уровнем значимости.

Величина γ выбирается заранее, ее принято выбирать равной 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. Интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ часто выбирают симметричным относительно точечной оценки $\tilde{\theta}$.

Для оценки математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X по выборочной средней $\bar{x}_в$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ - точность оценки; n - объем выборки; t - такое значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. Приложение), при котором $\Phi(t) = \gamma / 2$. То есть

$$P\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Для оценки математического ожидания a нормально распределенной случайной величины X по выборочной средней $\bar{x}_в$ при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\bar{x}_в - t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $t_\gamma = t(n, \gamma)$ - коэффициент Стьюдента, который находят по таблице по заданным n и γ (см. Приложение); s - исправленное среднее квадратическое отклонение.

ЗАДАНИЯ

1 Известно, что случайная величина X имеет распределение Пуассона, неизвестным является параметр распределения. Используя метод моментов и метод наибольшего правдоподобия получения точечных оценок, найти по реализации выборки (2,3; 2,4; 2,3; 2,1; 2,5; 2,3; 2,7; 2,2; 2,3; 2,2) значение оценки неизвестного параметра λ.

2. Известно, что случайная величина X имеет биномиальное распределение, неизвестным является параметр p. Используя метод моментов и метод наибольшего правдоподобия получения точечных оценок, найти по реализации выборки (7,5; 7,8; 8,3; 10,1; 7,9; 7,6; 8,0; 7,2; 8,2; 8,1) значение оценки неизвестного параметра p.

3. Случайная величина X имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием и известной дисперсией $\sigma_в^2$. По выборке объема n вычислено выборочное среднее $\bar{x}$. Определить доверительный интервал для неизвестного параметра распределения a, отвечающий заданной доверительной вероятности P.

4. Случайная величина X имеет нормальное распределение с неизвестными математическим ожиданием a и дисперсией. По выборке объема n вычислены оценки $\bar{x}$ и s^2 неизвестных параметров. Найти доверительный интервал для математического ожидания a, отвечающий доверительной вероятности P.

5. В результате n опытов получена несмещенная оценка для дисперсии нормальной случайной величины. Найти доверительный интервал для дисперсии при доверительной вероятности P.

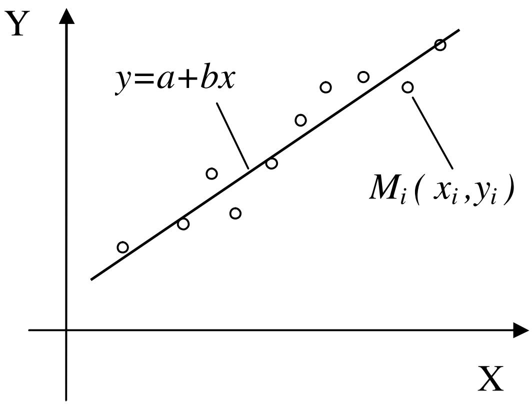
6. В серии из n выстрелов по мишени наблюдалось m попаданий. Найти доверительный интервал для вероятности p попадания в мишень при доверительной вероятности P.

7. В серии из n опытов событие A не наступило ни разу. Определить число опытов n, при котором верхняя доверительная граница для вероятности $P(A)$ равна заданному числу p_i. Доверительную вероятность принять равной p.

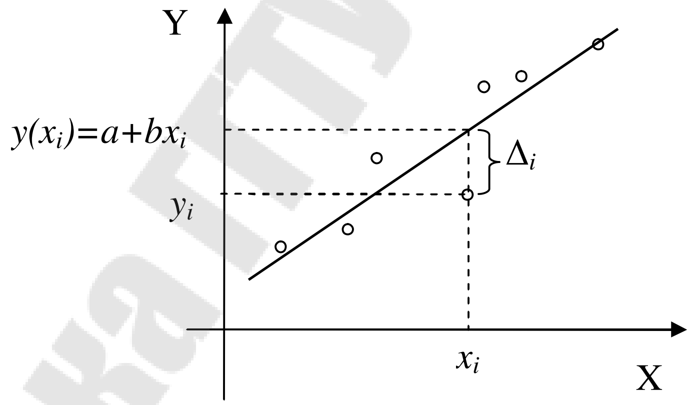
15. Метод наименьших квадратов для линейной зависимости

Предположим, что произведен эксперимент, в результате которого зафиксировано n значений исследуемых переменных X и Y:

(x_i, y_i) $(i = 1,2,...,n)$. Нанесем экспериментальные данные в виде точек в декартовой системе координат.



Пусть вид зависимости линейный: $y = a + bx$. Следующая задача экспериментатора – нахождение коэффициентов (параметров) a и b линейной эмпирической функции регрессии Y на X. Найдем эти коэффициенты методом наименьших квадратов.



Построим функцию $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - y_i)^2$, равную сумме квадратов отклонений Δ_i^2 экспериментальных точек от искомой прямой $y = ax + b$.

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i)^2.$$

Пусть параметры a и b будут такими, что функция $S(a,b)$ примет минимальное значение. Для этого приравняем частные производные функции $S(a,b)$ по переменным a и b к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим параметры a и b.

Последовательность действий
для определения вида зависимости $y = a + bx$:

1) Результаты прямых измерений x_i и y_i записываем в таблицу.
2) Вычисляем средние значения:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

3) Вычисляем дисперсии: $D_x = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad D_y = \overline{y^2} - \bar{y}^2$.
4) Находим оценки параметров: $b = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{D_x}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$
5) Степень зависимости между X и Y описывается с помощью коэффициента корреляции $r = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}}$. При этом:

а) если между переменными X и Y существует линейная положительная функциональная связь, то $r = 1$;

б) если между переменными X и Y существует линейная отрицательная функциональная связь, то $r = -1$;

в) при отсутствии линейной зависимости между переменными X и Y $r = 0$.

Итак, чем ближе по модулю коэффициент корреляции к нулю, тем слабее зависимость X и Y.

Встроенная линейная регрессия имеется, например, в программируемых калькуляторах и офисных программах (EXCEL).

Пример.

Найти уравнение прямой регрессии по четырем парам наблюдаемых значений (X, Y):

x_i	1	2	3	4
y_i	2	4	5	7

Решение. Вычислим:

$$\overline{x} = 2{,}5; \quad \overline{y} = 4{,}5; \quad \overline{x^2} = 7{,}5; \quad \overline{y^2} = 23{,}5; \quad \overline{xy} = 13{,}25.$$
$$R_{xy} = 2; \quad D_x = 1{,}25; \quad D_y = 3{,}25; \quad b = 1{,}6; \quad a = 0{,}5.$$

Следовательно, уравнение регрессии имеет вид: $y = 0{,}5 + 1{,}6x$.

Вычислим коэффициент корреляции: $r = \dfrac{2}{\sqrt{1{,}25}\sqrt{3{,}25}} \approx 0{,}99$. Результат близок к единице, следовательно между переменными X и Y действительно существует линейная положительная функциональная связь.

Вопросы для самопроверки:

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Дайте определение события, исхода, испытания, вероятности
3. Какое событие называется случайным?
4. Какое событие называется невозможным?
5. Какие события называются противоположными?
6. Какие события называются несовместными?
7. Какое событие называется достоверным?
8. Что называется пространством элементарных событий?
9. Дайте определение полной группы событий.
10. Что называется вероятностью события.
11. Запишите классическую формулу вероятности события.
12. Как определяется геометрическая вероятность события?
13. Запишите формулу относительной частоты события.
14. Перечислите свойства вероятности события.
15. Как определяется вероятность суммы несовместных событий?
16. Запишите формулу вероятности суммы совместных событий.
17. Дайте определение условной вероятности.
18. Какие события называются независимыми?
19. Запишите обобщенную формулу сложения для совместных событий.
20. Запишите формулы комбинаторики.
21. Как находится вероятность появления хотя бы одного события?
22. Запишите формулу Байеса. Когда применяется формула Байеса?
23. Запишите формулу полной вероятности.
24. Чему равна сумма вероятностей гипотез?
25. Описать схему Бернулли.
26. Запишите формулу Бернулли. Когда она применяется?
27. Как определяется наивероятнейшее число событий?
28. Запишите формулу Пуассона. Когда она применяется?
29. Какими свойствами обладает простейший пуассоновский поток событий?
30. Запишите локальную формулу Лапласа.
31. Запишите интегральную формулу Лапласа.
32. Чему равна плотность вероятности для показательного распределения?
33. Как называется кривая нормального распределения?
34. Чему равна вероятность попадания СВ X в интервал?

35. Чему равно значение функции Лапласа?
36. Функция Лапласа является четной или нечетной?
37. Запишите формулу отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
38. Что называется случайной величиной?
39. Какая случайная величина называется дискретной?
40. Что называется рядом распределения СВ?
41. Дайте определение функции распределения.
42. Перечислите свойства функции распределения.
43. Как найти математическое ожидание ДСВ?
44. Запишите свойства M(X)
45. Как найти дисперсию ДСВ?
46. Запишите свойства D(X).
47. Геометрический и механический смысл M(X) и D(X)?
48. Какая случайная величина называется непрерывной?
49. Дайте определение плотности распределения f(x).
50. Перечислите свойства плотности распределения.
51. Как найти математическое ожидание НСВ?
52. Как найти дисперсию НСВ?
53. Какое число принимается за значение бернуллиевской случайной величины?
54. Чему равно M(X) и D(X) для биномиального распределения?
55. Какое распределение называется геометрическим?
56. Какое число принимается за значение пуассоновской случайной величины?
57. Чему равно M(X) и D(X) для пуассоновского распределения?
58. Какое распределение называют законом распределения редких явлений?
59. Какое распределение называется нормальным? Как он задается?
60. Какими параметрами определяется нормальный закон распределения?
61. Что называется стандартной случайной величиной?
62. Как найти вероятность попадания СВ в заданный интервал для нормального закона?
63. Сформулируйте правило трех сигм.
64. Как найти вероятность того, что непрерывная случайная величина отклонится от своего среднего значения не более чем на заданное положительное число?

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.В. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.В.Гмурман. – М.: Высшая математика, 1970.
2. Гмурман В.В. Теория вероятностей и математическая статистика / В.В.Гмурман. – М.: Высшая математика, 1977.
3. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / под ред. А.П.Рябушко. – Мн. Вышэйшая школа, 1992.
4. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е.И.Гурский. – Мн.: Вышэйшая школа, 1976.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей / Е.С.Вентцель. – М. Наука, 1978.
6. Сборник задач по математике для втузов. ч.3: учеб. пособие для втузов / под ред. А.В.Ефимова. – М.: Наука, 1986.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В.Гнеденко. – М.: Наука, 1988.
8. Курс теории вероятностей / В.П.Чистяков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1982.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Значения функций $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0148	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
x										
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Приложение 2. Значения функций

$$\Phi(x) = \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ и } \overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$
0,00	0,0000	0,0000	0,60	0,6039	0,2257	1,20	0,9103	0,3849	1,80	0,9891	0,4641
02	0226	0080	62	6194	2324	22	9155	3888	82	9899	4656
04	0451	0160	64	6346	2389	24	9205	3925	84	9907	4671
06	0676	0239	66	6494	2454	26	9252	3962	86	9915	4686
08	0901	0319	68	6638	2517	28	9297	3997	88	9922	4699
0,10	1125	0398	0,70	6778	2580	1,30	9340	4032	1,90	9928	4713
12	1348	0478	72	6914	2642	32	9381	4066	92	9934	4726
14	1569	0557	74	7047	2703	34	9419	4099	94	9939	4738
16	1790	0636	76	7175	2764	36	9456	4131	96	9944	4750
18	2009	0714	78	7300	2823	38	9490	4162	98	9949	4761
0,20	2227	0793	0,80	7421	2881	1,40	9523	4192	2,00	9953	4772
22	2443	0871	82	7538	2939	42	9554	4222	05	9963	4798
24	2657	0948	84	7651	2995	44	9583	4251	10	9970	4821
26	2869	1026	86	7761	3051	46	9610	4279	15	9976	4842
28	3079	1103	88	7867	3106	48	9636	4306	20	9981	4860
0,30	3286	1179	0,90	7969	3159	1,50	9661	4332	2,25	9985	4877
32	3491	1255	92	8068	3212	52	9684	4357	30	9988	4892
34	3694	1331	94	8163	3264	54	9706	4382	35	9991	4906
36	3893	1406	96	8254	3315	56	9726	4406	40	9993	4918
38	4090	1480	98	8342	3365	58	9745	4429	45	9995	4928
0,40	4284	1554	1,00	8427	3413	1,60	9763	4452	2,50	9996	4938
42	4475	1628	02	8508	3461	62	9780	4474	60	9998	4953
44	4662	1700	04	8586	3508	64	9796	4495	70	9999	4965
46	4847	1772	06	8661	3554	66	9811	4515	80	9999	4974
48	5027	1844	08	8733	3599	68	9825	4535	2,90	0,9999	4981

Приложение 3.
Квантили распределения Стьюдента.

k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	3,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	7,09	8,29

Бабич Александр Антонович
Емелин Анатолий Владимирович
Корсун Лидия Дмитриевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**Учебно-методическое пособие
по одноименной дисциплине для студентов специальностей
1-36 04 02 «Промышленная электроника»,
1-40 04 01 «Информатика и технологии
программирования», 1-40 05 01 «Информационные
системы и технологии (по направлениям)»
и 1-53 01 07 «Информационные технологии
и управление в технических системах»
дневной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 25.04.18.
Рег. № 60Е.
http://www.gstu.by