Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

С. Ф. Андреев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ
по одноименной дисциплине
для студентов технических специальностей
заочной формы обучения
В трех частях
Часть 3 (1). Динамика точки

Гомель 2011

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
А65

Рекомендовано научно-методическим советом
заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 1 от 07.10.2010 г.*)

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. «Гидропневмоавтоматика» ГГТУ им. П. О. Сухого
В. В. Пинчук

Андреев, С. Ф.
А65 Теоретическая механика : курс лекций по одноим. дисциплине для студентов техн. специальностей заоч. формы обучения : в 3 ч. Ч. 3 (1). Динамика точки / С. Ф. Андреев. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2011. – 110 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

Изложены основные темы курса «Динамика материальной точки». Особое внимание уделено элементарным понятиям и основным законам динамики точки. Приведены иллюстрированные примеры.

Для студентов технических специальностей заочной формы обучения.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Введение в динамику

Динамика – это раздел теоретической механики, изучающий механическое движение материальных объектов с учетом их взаимодействия с окружающей материальной средой; устанавливается связь такого взаимодействия и вызываемым им движения.

Если тело в каждой точке пространства подвержено воздействию других тел, то говорят, что это тело находится в поле сил. Так, например, тело вблизи поверхности Земли находится в поле сил тяжести. Взаимодействие может быть осуществлено или непосредственным контактом материальных объектов, или через какое-нибудь физическое поле: гравитационное, электромагнитное, электростатическое.

Как уже отмечалось в статике, мерой механического взаимодействия материальных тел является векторная величина, которая называется *силой.* В международной системе единиц (СИ) она измеряется в ньютонах (Н). В результате материальный объект совершает механическое движение под действием упругих, гравитационных, электромагнитных или электростатических сил.

Движение материальных объектов представляет собой изменение их положения в пространстве и во времени по отношению к другим телам. В рамках классической механики пространство и время считаются абсолютными, т. е. не зависящими друг от друга.

В зависимости от условий решаемой задачи, из всей совокупности свойств материальных объектов принимают во внимание только те, которые существенны для механического движения. Например, если рассматривается движение материального объекта в электромагнитном поле, то необходимо учитывать его электромагнитные свойства. Очевидно также, что оптические свойства материального объекта, его химический состав и другое не влияют на механическое движение.

Таким образом, появляется понятие материального тела, основными свойствами которого являются его форма и размеры. Учитывая, что материальное тело находится в гравитационном поле Земли, для определения его силы тяжести надо учитывать его массу.

В динамике изучаются такие системы сил, которые не находятся в состоянии равновесия, и этим динамика существенно отличается от статики. Динамика также коренным образом отличается от кинематики, где движение оценивается только с геометрической точки зрения, независимо от вызывающих его причин. Динамика является наиболее общим разделом теоретической механики, она использует выводы и статики, и кинематики, в ней устанавливаются общие законы движения материальных точек и тел в зависимости от действующих сил.

Материал динамики подразделяется на две части: в первой – изучается движение материальной точки, а во второй – движение тел. При этом все тела представляются как системы, состоящие из множества отдельных материальных точек.

Материальная точка – это материальное тело, вращением, размерами и формой которого в конкретной задаче можно пренебречь. Если на положение материальной точки и на ее движение не наложены никакие ограничения, то точка называется *свободной*, в противном случае имеем движение несвободной точки.

Условия, которые накладывают определенные ограничения на положение материальной точки и на ее движение, называются *связями*, наложенными на эту точку. Материальное тело, при помощи которого осуществляется связь, действует на эту точку с силой, называемой *реакцией связи*.

1.2. Основные законы классической механики

Законы движения точек и тел, устанавливаемые в динамике, являются объективными законами природы. Они подтверждаются многочисленными наблюдениями и опытами. Первая идея этих законов принадлежит Галилею, который ввел понятия инерции, ускорения, сложения движений. Гюйгенс продолжил учение Галилея, исследуя движение материальной системы. Ньютон расширил область механики открытием закона всемирного тяготения. Применение законов динамики к изучению явлений природы и в технике не приводило к противоречию с опытом (до конца XIX в.). В конце XIX века ряд исследований привел к непримиримым противоречиям между законами электродинамики и классической механики. Эти противоречия явились основой для появления новой механики – теории относительности. Однако законы классической механики, законы динамики сохранили свое значение в технической практике, в области так называемых малых скоростей, т. е. скоростей, существенно меньших скорости света.

Основу классической механики составляют принятые как аксиомы *законы Ньютона*, которые формулируются для простейшей модели материального тела – материальной точки.

Опираясь на эти аксиомы (законы), рассматриваются различные динамические задачи движения материальных точек.

Аксиома инерции (Первый закон Ньютона)

Из кинематики известно, что существуют системы отсчета (системы координат) движущиеся относительно друг друга поступательно с постоянной скоростью. По отношению к таким системам отсчета свободная материальная точка сохраняет состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно. Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью), будет также инерциальной. Инерциальных систем отсчета существует бесконечное множество. Поэтому для каждой материальной точки, движущейся равномерно (т. е. без ускорения), всегда можно выбрать такую инерциальную систему отсчета, относительно которой скорость материальной точки будет равна нулю.

Опытным путем установлено, что система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на бесконечно далекие звезды, является инерциальной. Эта система называется *гелиоцентрической системой отсчета.*

Сформулируем закон инерции: *в инерциальных системах отсчета свободная материальная точка сохраняет свою скорость по величине и направлению, она совершает относительно инерциальных систем отсчета прямолинейное равномерное движение.*

Первый закон (закон инерции) постулирует возможность существования систем отсчета, движущихся без ускорения, т. е. поступательно, равномерно, прямолинейно. Любая такая система отсчета может быть принята за неподвижную систему координат. Закон инерции можно сформулировать с применением понятия уравновешенной системы сил, под действием которой несвободная материальная точка ведет себя как свободная: *в инерциальных системах отсчета под действием уравновешенной системы сил материальная точка не испытывает ускорений и движется равномерно и прямолинейно.*

Приведем обратную формулировку закона инерции: *система сил, приложенная к материальной точке, является уравновешенной, если под ее воздействием точка находится в состоянии относительного покоя или движется равномерно и прямолинейно.*

В статике уже рассматривалась эта аксиома, определяющая уравновешенную систему сил, которая, как уже отмечалось, эквивалентна нулю и может быть отброшена: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0.$

Свободная (*изолированная*) материальная точка не испытывает силовых воздействий со стороны других точек или тел, и, следовательно, *ускорение изолированной материальной точки всегда равно нулю*. Материальная точка не может самопроизвольно изменить свою скорость. Для изменения скорости изолированной материальной точки совершенно необходимо какое-то внешнее силовое воздействие со стороны другого тела.

Закон инерции выражает основное свойство материального тела – неспособность сообщать самому себе ускорение.

В Природе нет полностью изолированных тел, поэтому инерциальные системы отсчета вводятся условно при решении конкретных задач с той или иной степенью приближения.

Приведем другие формулировки закона инерции.

Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

Если материальная точка не взаимодействует с другими телами, то она находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Основной закон динамики материальной точки (Второй закон Ньютона)

Когда на точку действует неуравновешенная система сил, равнодействующая которой равна геометрической сумме $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$, точка будет двигаться или по криволинейной траектории, или неравномерно по прямой. То есть точка будет иметь некоторое ускорение (рис. 1.2.1). Связь между действующей на точку силой и вызываемым этой силой ускорением устанавливается вторым законом динамики.

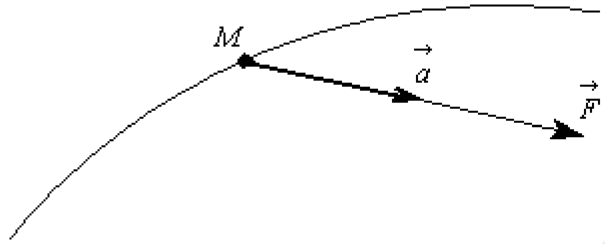


Рис. 1.2.1

Ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе, совпадает с ней по направлению, и обратно пропорционально массе точки:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (1.2.1)$$

Здесь $\bar{a}$ – ускорение, сообщаемое материальной точке; m – коэффициент пропорциональности, связывающий силу с ускорением, появившимся в результате приложения силы.

Векторная формула (1.2.1) характеризует *основной закон динамики.* Эту формулу можно записать в следующем виде:

$$m\bar{a} = \bar{F}. \qquad (1.2.2)$$

То есть произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей на точку силе. Формула (1.2.2) называется *основным уравнением динамики материальной точки* в векторной форме.

Если $\vec{F} = 0$, то $\bar{a} = 0$, т. е. движение точки подчиняется закону инерции.

Основному уравнению динамики материальной точки (1.2.2) можно придать другую форму. Для этого запишем ускорение точки в виде второй производной по времени от радиус-вектора $\bar{r}(t)$, определяющего положение точки в инерциальной системе отсчета:

$$\vec{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

В результате из уравнения (1.2.2) получаем векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки (уравнение второго порядка):

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\cdot \qquad (1.2.3)$$

Так как вектор ускорения точки может быть представлен также в виде первой производной от скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\bar{V}}{dt},$$

то уравнение (1.2.2) может быть записано в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}\cdot \qquad (1.2.4)$$

Любое векторное уравнение может быть записано в проекциях на оси системы координат, которая применяется при решении конкретной задачи. Представим вектор ускорения и вектор силы в декартовой системе осей координат:

$$\bar{a} = a_X\,\bar{i} + a_Y\,\bar{j} + a_Z\,\bar{k}\,, \qquad \bar{F} = F_X\,\bar{i} + F_Y\,\bar{j} + F_Z\,\bar{k}\cdot$$

Здесь a_X, a_Y, a_Z – проекции ускорения на оси координат; F_X, F_Y, F_Z – проекции равнодействующей.

От векторной формы основного уравнения (1.2.2) можно перейти к уравнениям в проекциях. Уравнение (1.2.2) будет эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$ma_X = F_X, \quad ma_Y = F_Y, \quad ma_Z = F_Z. \qquad (1.2.5)$$

Если решается плоская задача и материальная точка движется в плоскости OXY, то ее движение описывается двумя уравнениями:

$$ma_X = F_X \quad \text{и} \quad ma_Y = F_Y. \qquad (1.2.6)$$

Проекции ускорения точки представим в виде первой производной от скорости по времени**:**

$$a_X = \frac{dV_X}{dt} = \dot{V}_X, \quad a_Y = \frac{dV_Y}{dt} = \dot{V}_Y, \quad a_Z = \frac{dV_Z}{dt} = \dot{V}_Z,$$

или второй производной от радиус-вектора точки и ее координат:

$$a_X = \frac{d^2X}{dt^2} = \ddot{X}, \quad a_Y = \frac{d^2Y}{dt^2} = \ddot{Y}, \quad a_Z = \frac{d^2Z}{dt^2} = \ddot{Z},$$

где

$$V_X = V_X(t),\ \ V_Y = V_Y(t),\ V_Z = V_Z(t),\ X = X(t), Y = Y(t), Z = Z(t)$$

– переменные по времени проекции скорости и координаты движущейся точки.

Уравнения (1.2.5) или (1.2.6) записываются в виде дифференциальных уравнений первого порядка:

$$m\frac{dV_X}{dt} = F_X,\quad m\frac{dV_Y}{dt} = F_Y,\quad m\frac{dV_Z}{dt} = F_Z; \tag{1.2.7}$$

или дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = F_X,\quad m\frac{d^2Y}{dt^2} = F_Y,\quad m\frac{d^2Z}{dt^2} = F_Z\,. \tag{1.2.8}$$

В случаях, когда известна траектория точки, удобно пользоваться естественной системой координат, когда уравнение движения задано в виде $s = s(t)$.

С учетом разложения силы на составляющие

$$\bar{F} = F_n\,\bar{n} + F_\tau\,\bar{\tau} + F_b\,\bar{b},$$

основное уравнение динамики представляется уравнениями:

$$ma_\tau = F_\tau,\quad ma_n = F_n,\quad ma_b = F_b. \tag{1.2.9}$$

Здесь F_τ, F_n, F_b – проекции действующей силы соответственно на касательную, нормаль и бинормаль к траектории.

Уравнения (1.2.9) называются *естественными уравнениями движения материальной точки.*

Необходимо помнить, что вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, образованной подвижными единичными векторами касательной $\bar{\tau}$ и нормали $\bar{n}$, и поэтому $a_b = 0$. Следовательно, из уравнений (1.2.9) $F_b = 0$ (рис.1.2.2).

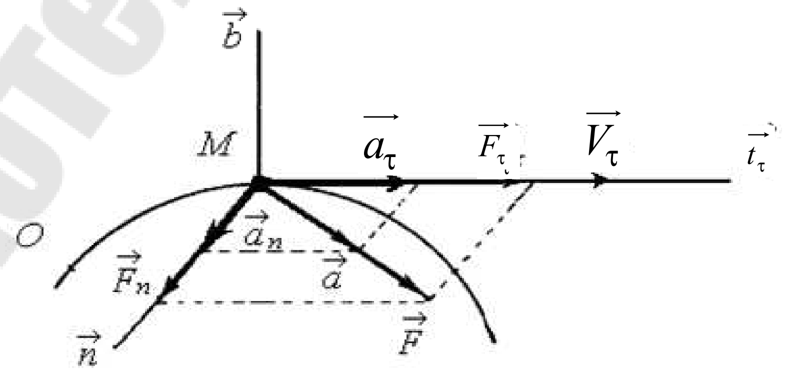


Рис. 1.2.2

Из кинематики знаем: касательное и нормальное ускорения определяются формулами $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$ и $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$ соответственно, а $V = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$.

Уравнения (1.2.9) можно представить в дифференциальной форме:

$$m\frac{dV}{dt} = F_\tau, \qquad m\frac{V^2}{\rho} = F_n \tag{1.2.10}$$

или

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau, \qquad m\frac{(\dot{s})^2}{\rho} = F_n. \tag{1.2.11}$$

Здесь $\dot{s}$ – алгебраическое значение скорости; ρ – радиус кривизны траектории в месте положения материальной точки.

Уравнения (1.2.10) и (1.2.11) называются *естественными дифференциальными уравнениями движения материальной точки*.

Аксиома взаимодействия (Третий закон Ньютона)

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Иными словами, силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю. Эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Приведенная аксиома известна из курса статики.

Важное значение этой аксиомы заключается в том, что она является основой для объяснения сущности так называемого реактивного движения. Рассмотрим реактивное движение на простейшем примере. Представим себе спортсмена, стоящего на неподвижной тележке (рис. 1.2.3, *а*). Предположим, что спортсмен и тележка имеют одинаковый вес. Когда спортсмен прыгает с тележки, тележка откатывается в направлении, противоположном направлению прыжка спортсмена. Если пренебречь сопротивлением движению тележки, то при условии равного веса спортсмена и тележки, последняя переместится от начального положения на такое же расстояние, что и спортсмен. Причиной возникновения движения тележки и спортсмена являются силы взаимодействия между ними. Сила $\bar{F}_1$, с которой спортсмен давит во время прыжка на тележку, является действием, а реактивная сила $\bar{F}_2$, приложенная к спортсмену (рис. 1.2.3, *б*), является противодействием. Силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ равны по величине, но приложены к разным телам, т. е. $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Причиной движения спортсмена является реактивная сила $\bar{F}_2$.

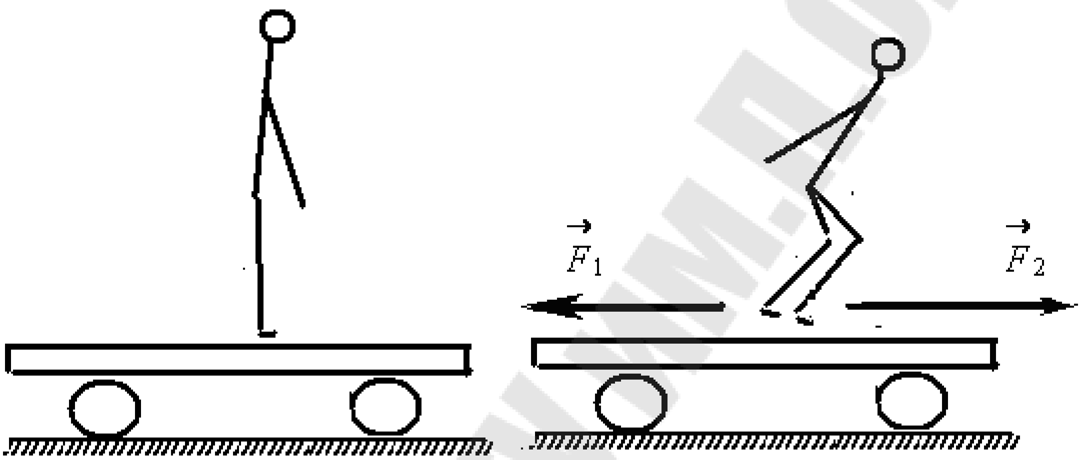


Рис. 1.2.3

Согласно основному закону динамики можно записать

$$\bar{F}_1 = m_1 \bar{a}_1 \quad \text{и} \quad \bar{F}_2 = m_2 \bar{a}_2 .$$

Здесь m_1 и m_2 – массы тележки и спортсмена; $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ – ускорения тележки и спортсмена.

Получаем

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} .$$

В соответствии с рассмотренным примером происходит движение ракеты. Как спортсмен отталкивается от тележки, так и ракета отталкивается от газов, истекающих из ее сопла. Такое реактивное движение не имеет ничего общего с «отталкиванием от воздуха». Именно поэтому принцип реактивного движения используется в космических ракетах и при запуске искусственных спутников в космос.

Аксиома независимости действия сил

Если на материальную точку действует несколько сил, то ускорение, получаемое точкой, будет такое же, как и при действии одной силы, равной геометрической сумме этих сил (рис. 1.2.4).

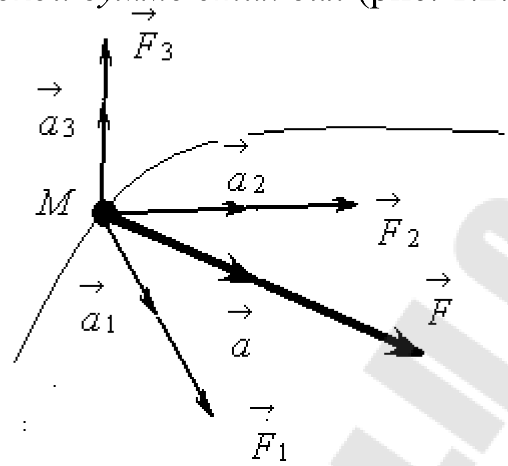


Рис. 1.2.4

Смысл третьей аксиомы динамики заключается в том, что несколько сил $-\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots \vec{F}_n,$ действующих на материальную точку, можно заменить их равнодействующей $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$

Из статики знаем, что сила $\bar{F}$, которая сообщает материальной точке такое же ускорение, как и заданная система сил $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$, называется *равнодействующей силой*. Тогда основной закон динамики можно записать в виде

$$m \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad .$$

Или

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \ldots + \bar{F}_n .$$

Поделим все члены уравнения на m и получим

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \frac{\vec{F}_3}{m} + \cdots + \frac{\vec{F}_n}{m}.\cdot$$

Слагаемые в правой части последнего уравнения представляют собой ускорения точки, вызванные соответственно каждой из приложенных сил:

$$\frac{\vec{F}_1}{m} = \vec{a}_1, \quad \frac{\vec{F}_2}{m} = \vec{a}_2, \quad \frac{\vec{F}_3}{m} = \vec{a}_3, \ \ldots \ \frac{\bar{F}_n}{m} = \vec{a}_n .$$

Учитывая это, получаем

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \cdots + \vec{a}_n ,$$

т. е. *ускорение, получаемое материальной точкой под действием нескольких сил, может быть определено как геометрическая сумма ускорений, вызванных каждой из сил в отдельности*:

$$\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m},, \quad i = 1,2,...,n.$$

1.3. Масса. Инертность. Принцип эквивалентности

Коэффициент m, входящий в основное уравнение динамики (1.1.2), называется *массой материальной точки* и имеет очень важное физическое значение.

Из уравнения (1.1.2) определяем массу как отношение вектора силы к вектору ускорения:

$$m = \frac{\bar{F}}{\vec{a}} . \qquad (1.3.1)$$

Масса представляет собой скалярную величину, которая всегда положительна. С точки зрения теоретической механики, масса материальной точки или тела является постоянной величиной, не зависящей от движения.

Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения или покоя. Это свойство тел называется *инертностью*. В качестве количественной характеристики инертности тоже используется *масса* тела. Из основного закона динамики видим, что различные силы сообщают материальной точке различные ускорения, пропорциональные силам. Причем при действии на различные тела одной и той же силой получаем: чем больше масса m тем меньше ускорение $\vec{a}$, тем медленнее измеряется скорость точки.

Следовательно, масса характеризует инертность тела, его «неподатливость» воздействию силы.

Если применить уравнение (1.3.1) к материальной точке, находящейся под действием силы тяжести $\vec{G}$, то получим

$$m = \frac{\bar{G}}{\vec{g}} \ . \qquad (1.3.2)$$

Здесь $\bar{G}$ — сила тяжести материальной точки (вес); $\bar{g}$ – ускорение силы тяжести (ускорение свободного падения) – величина, зависящая от широты места и высоты над уровнем океана (для средних широт, для Парижа, обычно принимают g = 9,8081 м/с^2).

Из уравнения (1.3.2) видно, что масса пропорциональна силе тяжести материальной точки. Масса служит более полной характеристикой тела, чем сила тяжести (вес тела). Сила тяжести зависит от места положения тела, она различна в разных точках Земли, а масса всегда остается одинаковой. Величина m называется *весомой массой*, она может быть принята за меру количества вещества.

Таким образом, *масса является мерой инертности и мерой количества вещества, заключенного в заданном объеме тела.*

Многочисленными опытами установлено, что весомая и инертная масса тела совпадают. Это положение носит *принцип эквивалентности*, т. е. материальность и инерция проявляются в механике как свойства эквивалентные.

1.4. Размерность физических величин в динамике

В динамике вопрос о размерностях величин играет исключительно важную роль. Очевидно, при решении задач необходимо все данные брать в одной системе единиц. В настоящее время преимущественно пользуются международной системой единиц (СИ), в основе которой лежат единицы длины, времени и массы. Иногда еще применяется техническая система единиц (МКГСС), в основе которой лежат единицы длины, времени и силы.

Все остальные величины, встречающиеся в технической механике, измеряются производными единицами, которые получаются из основных единиц.

Рассмотрим международную систему единиц СИ.

Основные единицы в этой системе:

– за единицу длины принимается метр, м;

– за единицу массы – килограмм, кг,;

– за единицу времени – секунда, с.

Килограмм равен массе одного литра дистиллированной воды при 4 °С.

Единица силы в системе СИ является производной.

За единицу силы в этой системе принимается такая *сила*, которая способна сообщить массе в 1 кг ускорение, равное 1 м/с^2. Такая единица силы называется ньютоном, Н.

Если в формуле $F = ma$ принять, что m = 1кг; a = 1 м/с^2, то размерность силы в системе СИ выразится:

$$[F] = [ma] = [1\text{кг} \cdot 1\text{м} \cdot 1\text{кгм/с}^2] = [\text{кгм/с}^2] = [\text{Н}].$$

Для удобства записи и вычислений применяются и более крупны единицы силы, пропорциональные ньютону–килоньютоны кН и меганьютоны МН.

Один килоньютон равен тысяче ньютонов.

Один меганьютон равен тысяче килоньютонов или миллиону ньютонов.

$$1\text{кН} = 1000\ \text{Н}; \quad 1\text{МН} = 1000\ \text{кН} = 10^6\ \text{Н}.$$

В технической системе единиц (МКГСС) за основные единицы принимаются:

– единица длины – метр, м;

– единица времени – секунда, с;

– единица силы – килограмм, кГ.

Килограмм (кГ) равен весу одного литра дистиллированной воды при 4 °С.

В технической системе единиц обозначения единицы силы содержат большую букву Г:

– килограмм-сила – кГ;

– грамм-сила – Г.

В технической системе единиц масса измеряется в производных единицах. За единицу массы принимается такая масса тела, которой сила, равная 1кГ, сообщает ускорение, равное 1м/с^2. Эта единица носит название *техническая единица массы.*

Если в формуле $m = \dfrac{F}{a}$ принять, что $F = 1\text{кГ}$; $a = 1\text{м/с}^2$, то размерность массы выразится

$$[m] = \left[\frac{F}{\alpha}\right] = \left[\frac{\text{кГ}}{\text{м/с}^2}\right].$$

В технических расчетах приходится определять массу тела по его весу или вес по массе. Если задан вес G, то масса тела

$$m = \frac{G}{g}.$$

В динамике при решении задач очень важно тщательно проверять размерности. Это предохраняет от ошибок в решении задач. Иногда возникает необходимость перейти от единиц одной системы к единицам другой системы. Основой для такого перехода является известный из физики факт, что тело массой в 1 кг весит 1 кГ силы. Сила тяжести, действующая на 1 кг массы, выраженная в ньютонах (Н), соответственно составит

$$G = mg = 1\text{кг} \cdot 9{,}81\text{м/с}^2 = 9{,}81\text{кгм/с}^2 = 9{,}81\text{Н}.$$

Итак, один килограмм силы кГ эквивалентен 9,81 ньютонам, т. е.

$$1\text{кГ} = 9{,}81\text{Н} \quad \text{или } 1\text{Н} = 0{,}102 \text{ кГ}.$$

Если при расчете нет необходимости в очень высокой точности, то можно условно принимать

$$1\text{кГ} \approx 10 \text{ Н} \qquad \text{и} \quad 1\text{н} \approx 0{,}1\text{кГ}.$$

1.5. Принцип Даламбера для материальной точки

Основное уравнение динамики свободной материальной точки $m\bar{a} = \bar{F}$ перепишем в виде

$$\bar{F} + (-m\bar{a}) = 0.$$

Обозначим

$$\bar{\Phi} = -\, m\bar{\alpha}. \tag{1.5.1}$$

Получим

$$\bar{F} + \bar{\Phi} = 0. \tag{1.5.2}$$

Очевидно, что размерность складываемых величин одинакова

$$[F] = [\Phi] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \text{Н}.$$

То есть векторная величина $\bar{\Phi}$ имеет размерность силы, и, как следует из уравнения (1.5.1), направлена в сторону, обратную направлению ускорения точки. Эту векторную величину $\vec{\Phi}$ называют силой инерции материальной точки.

Сила инерции равна произведению массы точки на ее ускорение и направлена против ускорения.

Если считать, что $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i$, т. е. вектор $\bar{F}$ является равнодействующей системы сил, приложенных к точке, то уравнение (1.5.2) примет вид

$$\sum_i \vec{F}_i+\vec{\Phi}=0,$$

т. е. *в каждый момент времени силы, приложенные к точке, могут быть уравновешены добавлением к ней силы инерции,* (*принцип Даламбера для свободной точки*).

Если на несвободную материальную точку наложены связи, реакциями которых являются силы $\bar{R}_\tau$ и $\vec{N}$, то основное уравнение динамики несвободной материальной точки будет иметь вид

$$m\,\bar{a}=\bar{F}+\bar{R}_\tau+\bar{N}. \qquad (1.5.3)$$

Тогда

$$\bar{F}+\bar{R}_\tau+\bar{N}+\bar{\Phi}=0. \qquad (1.5.4)$$

Действующие на движущуюся материальную точку активные силы и реакции связей можно в любой момент времени уравновесить добавлением к ним силы инерции. Понятие о силе инерции вводится для того, чтобы, используя принцип Даламбера, решать задачи методом статики.

Пример 1.5.1. Математический маятник

Определить силу натяжения математического маятника, если задан закон изменения его амплитуды $\alpha=\alpha(t)$. Действием силы сопротивления воздуха пренебречь.

Решение

Математический маятник – это материальная точка M массой m привязанная к нити OM длиной L, движущаяся по дуге окружности радиуса L (рис. 1.5.1).

Амплитуда – это переменный угол $\alpha=\alpha(t)$ отклонения нити OM от вертикали OA, которая определяет положение равновесия маятника.

Рассмотрим силы, приложенные к точке M :

– активная сила, сила тяжести $\vec{G}=m\vec{g}$;

– реакция связи, сила натяжения нити $\vec{N}$;

– сила инерции $\vec{\Phi}=-m\alpha\cdot$

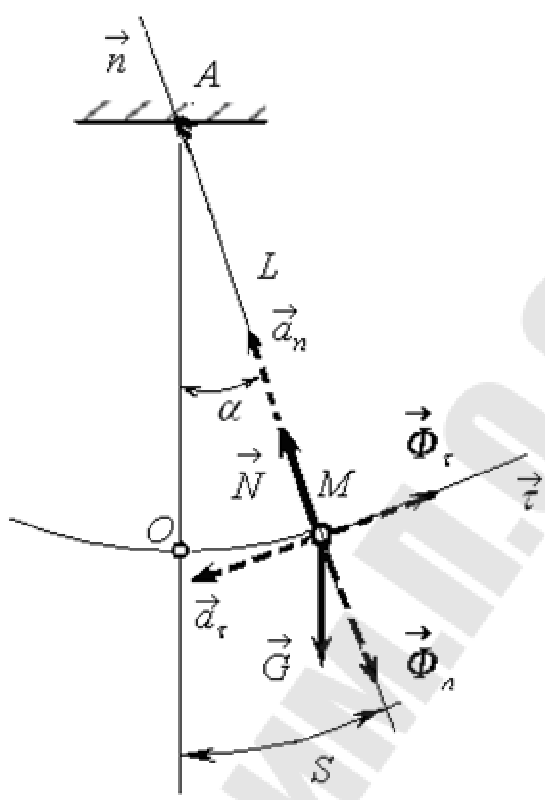


Рис. 1.5.1

Для решения выбираем плоскую естественную систему координат τMn.

Запишем векторное уравнение (1.5.4) для нашего случая

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{N} + \bar{\Phi} = 0. \qquad (1)$$

Перепишем (1) в координатной форме. Учитывая, что сила инерции точки M раскладывается на касательную и нормальную составляющие:

$$\vec{\Phi} = \Phi_\tau \vec{\tau} + \Phi_n \vec{n},$$

из уравнения (1.5.4) получаем два алгебраических уравнения

$$\begin{cases} \sum F_{i_\tau} = G_\tau + \Phi_\tau = 0, \\ \sum F_{i_n} = G_n + N + \Phi_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь проекции силы тяжести равны.

$$G_\tau = - G\sin\alpha, \quad G_n = - G\cos\alpha.$$

Составляющие вектора силы инерции находим по формулам:

$$\bar{\Phi}_\tau = -m\,\bar{a}_\tau, \; \vec{\Phi}_n = -m\alpha_n.$$

Вычисляем силы инерции:

$\Phi_\tau = m\dfrac{dV}{dt}$ – касательная сила инерции;

$\Phi_n = m\dfrac{V^2}{L}$ – нормальная (центробежная) сила инерции.

Здесь L – радиус окружности.

Зная закон изменения амплитуды, который в нашем примере принимается в общем виде $\alpha = \alpha(t)$, определим силы инерции:

$$\omega = \alpha = \frac{d\alpha}{dt} \text{ – угловая скорость нити } OM;$$

$$V = \alpha L = \alpha L \text{ – скорость точки } M:$$

$$\Phi_\tau = m\frac{dV}{dt} = mL\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right),$$

$$\Phi_\tau = mL\frac{d^2\alpha}{dt^2};$$

$$\Phi_n = m\frac{V^2}{L} = \frac{m}{L}\left(\dot{\alpha}L\right)^2,$$

$$\Phi_n = m(\dot{\alpha})^2 L.$$

Из второго уравнения системы (2) находим силу натяжения нити:

$$N = -\Phi_n - G_n, \qquad N = ma_n - G\cos\alpha, \qquad N = m(\dot{\alpha})^2 L + G\cos\alpha.$$

1.6. Две основные задачи динамики

Из основного уравнения динамики устанавливается связь между приложенными к точке силами и движением точки. Различают *две основные задачи*, которые решаются на основании аксиом динамики, изложенных выше.

Первая задача динамики заключается в том, что по заданному движению точки требуется определить равнодействующую всех сил, в том числе и реакций связей, если точка не свободна. Решение этой задачи сводится к определению ускорения и, следовательно, к дифференцированию по времени заданных уравнений движения. Методы определения ускорения точки зависят от способа задания ее движения. Определив ускорение точки, нужно затем воспользоваться основным законом динамики и найти действующую силу. Если на точку действует несколько сил и неизвестны лишь некоторые из них, то для их определения приходится использовать аксиому независимости действия сил.

Вторая задача динамики заключается в том, чтобы по заданным силам определить движение точки. Это – обратная задача динамики и ее решение в общем случае значительно труднее по сравнению с решением прямой задачи. Здесь также приходится использовать основной закон динамики. Из этого закона определяется ускорение через действующую силу и заданную массу точки.

При известном ускорении точки еще нельзя полностью определить ее движение, а также вычислить путь, пройденный точкой, или время ее движения и т. п. Для решения обратной задачи следует располагать некоторыми добавочными данными, которые называют *начальными условиями*. Эти начальные условия должны определять скорость и положение точки для какого-то момента времени. Тогда, зная ускорение, мы сумеем найти скорость, пройденный путь и другие кинематические характеристики для любого момента времени.

1.7. Примеры решения первой задачи динамики

Решение первой основной задачи может быть найдено простым дифференцированием по времени кинематических уравнений движения. Зная уравнения движения материальной точки $X = X(t)$, $Y = Y(t)$, $Z = Z(t)$, можно определить, под действием какой силы $\bar{F}(F_X, F_Y, F_Z)$ такое движение может происходить. Решение первой задачи динамики сводится к вычислению производных первого и второго порядка:

$$F_X = m\ddot{X}, \quad F_Y = m\ddot{Y}, \quad F_Z = m\ddot{Z}.$$

Пример 1.7.1. Первая задача динамики для прямолинейного движения материальной точки

Задано уравнение движения материальной точки массой m по горизонтальной гладкой поверхности $X = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (рис. 1.7.1).

Определить силу $\bar{F}$, вызывающую движение.

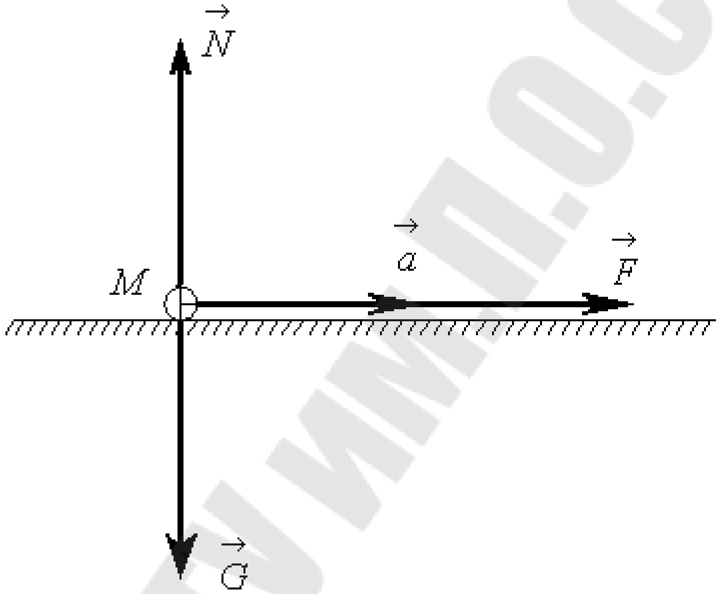


Рис. 1.7.1

Решение

На материальную точку действуют три силы:

1) сила тяжести $\bar{G} = m\bar{g}$, $\bar{g}$ – ускорение свободного падения;

2) реакция гладкой горизонтальной плоскости $\vec{N}$;

3) движущая сила $\bar{F}$.

Силы $\bar{G}$ и $\bar{N}$ уравновешены; следовательно, основное уравнение динамики в этом случае можно написать так:

$$F = m\ddot{X}, \quad \text{где } a = \ddot{X}.$$

Следовательно, $F = ma$.

Пример 1.7.2. Движение точки по эллипсу

Точка массы m движется по закону, определенному уравнениями:

$$X = A \cdot \sin(k \cdot t), \qquad Y = B \cdot \cos(k \cdot t), \qquad Z = 0. \qquad (1)$$

Вычислить модуль и направление силы.

Решение

Уравнения (1) описывают движение точки по эллипсу в плоскости XOY (рис. 1.7.2).

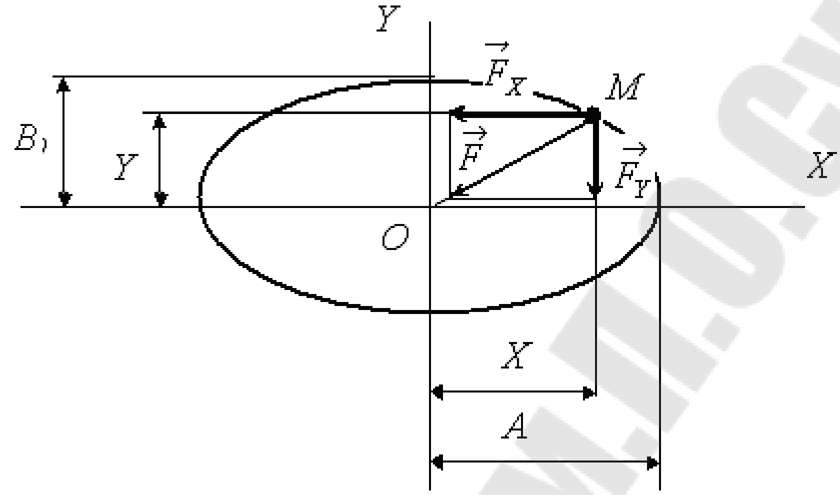


Рис. 1.7.2

Вычислим производные

$$\begin{cases} \dot{X} = A \cdot k \cdot \cos(k \cdot t), \\ \ddot{X} = -mk^2 A \sin(k \cdot t), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{Y} = -B \cdot k \cdot \sin(k \cdot t), \\ \ddot{Y} = -mk^2 B \cos(k \cdot t). \end{cases}$$

Найдем проекции силы

$$\begin{cases} F_X = -mk^2 A \sin(k \cdot t), \\ F_X = -mk^2 X, \end{cases} \qquad \begin{cases} F_Y = -mk^2 B \cos(k \cdot t), \\ F_Y = -mk^2 Y. \end{cases}$$

Вычислим модуль силы и направляющие косинусы

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = mk^2 \sqrt{X^2 + Y^2} = mk^2 r,$$

$$\cos(\vec{F}, X) = \frac{F_X}{F} = \frac{-mk^2 X}{mk^2 r} = -\frac{X}{r}, \qquad \cos(\vec{F}, Y) = \frac{F_Y}{F} = \frac{-mk^2 Y}{mk^2 r} = -\frac{Y}{r}.$$

Здесь $r = \text{OM}$ – значение радиус-вектора точки *M*.

Таким образом, установлено, что на точку действует сила притяжения, модуль которой пропорционален массе точки и ее расстоянию от центра.

Пример 1.7.3. Движение точки по гиперболе

Уравнения движения точки, масса которой $m = 20$ г, имеют вид

$$X = 15(e^{5t} + e^{-5t}) \ \text{ м} \qquad \text{и} \qquad Y = 9(e^{5t} - e^{-5t}) \ \text{ м.}$$

Требуется определить силу $\bar{F}$, под действием которой происходит заданное движение.

Решение:

$$\begin{cases} V_X = \dfrac{dX}{dt} = 5 \cdot 15(e^{5t} + e^{-5t}) = 5X \quad м/с, \\ V_Y = \dfrac{dY}{dt} = 5 \cdot 9(e^{5t} - e^{-5t}) = 5Y \quad м/с, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_X = \dfrac{dV_X}{dt} = 5 \cdot 5 \cdot 15(e^{5t} + e^{-5t}) = 25X \quad м/с^2, \\ a_Y = \dfrac{dV_Y}{dt} = 5 \cdot 5 \cdot 9(e^{5t} - e^{-5t}) = 25Y \quad м/с^2 \cdot \end{cases}$$

Тогда

$$F_X = ma_X = 20 \cdot 25X = 500X \ \text{ Н}, \quad F_Y = ma_Y = 20 \cdot 25X = 500Y \ \text{ Н.}$$

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = 500\sqrt{X^2 + Y^2} = 500 \cdot r \ \text{ Н.}$$

Здесь

$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ – расстояние от точки до начала координат.

Выведем уравнение траектории точки, для чего найдем:

$$\begin{cases} \dfrac{X}{15} = (e^{5t} + e^{-5t}), \\ \dfrac{Y}{9} = (e^{5t} - e^{-5t}). \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{X}{15}\right)^2 = (e^{5t} + e^{-5t})^2, \\ \left(\dfrac{Y}{9}\right)^2 = (e^{5t} - e^{-5t})^2. \end{cases}$$

Вычитая левые и правые части полученных равенств, имеем

$$\left(\frac{X}{15}\right)^2 - \left(\frac{Y}{9}\right)^2 =$$

$$= (e^{5t} + e^{-5t})^2 - (e^{5t} - e^{-5t}) = e^{5t} \cdot e^{5t} + 2e^{5t} \cdot e^{-5t} + e^{-5t} \cdot e^{-5t} -$$

$$- (e^{5t} \cdot e^{5t} - 2e^{5t} \cdot e^{-5t} + e^{-5t} \cdot e^{-5t}) =$$

$$= e^{10t} + 2 + e^{-10t} - e^{10t} + 2 - e^{-10t} = 4 \cdot$$

То есть

$$\left(\frac{X}{15}\right)^2-\left(\frac{Y}{9}\right)^2=4.$$

Разделив на 4, получим уравнение траектории точки:

$$\frac{X^2}{4\cdot 15^2}-\frac{Y^2}{4\cdot 9^2}=1, \qquad \text{или} \qquad \frac{X^2}{30^2}-\frac{Y^2}{18^2}=1.$$

$$X(Y)=30\sqrt{\left(\frac{Y^2}{18^2}+1\right)} \quad Y(X)=18\sqrt{\left(\frac{X^2}{30^2}-1\right)}.$$

Следовательно, движение точки происходит по гиперболе (рис. 1.7.3).

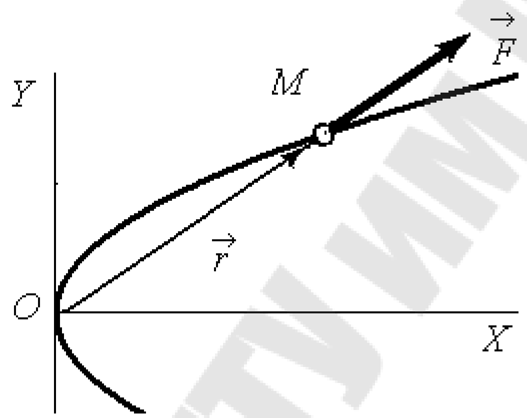


Рис. 1.7.3

Поясним, что сила $\bar{F}$ направлена вдоль радиус-вектора $\bar{r}$.

Для этого вычислим направляющие косинусы углов для $\bar{r}$ и $\vec{F}$:

$$\cos(X,\bar{r})=\frac{X}{r}, \qquad \cos(X,\vec{F})=\frac{F_X}{F}=\frac{500X}{500r}=\frac{X}{r},$$

$$\cos(Y,\bar{r})=\frac{Y}{r}, \qquad \cos(Y,\vec{F})=\frac{F_Y}{F}=\frac{500Y}{500r}=\frac{Y}{r}.$$

Отсюда следует:

$$\cos(X,\bar{r})=\cos(X,\bar{F}), \qquad \cos(Y,\bar{r})=\cos(Y,\bar{F}).$$

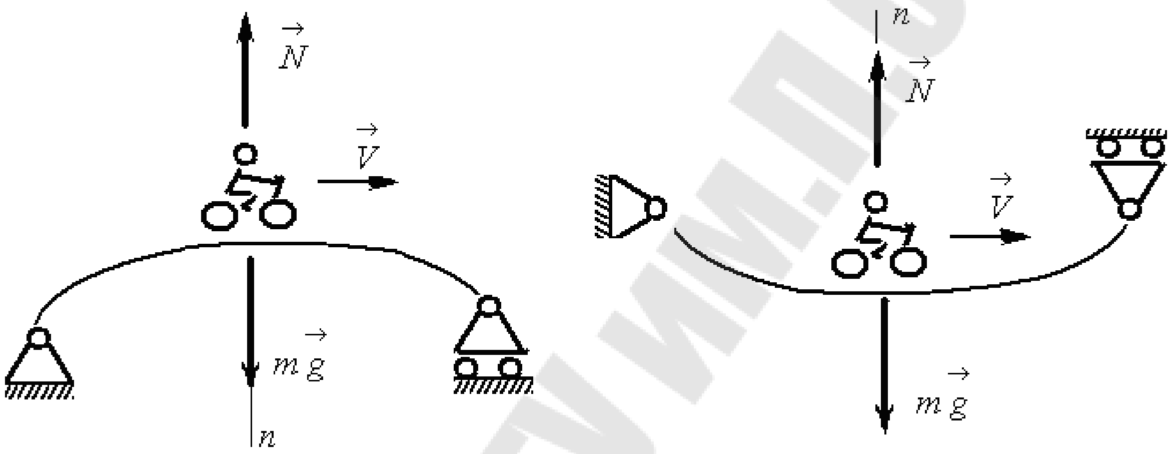
Таким образом, сила $\bar{F}$ направлена вдоль $\bar{r}$.

Пример 1.7.4. Движение несвободной точки

Предположим, что материальная точка массой m (мотоциклист) движется с заданной скоростью $\bar{V}$ по дуге окружности заданного радиуса R (например, по мосту). Пренебрегая трением, определить давление $\bar{N}$ автомобиля на мост в двух случаях:

а) если мост выпуклый (рис. 1.7.4 *а*),

б) если мост вогнутый (рис. 1.7.4 *б*).



а *б*

Рис. 1.7.4

Решение

Эту задачу решаем в естественной системе координат.

Запишем основное уравнение динамики в проекциях на нормальную и касательные оси.

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n, \qquad \bar{F}_\tau = m\bar{a}_\tau .$$

Если мотоциклист движется с постоянной скоростью, то

$$a_\tau = 0 \text{ и } F_\tau = 0.$$

Так как нормальная равнодействующая сил действующих на мотоциклиста равна

$$\vec{F}_n = \vec{G} + \vec{N}, \qquad \text{то} \qquad m\bar{a}_n = \bar{G} + \bar{N}.$$

Так как положительное направление нормали n всегда совпадает с направлением в сторону вогнутости кривой, то для двух указанных в условиях задачи случаев имеем:

а) $ma_n = G - N = \ N = G - ma_n$;

б) $ma_n = N - G = \ N = ma_n - G$.

То есть мы видим, что давление мотоциклиста на мост в первом случае меньше.

Нормальное ускорение находим по формуле

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Из полученных формул видим, что давление на мост в двух случаях будет одинаково, если мотоциклист будет неподвижен.

То есть при $V = 0$, $N = G$.

2. РАБОТА И МОЩНОСТЬ

2.1. Механическая энергия

Энергия является общей количественной мерой движения всех видов материи. Энергия не исчезает и не возникает из ничего: она лишь может переходить из одной формы в другую. Понятие энергии связывает воедино все явления в природе. В соответствии с различными формами движения материи рассматривают разные виды энергии – механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную и др.

Механическая энергия бывает двух видов – потенциальная энергия П и кинетическая энергия T.

Потенциальная энергия (или энергия положения) определяется действием на материальную точку консервативных сил и зависит только от положения точки.

Кинетическая энергия является мерой механического движения, она определяется скоростью и массой тел.

Величину Е, равную сумме кинетической и потенциальной энергий материальной точки частицы, называют *полной механической энергией*: $E = \Pi + T$.

Понятия энергии и работы тесно связаны между собой. Известно, что работа совершается за счет запаса энергии, и наоборот, совершая работу, можно увеличить запас энергии в каком-либо устройстве. Другими словами, работа – это количественная мера изменения энергии:

$$dA = dE.$$

2.2. Работа постоянной силы при прямолинейном движении материальной точки

Если на материальную точку действует сила, то эта сила совершает работу (механическую работу) по ее перемещению.

Для решения многих задач динамики необходимо вычислять работу различных сил, постоянных и переменных.

Рассмотрим сначала понятие работы для частного случая, когда действующая на материальную точку сила постоянна по величине и направлению, а точка перемещается по прямолинейной траектории, направленной, например, вдоль координатной оси OX.

Будем считать, что на материальную точку M действует постоянная по величине и по направлению сила $\vec{F} = const$ (рис. 2.2.1).

За некоторый промежуток времени Δt точка M переместилась из положения M_0 в положение M_K по прямолинейной траектории.

Введем обозначения:

$\Delta\bar{r}$ – вектор перемещения точки, соединяющий точки M_0 и M_K;

ΔX – путь, пройденный точкой из положения M_0 в положение M_K;

X – переменная координата точки.

Очевидно, что для прямолинейного движения модуль вектора перемещения равен $\Delta r = \Delta X = |X_K - X_0|$.

Работой силы $\bar{F}$ при прямолинейном перемещении точки ее приложения называется произведение величины силы $\bar{F}$ на величину перемещения ΔX и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения, т. е.

$$A_{M_0M_K} = F \cdot \Delta X \cdot \cos(\bar{F}, \Delta\bar{r}), \qquad (2.2.1)$$

где $\cos(\bar{F}, \Delta\bar{r}) = \cos\alpha$ – косинус угла между направлением силы и направлением перемещения точки.

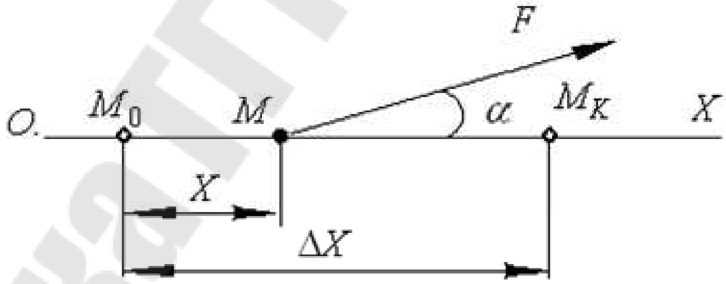


Рис. 2.2.1

Произведение $F\cos\alpha$ есть проекция силы $\bar{F}$ на направление перемещения материальной точки, т. е. на ось OX. Следовательно, $F_X = F\cos\alpha$ и работу силы можно определить как скалярное произведение вектора силы $\bar{F}$ и вектора перемещения $\Delta\vec{r}$:

$$A_{M_0M_K} = \bar{F} \cdot \Delta\bar{r} = F_X \cdot \Delta r = F_X \cdot \Delta X.$$

В случае постоянной силы геометрический смысл работы $A_{M_0M_K}$ – это площадь прямоугольника, построенного в координатах *сила-путь* (рис. 2.2.2).

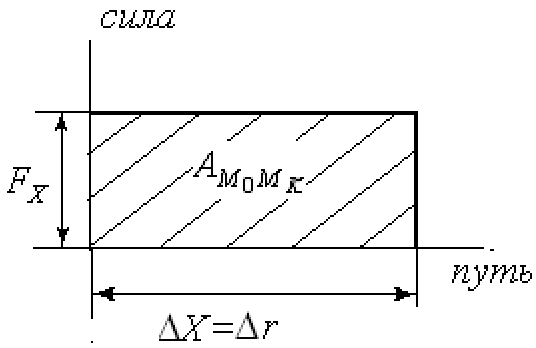


Рис. 2.2.2

В данном примере угол α может меняться в пределах от 0 до 180°.

При α < 90° работа является положительной. Когда сила с направлением перемещения составляет острый угол, она называется *движущей силой*, ее работа всегда положительна.

При α > 90° – работа отрицательна. Если между направлениями силы перемещения тупой угол, сила оказывает сопротивление движению, совершает отрицательную работу и носит название *силы сопротивления.* Примерами сил сопротивления могут служить силы резания, силы трения, силы сопротивления воздуха и другие, которые всегда направлены в сторону, противоположную движению.

При α = 90° работа равна нулю.

При α = 0°, т. е. когда направление силы совпадает с направлением скорости, $A = F \cdot \Delta X$, так как $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 1$.

В международной системе единиц СИ единицей работы принят джоуль, представляющий собой работу силы в один ньютон (Н) на совпадающем с ней по направлению перемещении длиной в один метр (м): $[A] = 1\text{Дж} = 1\text{Н} \cdot \text{м}$. Единица работы – килоджоуль (кДж), равна тысяче джоулей: 1кДж = 1000 Дж.

Пример 2.2.1. Движение материальной точки по негладкой наклонной плоскости

Материальная точка M движется по негладкой наклонной плоскости под действием силы тяжести (рис. 2.2.3). Вычислить работу сил, действующих на точку, при перемещении точки из положения M_0 в положение M_K.

Решение

Изобразим на рис. 2.2.3 силы, действующие на плоскость:

$\bar{G}$ – сила тяжести;

$\bar{N}$ – нормальная реакция наклонной плоскости;

$\vec{F}_{mp}$ – сила трения скольжения.

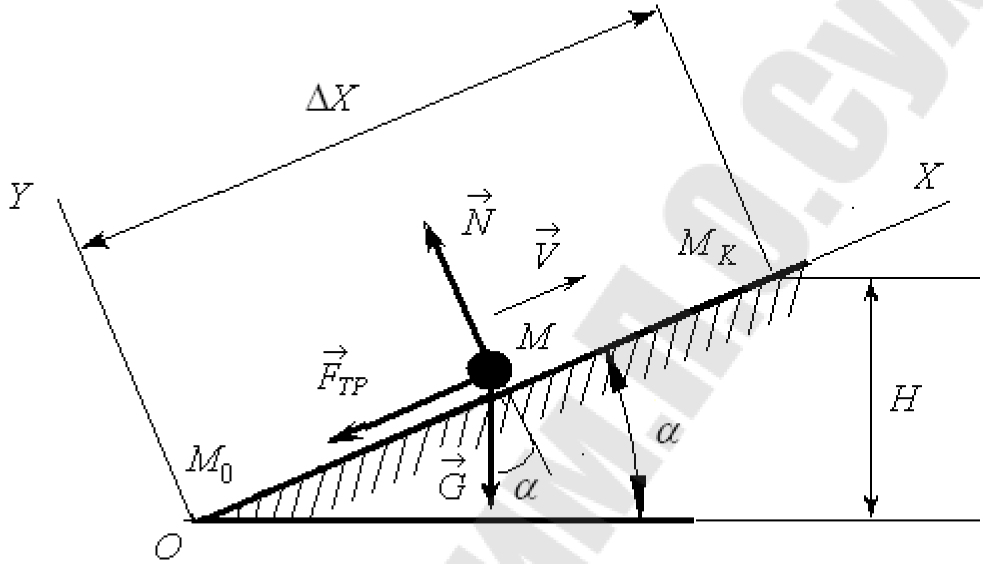


Рис. 2.2.3

Координатную ось OX направим вверх по наклонной плоскости.

Определим путь, пройденный точкой: $\Delta X = X_K - X_0$.

Находим работу силы тяжести:

$$A_{M_0M_K}(\bar{G}) = G_X \cdot \Delta X.$$

Так как $G_X \cdot = G \cdot \sin\alpha$, то

$$A_{M_0M_K}(\bar{G}) = G \cdot \Delta X \cdot \sin\alpha.$$

Но так как $\Delta X \sin\alpha = H$, где H – высота, на которую поднимется точка по наклонной плоскости, то работа силы тяжести равна

$$A_{M_0M_K}(\vec{G}) = G \cdot H = mgH,$$

т. е. $A_{M_0M_K}(\vec{G})$ – работа потенциальной силы.

Находим теперь работу силы трения:

$$A_{M_0M_K}(\vec{F}_{mp}) = \vec{F}_{mp}\, d\,\vec{r} = -F_{mp}\Delta X < 0.$$

Силу трения выражаем через коэффициент трения по закону Кулона: $F_{TP} = N \cdot f_{TP}$, где f_{TP} – коэффициент трения скольжения. Так как $N = G\cos\alpha$, получаем

$$A_{M_0M_K}(\mathrm{F_{тр}}) = - G \cdot f_{mp} \cdot \Delta X \cdot \cos\alpha. \quad .$$

2.3. Работа переменной силы при прямолинейном движении материальной точки

Пусть на материальную точку, движущуюся прямолинейно вдоль оси OX, действует не постоянная сила $\vec{F} \neq const.$ То есть эта сила изменяет при перемещении точки направление и численное значение. Так как положение точки на оси характеризуется переменной координатой X, то сила является какой-то функцией этой координаты: $\vec{F} = \vec{F}(X)$.

Полное перемещение представим как сумму *n* малых перемещений ΔX_i, на каждом из которых действует постоянная сила $\vec{F_i}$ (рис. 2.3.1).

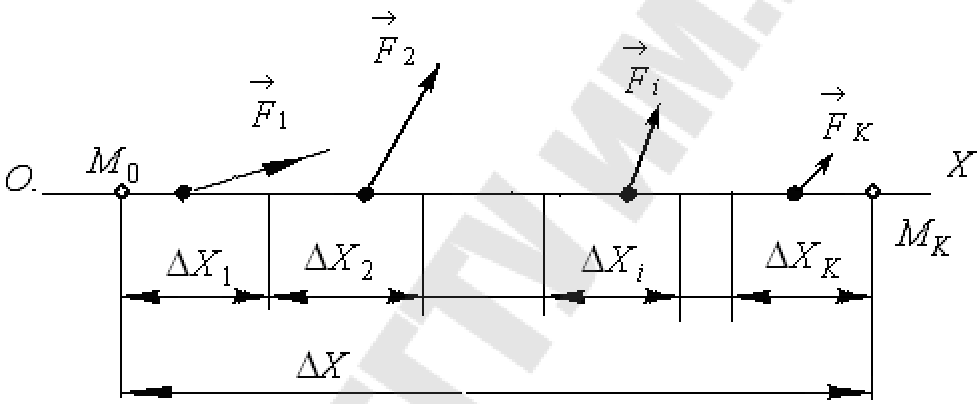


Рис. 2.3.1

Очевидно, что на каждом отрезке проекция силы на направление движения точки тоже является функцией координаты точки:

$$F_X(X) = F(X) \cdot \cos(\alpha(X)).$$

Построим график проекции силы на направление перемещения.

Для малого *i*-го перемещения работа равна $\Delta A_i = F_{Xi} \cdot \Delta X_i$ или площади заштрихованной трапеции на рис. 2.3.2 Полная работа определится как сумма площадей всех элементарных прямоугольников, которая в пределе, очевидно, равна площади, ограниченной осью абсцисс, кривой $F_X(X)$ и двумя крайними ординатами этой кривой (рис. 2.3.2).

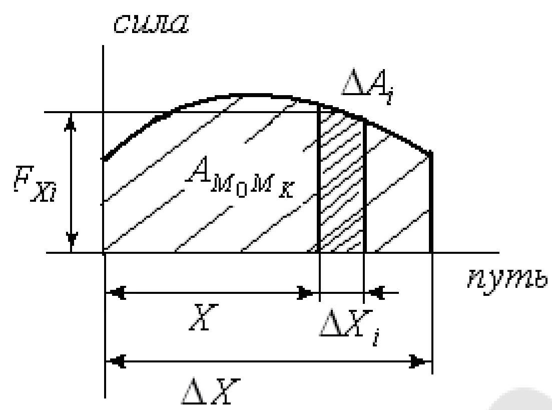


Рис. 2.3.2

Полная механическая работа по перемещению точки из положения M_0 в положение M_K будет равна:

$$A_{M_0M_K} = \lim_{\Delta X \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_{X_i} \Delta X_i = \int_{X_0}^{X_K} F_X dX.$$

Величина, стоящая под интегралом будет представлять элементарную работу по бесконечно малому перемещению dX.

Элементарной работой силы называется скалярное произведение

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_X \cdot dX.$$

2.4. Работа переменной силы при криволинейном движении материальной точки

В кинематике рассматривался вектор криволинейного перемещения точки $\Delta\bar{r}$, соединяющий ее начальное и конечное положение (рис. 2.4.1).

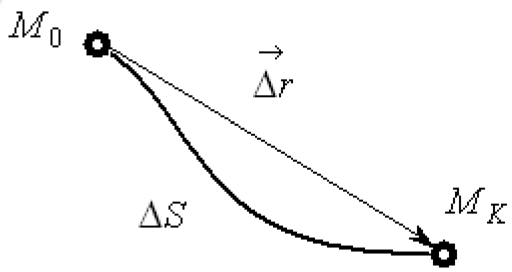


Рис. 2.4.1

Для вычисления работы силы при криволинейном движении точки разбиваем траекторию на бесконечно малые дуги Δs_i. Хорда такой дуги – вектор перемещения точки $\Delta\vec{r}_i$, соединяющий начало и конец дуги (рис. 2.4.2).

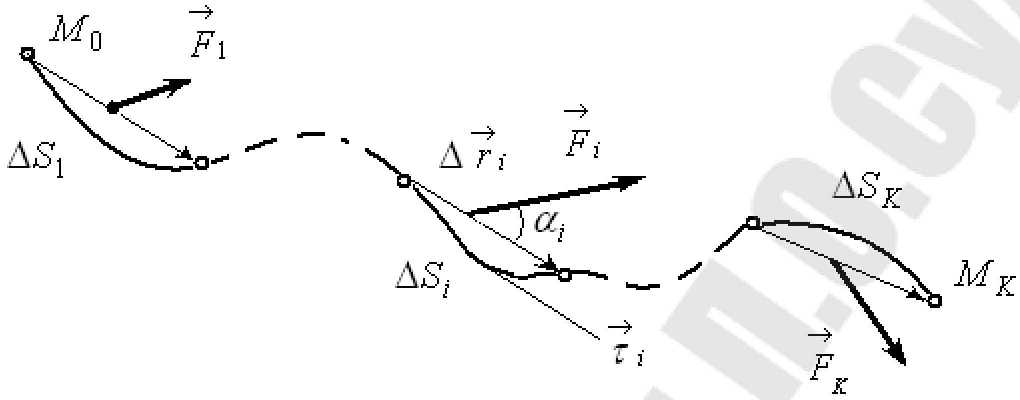


Рис. 2.4.2

Пусть $\Delta\vec{r}_i \to 0$. Тогда движение точки считаем прямолинейным, при постоянно действующей на точку силой $\vec{F}_i$

Для малого *i*-го перемещения работа равна скалярному произведению $\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$.

Работа по перемещению из положения M_0 в положение M_K будет вычисляться как криволинейный интеграл:

$$A_{M_0 M_K} = \lim_{\Delta\vec{r} - 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\, \Delta\vec{r}_i = \int_{M_0}^{M_K} \vec{F}\, d\vec{r}.$$

То есть работа при криволинейном движении равна

$$A_{M_0 M_K} = \int_{M_0}^{M_K} \vec{F}\, d\vec{r}.$$

Элементарной работой переменной силы $\bar{F}$ *называется скалярное произведение, находящееся под знаком криволинейного интеграла, т. е. работа на малом перемещении* $d\bar{r}$, *на котором изменением силы можно пренебречь*:

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

Элементарную работу силы $\bar{F}$ на перемещении $d\bar{r}$ можно определить и другим способом:

$$dA = \bar{F}\,d\bar{r} = Fdr\cos\alpha.$$

Выразим работу через проекции силы на координатные оси.

Так как $d\bar{r} = dX\,\bar{i} + dY\,\bar{j} + dZ\,\bar{k}$ и $\bar{F} = F_X\,\bar{i} + F_Y\,\bar{j} + F_Z\,\bar{k}$, то, используя правило скалярного произведения, получаем

$$A_{M_0M_k} = \int_{M_0}^{M_K} F_X dX + F_Y dY + F_Z dZ.$$

Элементарная работа будет равна

$$dA = F_X dX + F_Y dY + F_Z dZ.$$

Поскольку направление вектора перемещений $\Delta\bar{r}_i \to 0$ считаем параллельным единичному вектору касательной $\bar{\tau}_i$ к траектории, а длину хорды равной длине элементарной дуги $\left|\Delta\vec{r}_i\right| = \Delta s_i$, то работа на конечном перемещении по криволинейной траектории M_0M_K будет определяться суммированием по элементарным участкам траектории:

$$A_{M_0M_K} = \lim_{\Delta\vec{r} \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \cos(\vec{F}, \Delta\vec{r}) \cdot \Delta s_i.$$

На каждом элементарном участке $\cos(\bar{F}_i, \Delta\bar{r}_i) = \cos(\bar{F}_i, \bar{\tau}_i) = \cos(\alpha_i)$, и, следовательно, проекция силы $\bar{F}_i$ на направление касательной равна :

$$F_{i\tau} = F_i \cdot \cos(\alpha_i).$$

Тогда

$$A_{M_0M_K} = \lim_{\Delta\vec{r} \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau} \cdot \Delta s_i.$$

Переходя от суммирования работы на элементарных прямолинейных участках к непрерывной криволинейной траектории, получаем интегральную формулу работы на конечном перемещении точки:

$$A_{M_0M_K} = \int_{M_0}^{M_K} F_\tau ds.$$

Выражение, стоящее под знаком криволинейного интеграла является элементарной работой силы

$$dA = F_\tau dS.$$

Пример 2.4.1. Работа силы тяжести при криволинейном движении точки

Материальная точка M движется по криволинейной траектории в вертикальной плоскости XOY под действием постоянной силы тяжести $\bar{G} = m\bar{g} = const$ (рис. 2.4.3). Вычислим работу силы тяжести при перемещении точки из положения M_0 в положение M_K.

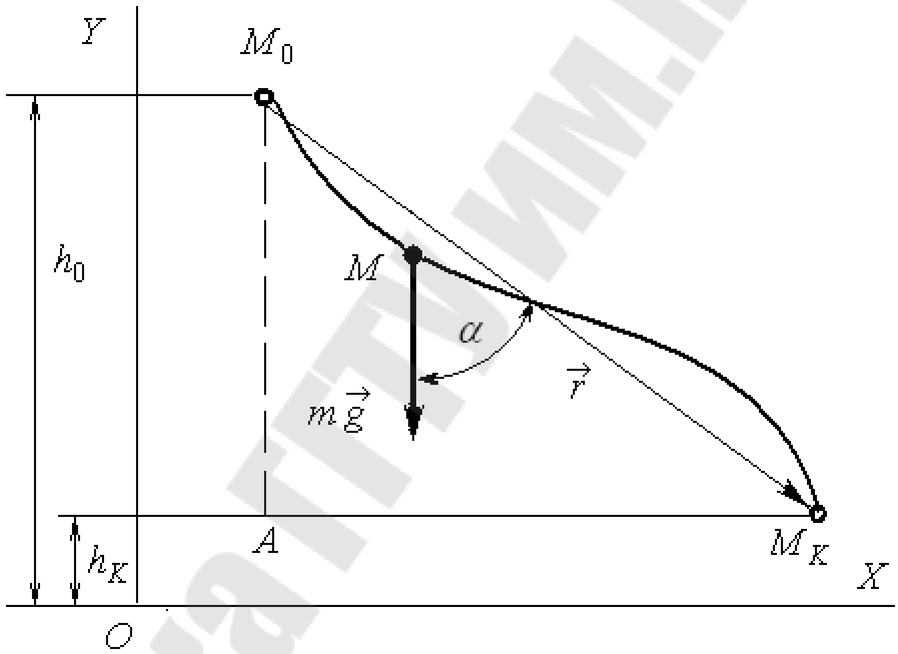


Рис. 2.4.3

Вычисляем криволинейный интеграл от скалярного произведения вектора силы тяжести и вектора элементарного перемещения точки:

$$A_{M_0M_K}(\vec{G}) = \int_{M_0}^{M_K} \vec{G} d\vec{r} = \int_{M_0}^{M_K} m\vec{g}\, d\vec{r}.$$

Далее $m\bar{g}$ как постоянную величину выносим за знак интеграла.

Интеграл $\int_{M_0}^{M_K} d\vec{r} = \vec{r}$ представляет вектор перемещения точки.

Тогда работа силы тяжести будет определяться формулой

$$A_{M_0M_K}(\vec{G}) = m\vec{g}\int_{M_0}^{M_K} d\vec{r} = m\vec{g}\,\vec{r} = mgr\cos\alpha.$$

Если координату точки M_0 обозначить как $Y_0 = h_0$ (высота точки от поверхности Земли), а координату точки M_K через $Y_K = h_K$, то из треугольника M_0AM_K (рис. 2.4.3) получаем вертикальный катет:

$$r\cos\alpha = h_0 - h_K.$$

Работа силы тяжести $\bar{F} = m\bar{g}$ при криволинейном движении равна разности значений функции mgh, взятых в положениях M_0 и M_K, и не зависит от формы траектории точки:

$$A_{M_OM_K}(\bar{G}) = mgh_0 - mgh_K = mg(h_0 - h_K).$$

Очевидно, что для случая $Y_0 = Y_K$, т. е. когда конечное и начальное положение точки находятся на одной высоте, $A_{M_0M_K} = mgr\cos 90^\circ = 0$, независимо от формы траектории (рис. 2.4.4).

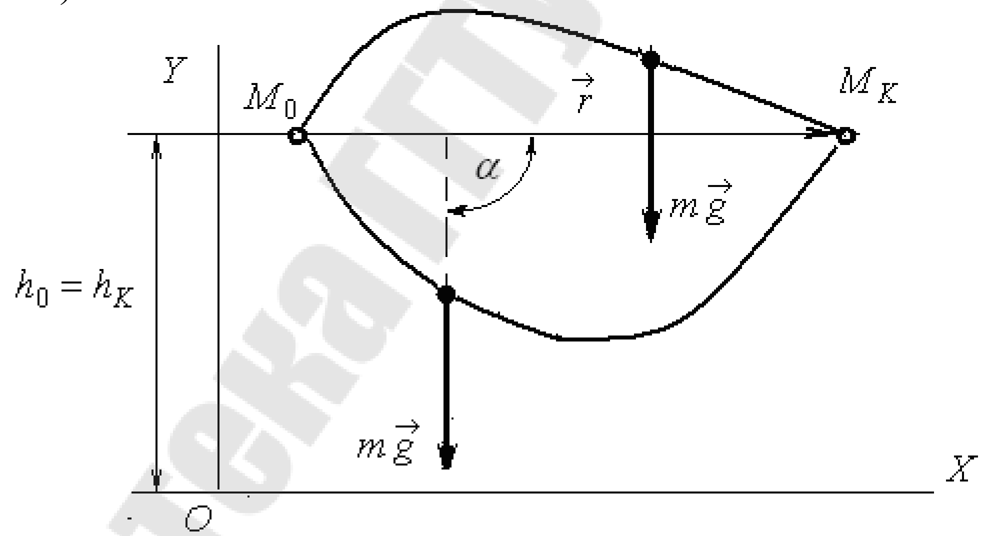


Рис. 2.4.4

Силы, работа которых не зависит от формы траектории точки, а определяются вектором перемещения, называются консервативными (*потенциальными*).

Например, сила тяжести является консервативной силой.

2.5. Силовое поле. Потенциальная энергия

Силовое поле – это область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда материальную частицу действует сила, определённая однозначной, ограниченной и дифференцируемой функцией $\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$, *или* $\bar{F} = \bar{F}(x, y, z, t)$.

Эта функция, зависящая от координат материальной точки, определяет стационарное или нестационарное силовое поле, т. е. не зависящее от времени или изменяющееся со временем.

Частный случай силового поля – потенциальное поле (консервативное), когда на материальную точку, помещенную в это поле, действуют потенциальные силы, не зависящие от формы траектории и закона движения точки.

Для характеристики потенциального силового поля можно ввести понятие потенциальной энергии частицы $\Pi(X, Y, Z)$.

Перемещаясь в потенциальном поле, материальная точка не всегда изменяет свою потенциальную энергию. Например, точка может перемещаться по какой-то определенной поверхности поля, на которой потенциальная энергия точки не изменяется, $\Pi(X, Y, Z) = const$. Геометрическое место точек, в которых потенциальная энергия сохраняет постоянное значение, называется *поверхностью уровня*, или *эквипотенциальной поверхностью*. Через каждую точку консервативного поля можно провести только одну такую поверхность.

Установим связь между консервативной силой и потенциальной энергией. Консервативные (потенциальные силы) можно вычислять по формулам в частных производных:

$$F_X = -\frac{\partial \Pi}{\partial X}, \quad F_Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y}, \quad F_Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial Z};$$

$$\vec{F} = F_X \vec{i} + F_Y \vec{j} + F_Z \vec{k} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial X}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial Y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial Z}\vec{k}\right). \quad (2.5.1)$$

Дифференциальный оператор

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial X}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial Y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial Z}\vec{k}\right)$$

определяет градиент скалярной функции координат $\Pi(X, Y, Z)$, который обозначается либо символом $grad\Pi$, либо $\nabla \Pi$, где $\bar{\nabla}$ – оператор набла, который имеет вид

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\ .$$

Тогда, вектор потенциальной силы можно представить в виде

$$\bar{F} = -grad\Pi = -\nabla\Pi. \qquad (2.5.2)$$

Из последнего определения потенциальной силы следует, что сила $\bar{F}$ всегда перпендикулярна поверхности $\Pi(X,Y,Z) = const$, т.е. направлена вдоль единичного вектора $\bar{n}$ нормали к этой поверхности. Знак «минус» в формулах (2.5.1) и (2.5.2) указывает, что вектор $\bar{F}$ направлен в сторону уменьшения потенциальной энергии (рис. 2.5.1).

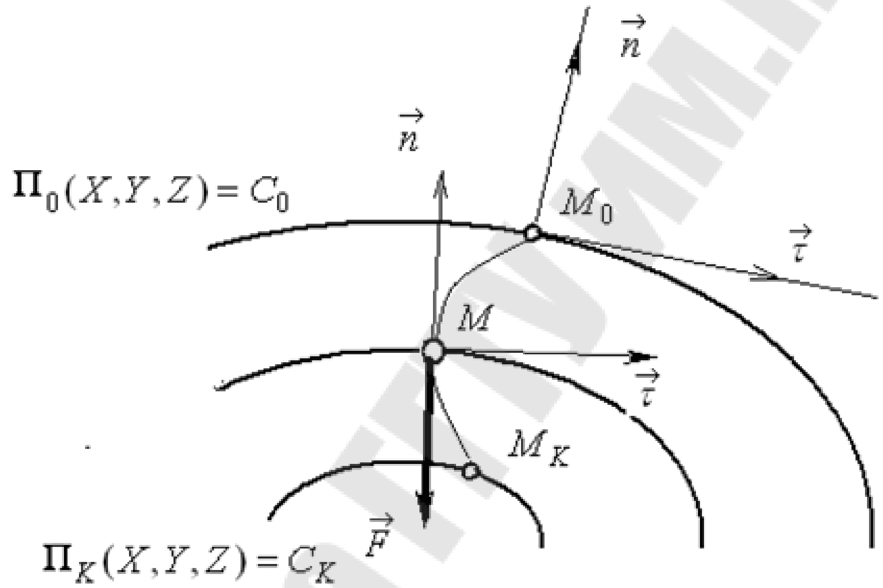


Рис. 2.5.1

Алгебраическое значение потенциальной силы определяем как производную от потенциальной энергии по направлению нормали к эквипотенциальной поверхности по формуле

$$F = -\frac{d\Pi}{dn}.$$

Запишем формулу для работы потенциальных сил :

$$A_{M_0M_K} = \int\limits_{M_0M_K} F_X dX + F_Y dY + F_Z dZ = -\int\limits_{M_0M_K} \frac{\partial\Pi}{\partial X}dX + \frac{\partial\Pi}{\partial Y}dY + \frac{\partial\Pi}{\partial Z}dZ.$$

Можно сказать, что работа совершается за счет запаса потенциальной энергии.

Под знаком интеграла имеем полный дифференциал :

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial X}dX + \frac{\partial \Pi}{\partial Y}dY + \frac{\partial \Pi}{\partial Z}dZ,$$

поэтому выражение для работы принимает вид

$$A_{M_0M_K} = -\int\limits_{M_0M_K} d\Pi = -(\Pi(X_K, Y_K, Z_K) - \Pi(X_0, Y_0, Z_0)). \qquad (2.5.3)$$

То есть работа потенциальной силы равна разности потенциальной энергии в конечном M_K и начальном M_0 положении материальной точки:

$$A_{M_0M_K} = \Pi(X_0, Y_0, Z_0) - \Pi(X_K, Y_K, Z_K).$$

Элементарная работа dA равна убыли потенциальной энергии, т. е. равна выражению под интегралом формулы (2.5.3):

$$dA = -\,d\Pi.$$

Например, горизонтальная поверхность является поверхностью уровня поля силы тяжести. При переходе с одного потенциального уровня на другой сила тяжести совершает работу (рис. 2.5.2):

$$A_{M_0M_K}(\bar{G}) = mg(h_0 - h_K),$$

где величина $(h_0 - h_K) = H$ определяет разность потенциальных уровней.

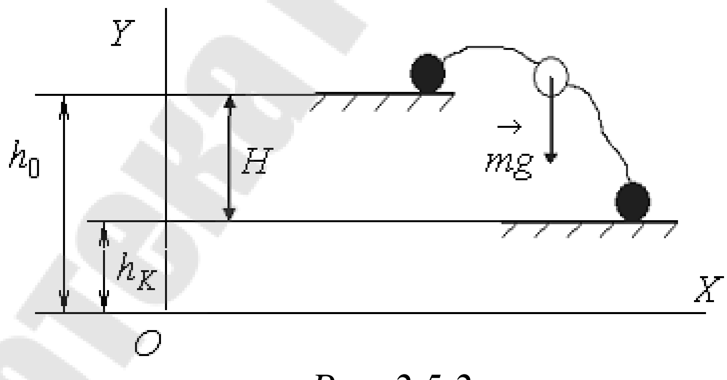


Рис. 2.5.2

Любой потенциальный уровень можно условно принять за нулевой, для которого можно положить $\Pi(X, Y, Z) = 0$. Например, в рассмотренном выше примере (пример 2.4.1, рис.2.4.3) можно выбрать новую ось координат OX^*, для которой $h_K = 0$. В этой системе координат (рис. 2.5.3) положение M_K материальной точки совпадает с нулевым потенциальным уровнем $\Pi(X_K, Y_K, Z_K) = 0$. Потенциальная энергия точки в положении M_0 будет в этом случае равна работе силы тяжести $\Pi(X_0, Y_0, Z_0) = mgH$.

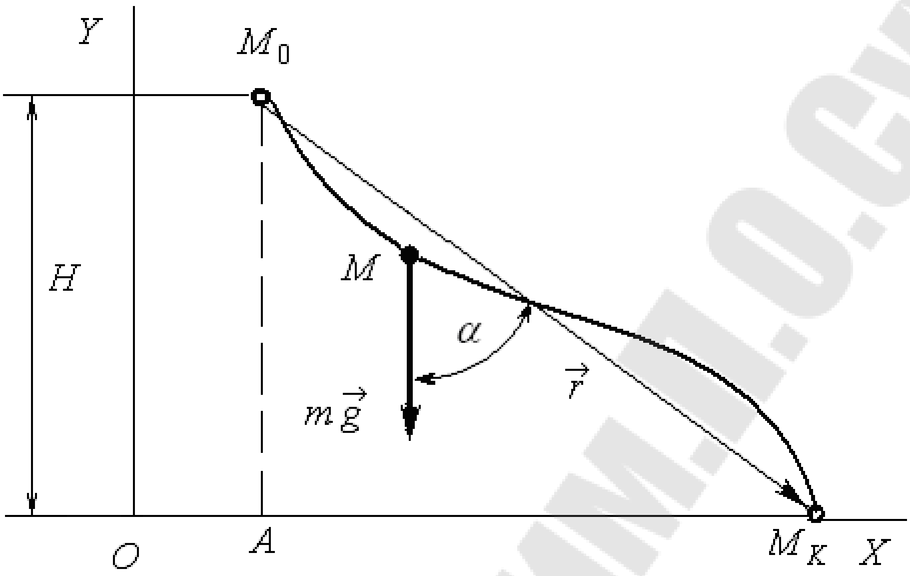


Рис. 2.5.3

2.6. Потенциальная энергия силы упругости. Работа упругой силы

Пусть материальная точка M находится в равновесии в точке O, которую примем за начало системы координат XOY.

Сместим точку M по оси OX из положения равновесия на расстояние ΔX. Приложим к точке M силу, направленную к положению равновесия (рис. 2.6.1). Пусть величина этой силы изменяется прямо пропорционально смещению ΔX. Такая сила называется *силой упругости* или *восстанавливающей силой*:

$$F_{\text{упр}} = - c \cdot \Delta X. \qquad (2.6.1$$

Здесь

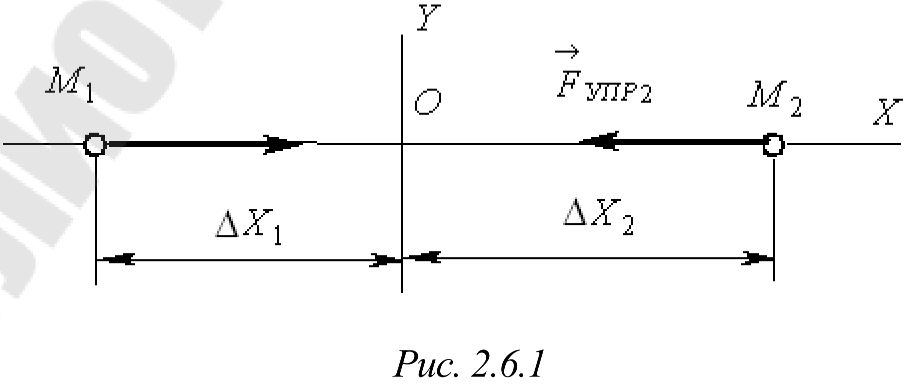


Рис. 2.6.1

ΔX — расстояние точки приложения силы до положения равновесия точки;

c — коэффициент пропорциональности, называемый также коэффициентом жесткости упругой связи, наложенной на точку.

Из формулы (2.6.1) следует:

$$c = \frac{F_{\text{упр}}}{\Delta X}.$$

Таким образом, *коэффициент жесткости определяет необходимую величину силы, для того чтобы сообщить упругому телу единичную деформацию.*

Коэффициент жесткости измеряется в единицах силы, отнесенных к единице длины, в Н/см, кН/мм (в международной системе), и в кГ/см, (в технической системе единиц).

Силы упругости возникают, например, при деформации пружины. Эта сила всегда направлена в точку, соответствующую равновесному положению пружины. Знак «минус» в формуле (2.6.1)показывает, что сила упругости всегда направлена к началу координат, совпадающему с положением равновесия точки.

Пусть положение точки M на оси определяется координатой X.

Тогда сила упругости, как сила, зависящая от положения точки, будет определяться формулой $F_{\text{упр}}(X) = - c \cdot X$.

Вычислим работу силы упругости на перемещении точки из положения M_0 в положение M_K с координатами X_0 и X_K (рис. 2.6.2).

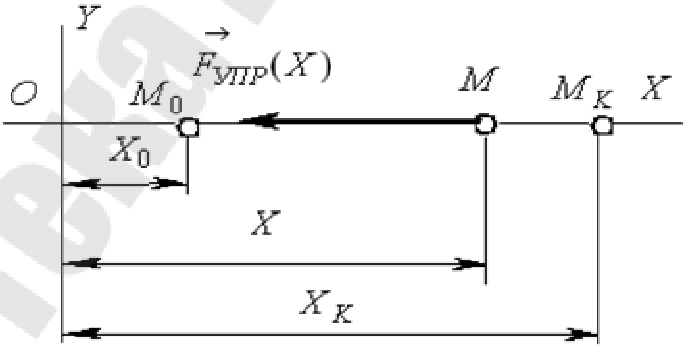


Рис. 2.6.2

$$A_{M_0M_K} = \int\limits_{M_0M_K} F_X dX = \int\limits_{M_0M_K} (-cX)dX = -c \int\limits_{M_0M_K} XdX = -c\frac{(X_K^2 - X_0^2)}{2}.$$

Найдем потенциальную энергию точки в положении M:

$$A_{0M} = \Pi(0) - \Pi(X); \quad \Pi(0) = 0; \quad A_{0M} = -\Pi(X) = -c\frac{(X_K^2 - X_0^2)}{2};$$

$$\Pi(X) = c\frac{X^2}{2}.$$

2.7. Мощность

Работа, совершаемая в единицу времени, называется *мощностью*. Если за время dt совершается работа dA, то мощность равна:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Мощность определяется как скалярное произведение вектора силы на вектор скорости:

$$N = \vec{F}\cdot\vec{V} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \frac{dA}{dt}.$$

Взяв элементарную работу dA в виде $dA = \bar{F}\,d\,\bar{r}$, получим для мощности выражение

$$P = \bar{F}\cdot\bar{V} = P_X V_X + P_Y V_Y + P_Z V_Z.$$

В международной системе единиц СИ единицей мощности является ватт: $[N] = \text{Вт} = \text{Дж/с}$.

3 . ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

3.1. Две меры механического движения материальной точки

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости. Опыт показывал, что одинаковые воздействия на разные тела вызывают разные по величине изменения скоростей этих тел.

При взаимодействии тел преобразование механического движения в одном случае может сопровождаться переходом части механической энергии в другие виды энергии (теплоты, электричества и т. д.).

В другом случае такого перехода энергии механического движения может не происходить, например, абсолютно упругий удар двух тел.

Каждый из этих случаев имеет свои измерители движения тел.

В первом случае мерой механического движения является *кинетическая энергия,* во втором – *количество движения.*

Из элементарного курса физики знаем, что *кинетическая энергия*, *материальной точки равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:*

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

Так как квадрат скорости точки равен:

$$V^2 = \bar{V} \cdot \bar{V} = V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2,$$

то кинетическую энергию точки можно определять по формуле

$$T = \frac{m\left(V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2\right)}{2}.$$

Из элементарного курса физики знаем также, что *количеством движения материальной точки называется величина, равная произведению массы точки на ее скорость и направленная вдоль вектора скорости точки:* $\bar{Q} = m\bar{V}$.

Для векторной величины $\vec{Q} = \vec{i}\,Q_X + \vec{j}\,Q_Y + \vec{k}\,Q_Z$ могут быть определены ее проекции на координатные оси, модуль вектора и направляющие косинусы.

Так как вектор скорости точки равен:

$$\vec{V} = \vec{i}\,V_X + \vec{j}\,V_Y + \vec{k}\,V_Z,$$

то $Q_X = mV_X$, $Q_Y = mV_Y$, $Q_Z = mV_Z$,

$$Q = \sqrt{Q_X^2 + Q_Y^2 + Q_Z^2},$$

$$\cos(\vec{Q}, X) = \frac{Q_X}{Q}, \quad \cos(\vec{Q}, Y) = \frac{Q_Y}{Q}, \quad \cos(\vec{Q}, Z) = \frac{Q_Z}{Q}.$$

3.2. Теорема об изменении количества движения. Импульс силы

Запишем основное уравнение динамики точки в виде векторного дифференциального уравнения первого порядка :

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}\cdot$$

Так как масса точки постоянна, т. е. $m = const$, внесем ее под знак дифференциала:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}\cdot \quad . \qquad (3.2.1)$$

В результате определяем производную от количества движения точки.

***Теорема* (*дифференциальная форма*)**: *производная по времени от вектора количества движения точки равна вектору равнодействующей системы сил, действующих на точку.*

Следствие: так как вектор количества движения равен:

$$m\bar{V} = mV_X\,\bar{i} + mV_Y\,\bar{j} + mV_Z\,\bar{k},$$

а вектор равнодействующей –

$$\bar{F} = F_X\,\bar{i} + F_Y\,\bar{j} + F_Z\,\bar{k},$$

то формула (3.2.1) запишется в координатной форме:

$$\frac{d(mV_X)}{dt} = F_X, \quad \frac{d(mV_Y)}{dt} = F_Y, \quad \frac{d(mV_Z)}{dt} = F_Z. \qquad (3.2.2)$$

Следствие *из теоремы: Производная по времени от проекции количества движения точки на координатную ось равна проекции равнодействующей на эту ось.*

В дифференциальном уравнении (3.2.1) разделим переменные

$$d(m\bar{V}) = \bar{F}\,dt. \qquad (3.2.3)$$

Обозначим $\bar{F}\,dt = d\,\bar{S}(t)$ – элементарный импульс силы.

Из уравнения (3.2.3) получаем: *дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу силы*.

Вычислим определенные интегралы от левой и правой частей уравнения (3.2.3):

$$\int_{V_0}^{V_K} d(m\bar{V}) = \int_{t_0}^{t_K} \bar{F}\,dt. \tag{3.2.4}$$

Как известно, пределы определенного интеграла определяют границы интервала интегрирования. В динамике точки интервалам интегрирования соответствуют значения параметров движения в начале и в конце периода наблюдения за точкой.

В уравнении (3.2.4) имеем соответственно:

t_0 – значение начального момента времени;

t_K – значение конечного момента времени;

$\bar{V}_0$ – начальная скорость точки;

$\bar{V}_K$ – начальная скорость точки.

В правой части уравнения (3.2.4) величина $\int_{t_0}^{t_K} \bar{F}\,dt = \bar{S}(t)$ называется импульсом силы $\bar{F}$ за конечный промежуток времени $\Delta t = t_K - t_0$.

Проинтегрируем левую часть уравнения (3.2.4):

$$\int_{V_0}^{V_K} d(m\bar{V}) = m\bar{V}_K - m\bar{V}_0.$$

В результате получаем интегральную форму теоремы.

Разность количеств движения материальной точки за конечный и начальный моменты времени равна импульсу равнодействующей системы сил, действующих на точку:

$$m\bar{V}_K - m\bar{V}_0 = \bar{S}(t). \tag{3.2.5}$$

Так как импульс силы – векторная величина, то

$$\bar{S}(t) = S_X\,\bar{i} + S_Y\,\bar{j} + S_Z\,\bar{k}.$$

Здесь проекции импульса силы на оси координат равны соответственно:

$$S_X = \int_{t_0}^{t_K} F_X dt, \qquad S_Y = \int_{t_0}^{t_K} F_Y dt, \qquad S_Z = \int_{t_0}^{t_K} F_Z dt.$$

Для прямоугольной системы координат можем записать: $\bar{V}_K = V_{X_K}\bar{i} + V_{YK}\bar{j} + V_{Z_K}\bar{k}$, $\bar{V}_0 = V_{X_0}\bar{i} + V_{Y0}\bar{j} + V_{Z_0}\bar{k}$.

Тогда получаем координатную запись интегральной формы теоремы.

Следствие из теоремы. *Разность проекций вектора количества движения точки на координатную ось за конечный и начальный моменты времени равна проекции импульса равнодействующей системы сил, действующих на точку.*

$$\begin{aligned} mV_{X_K} - mV_{X_0} &= S_X(t), \\ mV_{Y_K} - mV_{Y_0} &= S_Y(t), \\ mV_{Z_K} - mV_{Z_0} &= S_Z(t). \end{aligned} \qquad (3.2.6)$$

3.3. Момент количества движения точки

Теорема об изменении момента количества движения точки

Из статики известно, что любая векторная величина (например, вектор силы) создает момент относительно точки (полюса), не лежащей на линии действия заданного вектора. Этот момент тоже является векторной величиной, которая определяется векторным произведением. Например, в статике мы определяли момент силы $\bar{F}$, приложенной к точке A, относительно точки O:

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r}_A \times \bar{F}, \qquad (3.3.1)$$

где $\bar{r}_A$ – радиус-вектор точки приложения силы $\bar{F}$.

Направление вектора $M_O(\bar{F})$ определяется по правилу векторного произведения:

$$M_O(\bar{F}) \perp \bar{F} \quad \text{и} \quad M_O(\bar{F}) \perp \bar{r}_A .$$

Аналогично для вектора $m\bar{V}$ можно получить вектор момента количества движения точки M (рис. 3.3.1):

$$M_O(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}, \qquad (3.3.2)$$

где $m\bar{V}$ – количество движения точки M, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M.

Вектор импульса силы, приложенной к точке M, также создает момент относительно точки O (рис. 3.3.2):

$$\bar{M}_O(\bar{S}(t)) = \bar{r} \times \bar{S}(t). \qquad (3.3.3)$$

Алгебраические значения моментов определяем по формулам для векторного произведения:

$$M_O(m\bar{V}) = mV \cdot r \cdot \sin\beta = mV \cdot h_{mV};$$

$$M_O(\bar{S}(t)) = S(t) \cdot r \cdot \sin\alpha = S(t) \cdot h_S.$$

Здесь

$h_S = r \cdot \sin\alpha$ – плечо вектора $\bar{S}(t)$ (высота треугольника, построенного на сторонах $\bar{r}$ и $\bar{S}(t)$), рис. 3.3.1); $h_{mV} = r \cdot \sin\beta$ – плечо вектора $m\bar{V}$ (высота треугольника, построенного на сторонах $\bar{r}$ и $m\bar{V}$), рис.3.3.2.

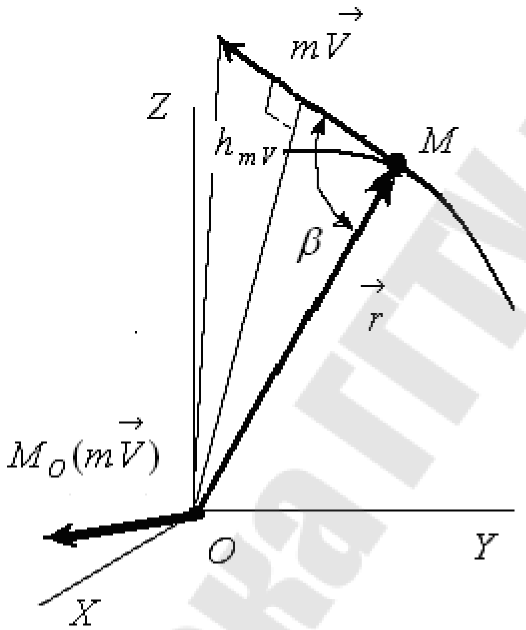


Рис. 3.3.1

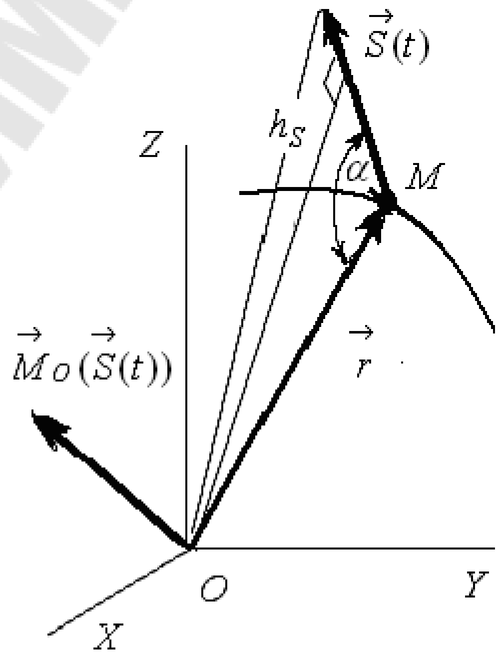


Рис. 3.3.2

Согласно правилу векторного умножения, векторы $\bar{M}_O(\bar{S}(t))$ и $\bar{M}_O(m\bar{V})$ направлены перпендикулярно плоскостям треугольников, образованных векторами $\bar{S}(t)$ и $\bar{r}$ или $m\bar{V}$ и $\bar{r}$.

Вычислим производную по времени от момента количества движения точки M:

$$\frac{d(\bar{M}_0(m\bar{V}))}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = \frac{d\,\bar{r}}{dt} \times m\vec{V} + \vec{r} \times \frac{d(m\bar{V})}{dt}.$$

Так как $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \vec{V}$, то $\bar{V} \times m\bar{V} = 0$, и, следовательно,

$$\frac{d(\bar{M}_0(m\bar{V}))}{dt} = \vec{r}_M \times \frac{d(m\bar{V})}{dt}.$$

Учитывая (3.2.1) и (3.3.1), получаем

$$\frac{d\bar{M}_0(m\bar{V})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

т. е.

$$\frac{d(\bar{M}_0(m\bar{V}))}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}). \qquad (3.3.4)$$

Теорема (дифференциальная форма). *Производная по времени от момента количества движения относительно какого – либо полюса равна моменту равнодействующей относительно этого полюса.*

Переходя к проекциям на координатные оси, получаем

$$\bar{M}_O(m\bar{V}) = M_X(m\bar{V}) \cdot \bar{i} + M_Y(m\bar{V}) \cdot \bar{j} + M_Z(m\bar{V}) \cdot \bar{k}$$

и

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = M_X(\bar{F}) \cdot \bar{i} + M_Y(\bar{F}) \cdot \bar{j} + M_Z(\bar{F}) \cdot \bar{k}.$$

Здесь

$M_X(m\bar{V})$, $M_Y(m\bar{V})$, $M_Z(m\bar{V})$ – моменты вектора $m\bar{V}$ относительно координатных осей; $M_X(\bar{F})$, $M_Y(\bar{F})$, $M_Z(\bar{F})$ – моменты вектора $\bar{F}$ относительно координатных осей.

Получаем уравнения в проекциях на оси координат:

$$\frac{dM_X(m\bar{V})}{dt} = M_X(\vec{F}), \quad \frac{dM_Y(m\vec{V})}{dt} = M_Y(\vec{F}), \quad \frac{dM_Z(m\vec{V})}{dt} = M_Z(\vec{F}).$$

Следствие из теоремы. *Производная по времени от момента количества движения относительно какой-либо оси равна моменту равнодействующей относительно этой оси.*

3.4. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Пусть сила $\bar{F}$, действующая на точку M, является функцией положения точки $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$. Здесь $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M.

Запишем основное уравнение динамики:

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}). \qquad (3.4.1)$$

В уравнении (3.4.1) от параметра t переходим к параметру $\bar{r}$.

Умножим правую часть уравнения (3.4.1) на дробь $\frac{d\vec{r}}{d\vec{r}} = 1$ и преобразуем уравнение:

$$m\left(\frac{d\vec{r}_M}{d\vec{r}_M}\right)\cdot\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}, \quad m\left(\frac{d\vec{r}_M}{dt}\right)\cdot\frac{d\vec{V}}{d\vec{r}_M} = \vec{F}\cdot$$

Так как $\frac{d\bar{r}}{dt} = \vec{V}$, то

$$m\vec{V}\cdot\frac{d\bar{V}}{d\vec{r}} = \vec{F}.$$

В дифференциальном уравнении разделим переменные:

$$m\bar{V}\cdot d\bar{V} = \bar{F}\cdot d\bar{r}. \qquad (3.4.2)$$

Внесем вектор $\bar{V}\cdot$ под знак дифференциала :

$$\vec{V}\cdot d\vec{V} = \frac{1}{2}d\left(\vec{V}\right)^2.$$

Так масса точки $m = const$, $\quad m\vec{V}\cdot d\vec{V} = d\left(\frac{mV^2}{2}\right)$.

Из уравнения (3.4.2) получаем теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \vec{F}\cdot d\vec{r}. \qquad (3.4.3)$$

Или

$$\frac{d\left(\frac{mV^2}{2}\right)}{d\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot$$

Так как правая часть уравнения (3.4.3) представляет собой элементарную работу

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

то,

$$d\left(\frac{mV_M^2}{2}\right) = dA. \qquad (3.4.4)$$

То есть дифференциал кинетической энергии равен элементарной работе.

Если использовать обозначение $\frac{mV^2}{2} = T$, то

$$dT = dA. \qquad (3.4.5)$$

Вычислим определенные интегралы каждой части уравнения

$$\int_{T_0}^{T_K} dT = T_K - T_0,$$

где T_0 – значение кинетической энергии в начальном положении точки; T_K – значение кинетической энергии в конечном положении точки.

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_K} dA = A_{M_0 M_K}.$$

Здесь $A_{M_0 M_K}$ – работа силы на перемещении точки, $\bar{r}_0$ – радиус- вектор начального положения точки; $\bar{r}_K$ – радиус- вектор конечного положения точки.

То есть в интегральной формулировке имеем:

изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно работе действующей силы на том же перемещении:

$$T_K - T_0 = A_{M_0 M_K}.$$

Или
$$\frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A_{M_0 M_K}.$$

Рассмотрим иной способ вывода теоремы об изменении кинетической энергии.

Левую и правую часть основного уравнения динамики для точки M скалярно умножим на вектор скорости:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F},\quad m\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{V}\cdot$$

Как и в предыдущем случае

$$m\vec{V}\cdot d\vec{V}=d\left(\frac{mV^2}{2}\right)\cdot$$

Тогда

$$m\vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right),$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot\vec{V}\cdot$$

Здесь правая часть уравнения – мощность действия силы $\bar{F}$:

$$N=\bar{F}\cdot\bar{V}.$$

Получаем дифференциальную форму теоремы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right)=N\quad \text{или}\quad \frac{dT}{dt}=N\cdot$$

То есть *производная по времени от кинетической энергии равна мощности равнодействующей системы сил, приложенных к точке.*

Пример 3.4.1. Движение точки вверх по наклонной плоскости

Определить расстояние $s_{ост},$ которое пройдет материальная точка до остановки вверх по наклонной плоскости, если ей сообщили начальную скорость V_0. Коэффициент трения $f_{тр}$ и угол α наклона плоскости заданы (рис. 3.4.1).

Решение

Для решения применяем интегральную запись теоремы

$$\frac{mV_K^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=A_{M_0M_K}.$$

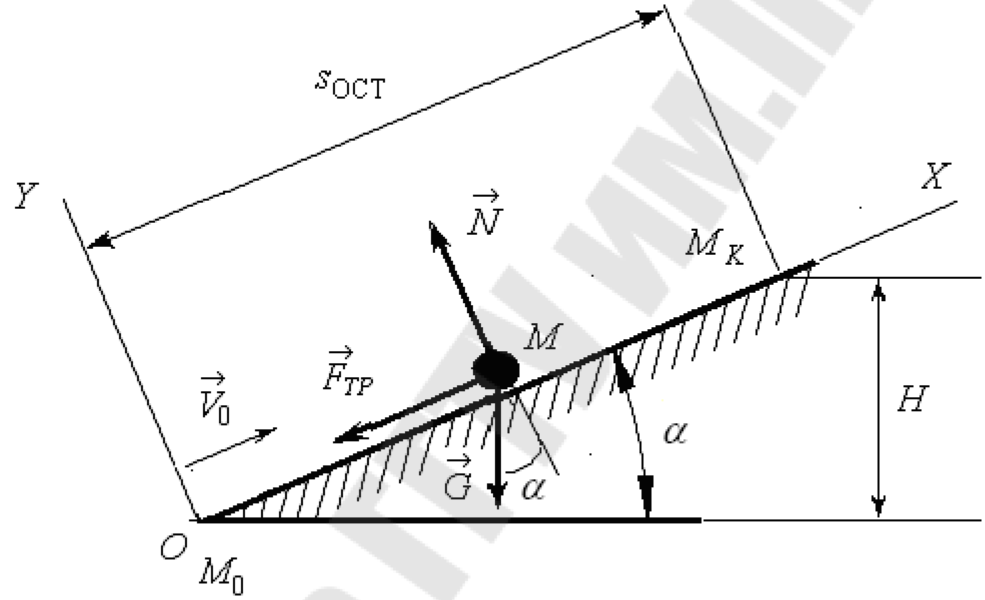
По условию задачи в конечном положении точка должна остановиться, т. е. $V_K = 0$. Следовательно,

$$-\frac{mV_0^2}{2} = A_{M_0 M_K}\,.$$

Вычислим работу $A_{M_0 M_K}$, в выражение которой должна входить неизвестная величина $s_{ост.}$. Продолжая решение примера 2.2.1, получаем

$$A_{M_0 M_K} = A_{M_0 M_K}(\bar{G}) + A_{M_0 M_K}\ (\mathrm{F_{тр}});$$

$$A_{M_0 M_K} = -\ (G \cdot f_{тр} \cdot \cos\alpha + G \cdot \sin\alpha) \cdot s_{ост}\,.$$



.

Рис. 3.4.1

Тогда

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -(G \cdot f_{тр} \cdot \cos\alpha + G \cdot \cos\alpha) \cdot s_{ост}\,.$$

В результате получаем ответ задачи:

$$s_{ост} = \frac{2 \cdot G(f_{тр} \cdot \cos\alpha + \sin\alpha)}{mV_0^2}\,.$$

Пример 3.4.2. Математический маятник

Математический маятник имеет длину L (рис. 3.4.2). В начальный момент времени маятник отклонен от положения равновесия на угол α_0 (положение M_0) и отпущен без начальной скорости. Требуется определить скорость маятника в момент, когда он, пройдя положение равновесия $\alpha = 0$, отклонится от вертикали на угол α_K и займет положение M_K.

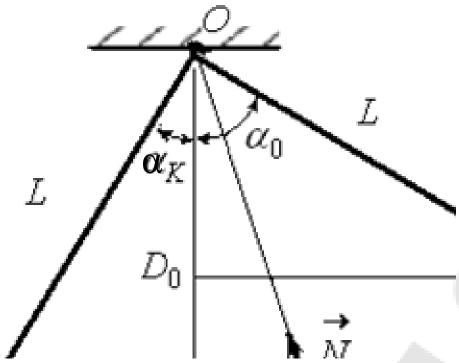


Рис. 3.4.2

Решение

Для решения применяем интегральную запись теоремы:

$$\frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A_{M_0 M_K}.$$

По условию задачи в начальном положении точка неподвижна, т. е. $V_0 = 0$. Следовательно

$$\frac{mV_K^2}{2} = A_{M_0 M_K}.$$

Скорость V_K соответствует положению точки M, когда маятник отклонится на угол α_K от положения равновесия.

На маятник действуют две силы.

Сила $\bar{N}$ натяжения нити (реакция нити) и сила тяжести $\bar{G}$.

Так как сила $\bar{N} \perp \bar{V}$, то работа этой силы $A(\bar{N}) = 0$.

Работу на перемещении маятника совершает потенциальная сила тяжести

$$A(\bar{G}) = G \cdot H = mgH.$$

Разность потенциальных уровней конечного и начального положения определяем, определяя вертикальные катеты треугольников ΔOM_0D_0 и ΔOM_KD_K:

$$H = OM_0 - OM_K = L \cdot \cos\alpha_0 - L \cdot \cos\alpha_K.$$

Тогда

$$\frac{mV_K^2}{2} = mgH \cdot L(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_K)..$$

Окончательно получаем

$$V_K = \sqrt{2gL(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_K)}.$$

3.5. Законы сохранения в механике

Рассмотрим частные случаи изученных выше теорем.

Выпишем эти теоремы в дифференциальной формулировке:

1. Теорема об изменении количества движения:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}\cdot$$

2. Теорема об изменении момента количества движения:

$$\frac{d(\vec{M}_0(m\vec{V}))}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}).$$

3. Теорема об изменении кинетической энергии:

$$\frac{dT}{dt} = N.$$

Теперь предположим, что правые части этих дифференциальных уравнений равны нулю, т. е. имеем следующие выражения:

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = 0, \quad \frac{d(\bar{M}_0(m\bar{V}))}{dt} = 0, \quad \frac{dT}{dt} = 0\cdot. \qquad (3.5.1)$$

В этом случае

$$mV = \overline{const}, \quad \bar{M}_0(m\bar{V}) = const, \quad T = const\cdot$$

В результате имеем законы сохранения:

1. *Закон сохранения количества движения*: если равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, то количество движения точки не изменяется.

2. *Закон сохранения момента количества движения*: если момент равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, равен нулю, то момент количества движения точки не изменяется.

3. Если мощность равнодействующей сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, то кинетическая энергия точки не изменяется.

Векторные формулы (3.5.1) можно переписать в координатном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d(mV_X)}{dt} = 0, \\ \dfrac{d(mV_Y)}{dt} = 0, \\ \dfrac{d(mV_Z)}{dt} = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} M_X(\vec{F}) = 0, \\ M_Y(\vec{F}) = 0, \\ M_Z(\vec{F}) = 0. \end{cases}$$

В этом случае имеем другую формулировку законов сохранения:

1. *Закон сохранения количества движения*: если проекция равнодействующей сил на какую-то ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось будет постоянной величиной:

$$\begin{cases} mV_X = const, \\ mV_Y = const, \\ mV_Z = const, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{cases} F_X = 0, \\ F_Y = 0, \\ F_Z = 0. \end{cases}$$

Или в интегральной форме: если проекция импульса равнодействующей сил на какую-то ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось будет постоянной величиной:

$$\begin{cases} mV_{X_K} - mV_{X_0} = 0, \\ mV_{Y_K} - mV_{Y_0} = 0, \\ mV_{Z_K} - mV_{Z_0} = 0, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{cases} S_X = 0, \\ S_Y = 0, \\ S_Z = 0. \end{cases}$$

2. *Закон сохранения момента количества движения*: если момент равнодействующей сил относительно какой-то оси равен нулю, то момент количества движения точки относительно этой оси будет постоянным: т. е. если $M_X(\bar{F}) = 0,\ M_Y(\bar{F}) = 0,\ M_Z(\bar{F}) = 0,$ то

$$M_X(m\bar{V}) = const,\ M_Y(m\bar{V}) = const,\ M_Z(m\bar{V}) = const.$$

Или в интегральной форме: если момент импульса равнодействующей относительно какой-то оси равен нулю, то момент количества движения относительно этой оси будет постоянной величиной: т. е. если $M_X(\bar{S}) = 0,\ M_Y(\bar{S}) = 0,\ M_Z(\bar{S}) = 0,$ то

$$M_X(m\bar{V}) - M_{Xнач}(m\bar{V}) = 0, \qquad M_Y(m\bar{V}) - M_{Yнач}(m\bar{V}) = 0,$$

$$M_Z(m\bar{V}) - M_{Zнач}(m\bar{V}) = 0.$$

3. Мощность равна скалярному произведению силы и скорости:

Если $\bar{F} = 0$, то $N = 0$, и, следовательно, кинетическая энергия точки не изменяется.

Теорему об изменении кинетической энергии запишем в другом виде. Так как $dT = Ndt = dA$ и $dA = -d\Pi$, то $dT = -d\Pi$.

Интегрируя, получаем

$$T = -\Pi + const, \text{ или } T + \Pi = const.$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии называется *полной механической энергией*:

$$E = \frac{mV^2}{2} + mgH.$$

Консервативными силами называют потенциальные силы, работа которых не зависит от траектории точки. Если на точку действуют консервативные силы, то *полная механическая энергия остатся постоянной* $E = const$. В этом случае выполняется *закон сохранения полной механической энергии точки.*

Пример 3.5.1. Движение планеты

Движение планеты M происходит под действием силы притяжения $\bar{F}_c$ ее к Солнцу, т. е. силы центральной силы. Траекторией планеты является эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце (точка C). Как связаны скорости $\bar{V}$ планеты в перигее (минимально удаленная точка P) и апогее (максимально удаленная точка A) (рис. 3.5.1).

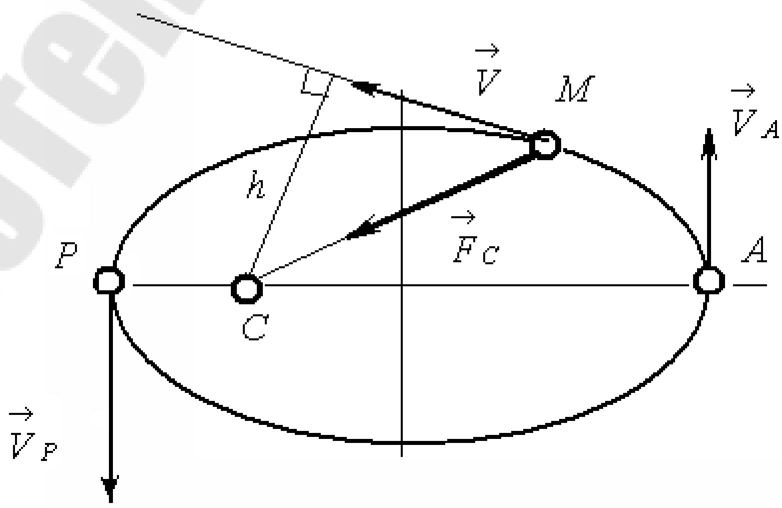


Рис. 3.5.1

Так как момент центральной силы $\bar{F}_c$ относительно точки C равен нулю, то момент количества движения относительно точки постоянен:

$$mVh = const.$$

Здесь h – плечо вектора $m\bar{V}$ в произвольном положении точки.

Для всех положений точки M будут выполняться условия:

$$mVh = mV_A CA = mV_P CP = const.$$

Следовательно,

$$\frac{V_P}{V_A} = \frac{CA}{CP}.$$

Пример 3.5.2. Переход потенциальной энергии в кинетическую

На примере свободного падения точки, исследуем изменение ее кинетической и потенциальной энергии.

Решение

Выберем систему координат XOY и запишем начальные условия. Рассмотрим три положения материальной точки:

1. Пусть точка M массой m находится в состоянии покоя на высоте $H = Y_{\max}$ (рис. 3.5.2). В этом положении ее полная механическая энергия будет равна потенциальной энергии: $E = E(Y_{\max}) = mgH$.

2. В какой-то момент времени точку отпустили без начальной скорости. В произвольный момент падения точка M имеет координату Y_M и скорость $V_M = \dot{Y}$. В этом положении полная механическая энергия будет равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$E = E(Y_M) = mgY_M + \frac{mV_M{}^2}{2}.$$

3. В момент падения координата точки равна $Y_K = 0$. Будем считать, что в этом положении ее потенциальная энергия равна нулю, $П(Y_K) = 0$, а кинетическая энергия максимальна:

$$T = \frac{mV_{\max}^2}{2}.$$

Полная механическая энергия точки будет равна кинетической энергии падения:

$$E = E(Y_K) = \frac{mV_{\max}^2}{2}.$$

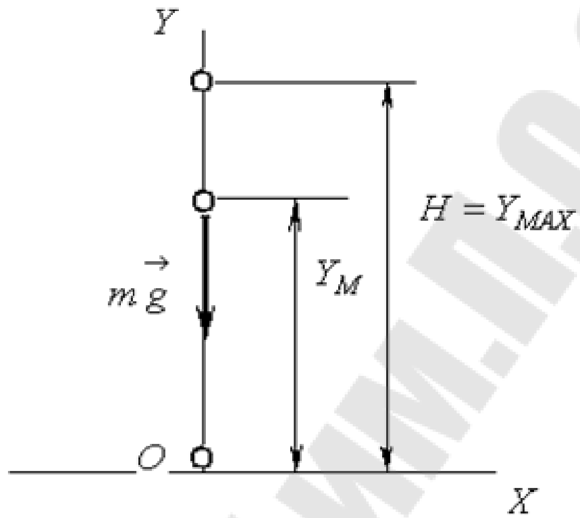


Рис. 3.5.2

Так как сила тяжести является потенциальной (консервативной силой), то должны выполняться условия

$$E = E(Y_{\max}) = E(Y_M) = E(Y_K) = const.$$

Или

$$mgY_{\max} = mgY_M + \frac{mV_M{}^2}{2} = \frac{mV_{\max}}{2}.$$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

4.1. Основные понятия дифференциальных уравнений

При изучении физических явлений очень часто не удается непосредственно найти закон, связывающий независимую переменную и искомую функцию. Установить такую связь возможно с помощью дифференциального уравнения, в котором присутствуют производные неизвестной функции.

Если искомая функция является функцией одного аргумента – *параметра – величины*, по которому проводится интегрирование и дифференцирование, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется любая функция, определенная вместе с соответствующими производными в некоторой области, которая, будучи подставлена в уравнение, обращает его в тождество, справедливое для всех точек этой области.

Любое дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Для описания этих множеств применяется понятие общего решения, т. е. функции, зависящей от независимой переменной и произвольных постоянных параметров C_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Здесь величина n соответствует порядку дифференциального уравнения. С геометрической точки зрения график решения дифференциального уравнения (общий интеграл) есть семейство кривых. Эти кривые называются *интегральными кривыми данного уравнения*.

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение – это значит найти те или иные его решения, что всегда связанно с необходимостью интегрировать входящие в это уравнение функции.

Частным решением (частный интеграл) дифференциального уравнения называется любая функция, которая получается из общего решения, если в последнем произвольные постоянные C_i принять равными каким – то заданным значениям постоянных $C_i^{(0)}$. Частному решению соответствует n интегральных кривых.

Отметим важнейшую задачу, которая называется задачей Коши: среди всех решений дифференциального уравнения требуется найти такое, которое удовлетворяет заданным значениям искомых функций при начальном значении независимого аргумента, т. е. удовлетворяет начальным условиям.

Одним из методов решения дифференциальных уравнений является метод разделения переменных. Это метод, при котором одна переменная (искомая функция) записывается в левой части дифференциального уравнения, а все функции, содержащие переменную-параметр, записываются в правой части.

Дифференциальные уравнения можно интегрировать с помощью определенных и неопределенных интегралов.

Как известно, любое интегрирование совершается с точностью до некоторой постоянной величины – постоянной интегрирования.

При использовании неопределенного интеграла эта постоянная размещается в правой части решения. При использовании определённого интеграла постоянная интегрирования записывается в качестве нижнего предела интегрирования, определяющего значение соответствующего параметра в начале интервала интегрирования. Верхний предел интегрирования может быть постоянной или переменной величиной. И в том и в другом случае постоянные определяются по начальным значениям и искомых функций, т. е. по начальным условиям.

К дифференциальным уравнениям приводят многие задачи из механики, физики и других естественных наук, а также многие проблемы техники. В механике мы будем рассматривать дифференциальные уравнения движения, полученные из основного уравнения динамики (1.2.2).

В дифференциальных уравнениях движения (1.2.3), (1.2.4) или (1.2.7) и (1.2.8) в качестве независимой переменной принимают время t, отсчитываемое от момента t_0 начала наблюдения за исследуемым телом. Искомыми функциями уравнений (1.2.3) и (1.2.8) являются функции

$$\bar{r}(t), \qquad X = X(t), Y = Y(t), Z = Z(t),$$

искомыми функциями уравнений (1.2.4) и (1.2.7) – функции

$$\bar{V}(t), V_X = V_X(t),\; V_Y = V_Y(t),\; V_Z = V_Z(t).$$

Поскольку при интегрировании дифференциальных уравнений движения мы должны получить уравнения скорости (первый интеграл движения точки) и уравнения движения, определяющие ее положение в любой момент времен, то в начальных условиях при начальном значении параметра, мы должны знать скорость точки и ее координаты. Например, в случае прямолинейного движения точки начальное условие можем записать в виде

$$t = t_0,\ V_X(t_0) = V_{X0},\ X(t_0) = X_0.$$

В дифференциальных уравнениях (1.2.11), записанных в естественной форме, искомыми функциями будут – алгебраическое значение скорости $V(t)$ и дуговая координата $s(t)$. В этом случае начальные условия будут

$$t = t_0,\ V(t_0) = V_0,\ s(t_0) = s_0.$$

4.2. Вторая задача динамики (основная задача)

Предположим, что закон движения материальной точки не известен и разыскивается в векторной форме $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Тогда основное уравнение динамики (1.2.3):

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

содержащее наряду с неизвестной векторной функцией $\bar{r}(t)$ ее производные $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$ и $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, следует рассматривать как дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме.

Совокупность уравнений (1.2.7) и (1.2.8) называется системой дифференциальных уравнений движения материальной точки в декартовой системе осей координат в скалярной форме:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_X}{dt} = F_X, \\ m\dfrac{dV_Y}{dt} = F_Y, \\ m\dfrac{dV_Z}{dt} = F_Z, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} m\dfrac{d^2X}{dt^2} = F_X, \\ m\dfrac{d^2Y}{dt^2} = F_Y, \\ m\dfrac{d^2Z}{dt^2} = F_Z. \end{cases}$$

Вторая основная задача динамики состоит в том, что, зная массу материальной точки, силы, действующие на нее, а также ее начальное положение и начальную скорость имеется возможность найти кинематические уравнения движения материальной точки.

В дальнейшем будут рассматриваться различные случаи решения второй основной задачи динамики материальной точки, связанные с необходимостью интегрирования различных дифференциальных уравнений движения. То есть при заданных начальных условиях и функциях сил, действующих на точку, находится закон движения точки.

В общем случае равнодействующая $\bar{F}$ зависит от времени, положения точки и ее скорости. Поэтому правые части уравнений (1.2.3), (1.2.7) и (1.2.8) в общем случае могут являться функциями вида

$$F(t, \vec{r}, \vec{V}) \Leftrightarrow \begin{cases} F_X(t, X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z), \\ F_Y(t, X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z), \\ F_Z(t, X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z). \end{cases}$$

Нахождение кинематических уравнений движения материальной точки $X = X(t)$, $Y = Y(t)$, $Z = Z(t)$ сводится к интегрированию дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2X}{dt^2} = F_X(t, X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z), \\ m\dfrac{d^2Y}{dt^2} = F_Y(t, X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z), \\ m\dfrac{d^2Z}{dt^2} = F_Z(t, X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z). \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Совокупность уравнений (4.2.1) называется системой дифференциальных уравнений движения материальной точки в декартовой системе осей координат в скалярной форме. Интегрирование уравнений (4.2.1) приводит к уравнениям движения и скорости:

$$\begin{cases} X = X(t, C_1 ... C_6), \\ Y = Y(t, C_1 ... C_6), \\ Z = Z(t, C_1 ... C_6), \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} V_X = V_X(t, C_1 ... C_6), \\ V_Y = V_Y(t, C_1 ... C_6), \\ V_Z = V_Z(t, C_1 ... C_6). \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Из полученных уравнений следует, что под действием заданной силы точка может совершать целый класс различных движений, в зависимости от значений постоянных интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Из множества решений в уравнениях (4.2.2) выбирается одно, соответствующее заданным начальным условиям:

– время начала отсчета параметров движения $t = t_0$;

– начальное положение точки $X = X_0$, $Y = Y_0$, $Z = Z_0$;

– начальная скорость точки $V_X = V_{X_0}$, $V_Y = V_{Y_0}$, $V_Z = V_{Z_0}$.

По начальным условиям определяются постоянные интегрирования $C_1, C_2, ...C_6$. Подставляя начальные условия в решение дифференциальных уравнений, получим

$$C_k = f_k(t_0, X_0, Y_0, X_0, V_{X_0}, V_{Y_0}, V_{Z_0}), \quad (k = 1...6).$$

Заменив в полученных решениях (4.2.2) значение C_k их найденными значениями от начальных условий, получим решение второй основной задачи динамики.

При решении конкретных задач будем рассматривать частные случаи, в которых равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, может быть:

– постоянной величиной $\bar{F} = const$;

– функцией зависящей от времени $\bar{F} = \bar{F}(t)$;

– функцией зависящей от положения материальной точки $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}) = \bar{F}(X, Y, Z)$;

– функцией зависящей от скорости точки – $\bar{F} = \bar{F}(\bar{V}) = \bar{F}(V_X, V_Y, V_Z)$.

Примером постоянной силы может служить сила тяжести тела; примером силы, зависящей от времени $\bar{F}(t)$ может служить периодически изменяющаяся сила, вызывающая колебания (вибрации); примером силы, зависящей от положения точки $\bar{F}(\bar{r})$, является сила тяготения, или упругая сила пружины; примером сил, зависящих от скорости движения $\bar{F}(\bar{V})$, являются силы сопротивления среды (воздуха, воды и др.).

4.3. Прямолинейное движение точки под действием постоянной силы

Рассмотрим материальную точку, движущуюся по прямолинейной траектории $X = X(t)$, $Y = 0$, $Z = 0$ под действием постоянной силы $F_X = const$. В начальный момент времени $t_0 = 0$ заданы положение точки $X = X_0$ и ее скорость $V_X = V_{X_0}$. Требуется определить закон движения точки.

Из трех дифференциальных уравнений движения (4.2.2) воспользуемся одним:

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = F_X(t, X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z).$$

Здесь по условию задачи

$$F_X(t, X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z) = F_X = const,$$

поэтому

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = F_X.$$

Учитывая, что ускорение точки равно

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{dV_X}{dt},$$

получаем дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого позволяет определить закон изменения скорости точки (уравнение скорости – первый интеграл движения):

$$m\frac{dV_X}{dt} = F_X.$$

Решение дифференциального уравнения первого порядка получаем, используя метод разделения переменных V_X и t:

$$m \cdot dV_X = F_X dt.$$

Вычисляем неопределенные интегралы от правой и левой частей уравнения

$$\int dV_X = \frac{F_X}{m}\int dt,$$

добавляя к полученному решению неизвестную пока постоянную интегрирования C_1. Получаем уравнение скорости

$$V_X = \frac{F_X}{m}t + C_1. \tag{4.3.1}$$

Перепишем (4.3.1), учитывая, что $V_X = \dfrac{dX}{dt}$:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{F_X}{m} t + C_1.$$

Опять разделим переменные X и t:

$$dX = \frac{F_X}{m} t \cdot dt + C_1 \cdot dt.$$

Интегрируем правую и левую части уравнения, добавляя еще одну неизвестную постоянную интегрирования C_2. Получаем уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси OX:

$$X = \frac{F_X}{m}\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (4.3.2)$$

Постоянные C_1 и C_2 находим, решая систему двух алгебраических уравнений, полученных из уравнений (4.3.1) и (4.3.2), в которые подставлены заданные начальные условия:

$$\begin{cases} V_{X_0} = \dfrac{F_X}{m} t_0 + C_1, \\ X_0 = \dfrac{F_X}{m}\dfrac{t_0^2}{2} + C_1 t_0 + C_2. \end{cases}$$

Для $t_0 = 0$ имеем $C_1 = V_{X_0}$, $C_2 = X_0$.

В результате получаем равнопеременное прямолинейное движение материальной точки:

– уравнение скорости $V_X = \dfrac{F_X}{m} t + V_{X_0}$;

– уравнение движения $X = \dfrac{F_X}{m}\dfrac{t^2}{2} + V_{X_0} t + X_0$.

Пример 4.3.1. Свободное падение точки

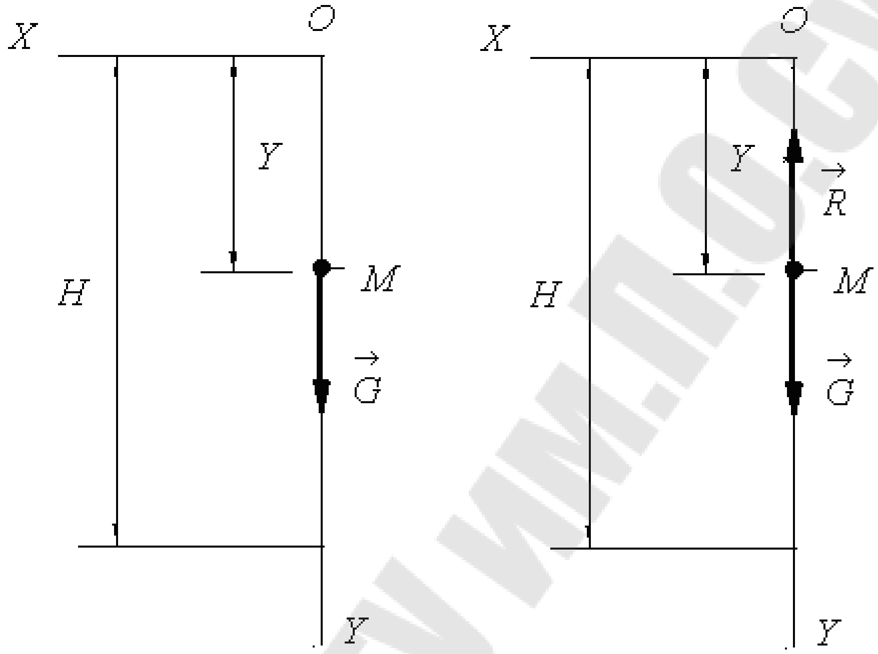
Точка M массой m падает с высоты H из состояния покоя под действием силы тяжести. Пренебрегая сопротивлением воздуха найти скорость $V(H)$ падения точки.

Решение

Выберем систему координат XOY. Принимаем, что начало координат совпадает с начальным положением материальной точки.

Ось OY направим вниз (рис. 4.3.1, *а*). В соответствии с выбранной системой отсчета для $t = t_0 = 0$ запишем начальные координаты точки: $Y_0 = Y$, $X_0 = 0$. Согласно условиям задачи, запишем также $\bar{V}_0 = 0$, или $V_{X_0} = 0, V_{Y_0} = 0$, $V_{Z_0} = 0$.

Изобразим на рисунке силу тяжести $\bar{G} = m\bar{g}$.



а *б*

Рис. 4.3.1

Составим в векторной форме дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{G}\cdot$$

Учитывая направление оси OY, перепишем это уравнение в координатной форме

$$m\frac{dV_Y}{dt} = mg\cdot$$

Следуя алгоритму, записанному в пункте 4.2 решаем уравнение:

$$\frac{dV_Y}{dt} = g, \quad dV_Y = g\cdot dt, \quad \int dV_Y = g\int dt,$$

$$V_Y = gt + C_1, \qquad C_1 = V_{Y_0} = 0.$$

Получаем первый интеграл (уравнение скорости): $V_Y = - gt$.

Далее представляем скорость в виде производной:

$$\frac{dY}{dt} = gt, \quad dY = gt \cdot dt, \quad \int dY = g\int dt,$$

$$Y = g\frac{t^2}{2} + C_2, \; C_2 = Y_0 = 0.$$

Получаем второй интеграл (уравнение движения):

$$Y = g\frac{t^2}{2}.$$

Чтобы найти скорость падения, в уравнение скорости надо подставить время $T(H)$, за которое точка пройдет путь H.

Время падения находим из уравнения движения, подставляя в него постоянные значения $Y = H$, $t = T(H)$ и получая квадратное уравнение

$$H = g\frac{T^2(H)}{2}.$$

Вычислив из последней формулы величину

$$T(H) = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

находим скорость точки в момент падения

$$V(H) = -\, gT(H).$$

Пример 4.3.2. Движение точки по наклонной плоскости

Материальную точку M, находящуюся в покое в положении M_0, толкнули вверх по наклонной плоскости со скоростью $\bar{V}_0$. Учитывая трение скольжения, требуется определить скорость точки M в момент прохождения точкой положения M_K. Заданы значения: $f_{тр}$– коэффициент трения скольжения; M_0M_K– расстояние, пройденное точкой; OM_0– начальное положение точки M, $\bar{V}_0$– начальная скорость.

Решение

Выбираем систему координат, направив ось OX вверх по наклонной плоскости и поместив начало координат в точку O.

Изображаем на рис. 4.3.2 точку M в произвольном положении на расстоянии X от начала координат и показываем все силы, действующие на точку (рис. 4.3.2).

$\bar{G}$ – сила тяжести; $\bar{F}_{тр}$ – сила трения; N – нормальная реакция.

Определяем сумму проекций этих сил на ось OX :

$$F_X = -F_{тр} - G\sin\alpha.$$

Так как $F_{тр} = Nf_{тр}$, $N = G\cos\alpha$, $G = mg$, имеем

$$F_X = -mg(f_{тр}\cos\alpha + \sin\alpha).$$

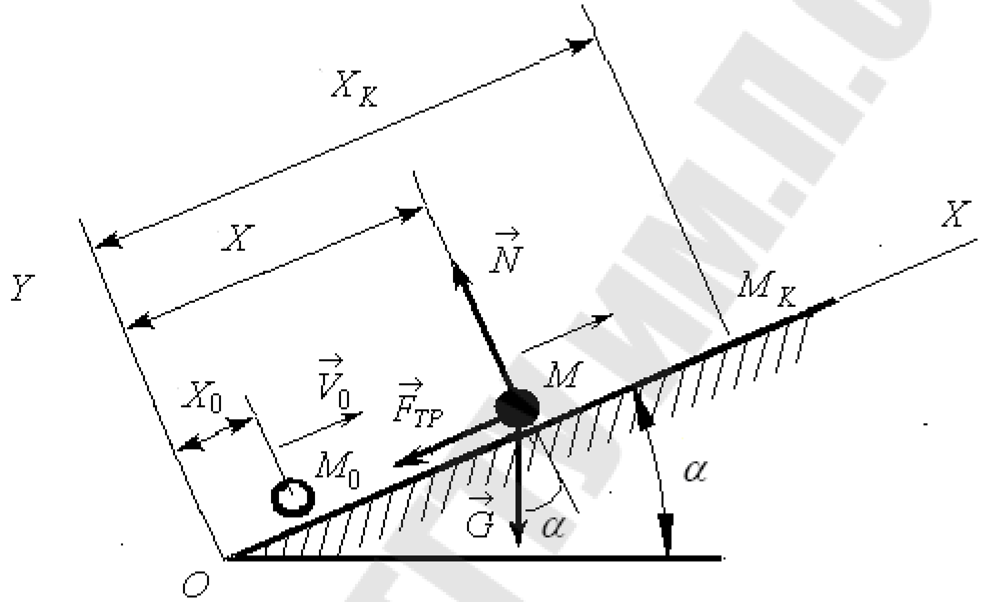


Рис. 4.3.2

Выписываем начальные условия: $t = t_0 = 0$, $V_{X_0} = V_0$, $X_0 = OM_0$.

Записываем дифференциальное уравнение движения и интегрируем его дважды:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_X}{dt} = F_X, \\ V_X = \dfrac{F_X}{m}t + V_{X_0} = -g(f_{тр}\cos\alpha + \sin\alpha)t + V_0, \\ X = -g(f_{тр}\cos\alpha + \sin\alpha)\dfrac{t^2}{2} + V_0 t + X_0. \end{cases}$$

Полученные уравнения скорости и движения превращаем в систему двух алгебраических уравнений, подставив в них вместо переменных X, V_X постоянные значения: $X = X_K$ -заданная координата точки в положении M_K; $V_X = V_K$ – неизвестная скорость точки в положении M_K;

$t = T_K$ – время движения точки до положения M_K.

$$\begin{cases} V_K = -g(f_{mp}\cos\alpha + \sin\alpha)T_K + V_0, \\ X_K = -g(f_{mp}\cos\alpha + \sin\alpha)\dfrac{T_K^2}{2} + V_0 T_K + X_0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, сначала из квадратного уравнения

$$g(f_{mp}\cos\alpha + \sin\alpha)\frac{T_K^2}{2} - V_0 T_K + (X_K - X_0) = 0$$

находим время T_K, затем вычисляем скорость V_K. Решая квадратное уравнение, выбираем положительное решение.

4.4. Криволинейное движение точки под действием постоянной силы

Рассмотрим материальную точку M, движущуюся по плоской криволинейной траектории под действием постоянной силы $\bar{F} = const$, ($F_X = const$, $F_Y = const$) (рис. 4.4.1). Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ заданы положение точки $X = X_0$ $Y = Y_0$, и ее скорость $V_X = V_{X_0}$, $V_Y = V_{Y_0}$. Требуется определить закон движения точки $X = X(t)$, $Y = Y(t)$.

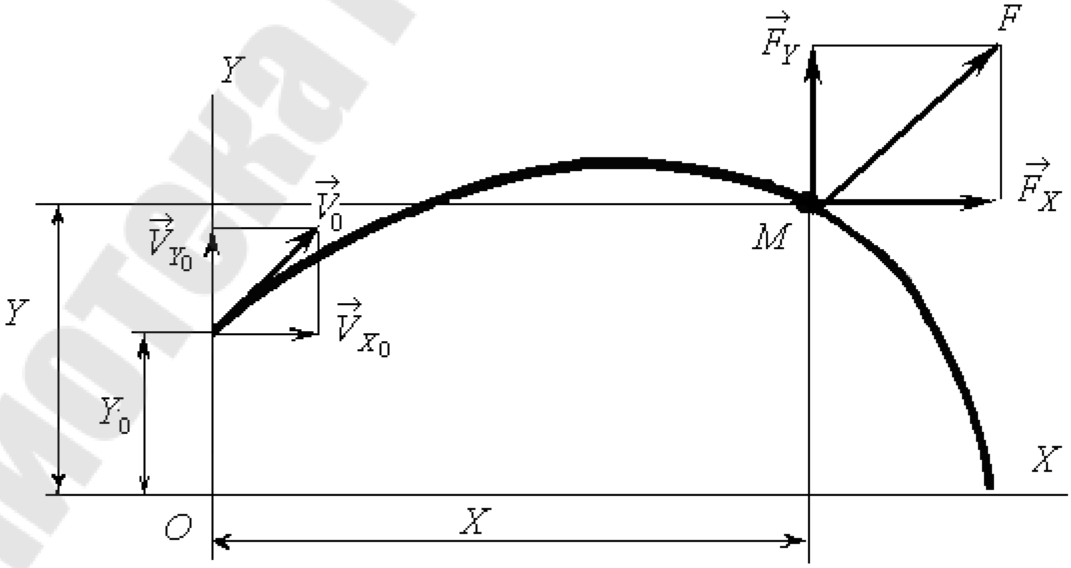


Рис. 4.4.1

Из трех дифференциальных уравнений движения (4.2.1) воспользуемся двумя уравнениям:

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=F_X, \qquad m\frac{d^2Y}{dt^2}=F_Y. \qquad .$$

Здесь по условию задачи правые части дифференциальных уравнений – постоянные величины. Поэтому для решения каждого уравнения применяем известный алгоритм для прямолинейного движения точки под действием постоянной силы.

В результате получаем систему четырех уравнений:

$$\begin{cases} V_X=\dfrac{F_X}{m}t+V_{X_0}, \\ X=\dfrac{F_X}{m}\dfrac{t^2}{2}+V_{X_0}t+X_0, \\ V_Y=\dfrac{F_Y}{m}t+V_{Y_0}, \\ Y=\dfrac{F_Y}{m}\dfrac{t^2}{2}+V_{Y_0}t+Y_0. \end{cases}$$

Подставляя в эти уравнения вместо переменных V_X, V_Y, X, Y и t их постоянные значения V_{XK}, V_{YK}, X_K, Y_K и T_K для какого-то заданного положения точки M_K, получаем систему четырех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} V_{XK}=\dfrac{F_X}{m}T_K+V_{X_0}, \\ X_K=\dfrac{F_X}{m}\dfrac{T_K^2}{2}+V_{X_0}T_K+X_0, \\ V_{YK}=\dfrac{F_Y}{m}T_K+V_{Y_0}, \\ Y_K=\dfrac{F_Y}{m}\dfrac{T_K^2}{2}+V_{Y_0}T_K+Y_0. \end{cases}$$

Эта система уравнений может быть решена относительно любых четырех параметров движения точки. Например, надо вычислить значения величин T_K, V_{X_0}, F_Y и F_X. Для решения такой задачи остальные параметры, входящие в систему уравнений, должны быть заданы.

Пример 4.4.1. Движение точки, брошенной под углом к горизонту

Материальная точка M с массой m брошена со скоростью $\bar{V}_0$ под углом α к горизонту (рис. 4.4.2). Определить траекторию движения точки, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Решение

Рассмотрим точку в произвольном положении и составим дифференциальные уравнения движения. На точку действует только одна сила – сила тяжести $\bar{G} = m\,\bar{g}$, поэтому дифференциальные уравнения примут вид

$$m\frac{dV_X}{dt} = F_X, \qquad m\frac{dV_Y}{dt} = F_Y \cdot$$

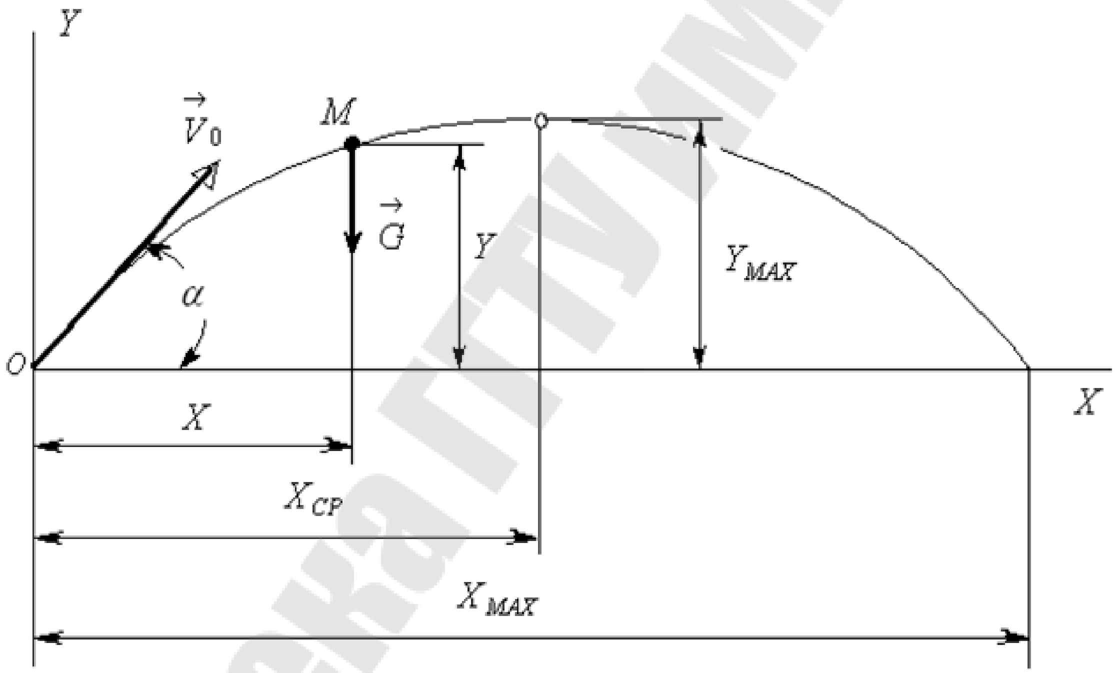


Рис. 4.4.2

Так как $F_X = 0$, $F_Y = - mg$,

то $m\dfrac{dV_X}{dt} = 0$ и $m\dfrac{dV_Y}{dt} = -mg \cdot$

Сокращая на постоянный множитель m, получаем

$$\frac{dV_X}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dV_Y}{dt} = -g \cdot$$

Интегрируем эти уравнения первый раз:

$$V_X = C_1, \qquad V_Y = -gt + C_2. \tag{1}$$

Интегрируем второй раз:

$$X = C_1 t + C_3, \quad Y = -g\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_4. \tag{2}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования. Для их определения используем начальные условия данной задачи.

Так как точка M начинает двигаться из начала координат, то при $t = t_0 = 0$ точка по условию задачи имеет координаты $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$.

Кроме того, нам известны начальная скорость точки V_0 и ее направление — угол α следовательно, при $t = t_0 = 0$ имеем

$$V_{X_0} = V_0 \cos\alpha \qquad \text{и} \qquad V_{Y_0} = V_0 \sin\alpha.$$

Подставив $t = 0$ сначала в уравнения (1), а затем в уравнения (2), получим

$$\begin{cases} C_1 = V_{X_0} = V_0 \cos\alpha, \\ C_2 = V_{Y_0} = V_0 \sin\alpha, \\ C_3 = X_0 = 0, \\ C_4 = Y_0 = 0. \end{cases}$$

Окончательно получим уравнения движения :

$$X = V_0 t \cos\alpha \qquad \text{и} \qquad Y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin\alpha.$$

Исключим из этих уравнений время t: из первого уравнения находим

$$t = \frac{X}{V_0 \cos\alpha}$$

и подставим его во второе:

$$Y = -\frac{g\left(\dfrac{X}{V_0 \cos\alpha}\right)^2}{2} + V_0\left(\frac{X}{V_0 \cos\alpha}\right)\sin\alpha.$$

Получаем уравнение параболы

$$Y = -\frac{gX^2}{2(V_0 \cos\alpha)^2} + X \cdot tg\alpha.$$

Следовательно, тело, брошенное под углом к горизонту под действием силы тяжести, движется по параболической траектории.

Найденные уравнения движения могут быть использованы для определения некоторых параметров траектории. Пусть, например, требуется определить наибольшую дальность полета брошенного тела. Как следует из рис. 4.4.2, в тот момент, когда точка удалится от начала координат на максимальное расстояние, она будет находиться на оси X и значение Y при этом обратится в нуль. Приравниваем нулю значение Y:

$$Y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin\alpha = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем два корня:

$$t_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad t_2 = 2\frac{V_0 \sin\alpha}{g}.$$

Первый корень соответствует начальному положению точки, второй – конечному положению, т. е. t_2 – время полета точки. Подставив значение t_2 в уравнение для X_0 получим

$$X_{\max} = \frac{2V_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Это и будет максимальная дальность полета.

Так как парабола симметрична, то значение максимальной высоты полета точки соответствует середине параболы, т. е. значению

$$X_{cp} = \frac{X_{\max}}{2} = \frac{V_0^2}{2g}\sin 2\alpha.$$

Тогда

$$Y_{\max} = -\frac{g(X_{cp})^2}{2(V_0\cos\alpha)^2} + X_{cp}\cdot tg\alpha.$$

Пример 4.4.2. Движение тела, брошенного с высоты

Вертолет летит над поверхностью земли с горизонтальной скоростью V_X км/час. Сброшенный с вертолета без относительной скорости груз падает на поверхность земли на расстоянии $OC = X_{\max}$ (рис. 4.4.3).Определить высоту $Y_{\max}$ дирижабля над землей. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Решение

При отсутствии сопротивления воздуха на груз действует только одна сила тяжести $\bar{G}$.

Дифференциальные уравнения движения груза имеют вид:

$$m\ddot{X} = 0, \qquad m\ddot{Y} = -G.$$

Поскольку движение происходит только в вертикальной плоскости, третье уравнение не пишется.

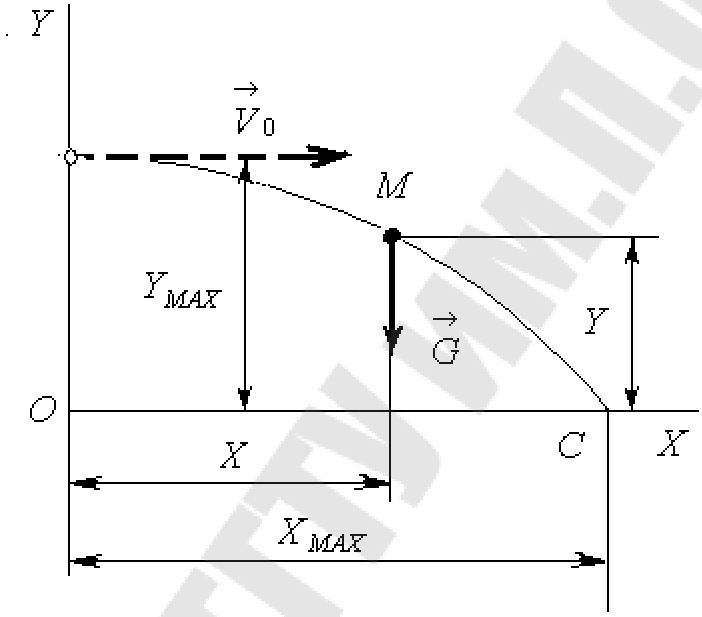


Рис. 4.4.3

После сокращения на массу тела, получим

$$\ddot{X} = 0, \qquad \ddot{Y} = -g.$$

Перепишем уравнения в виде дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dV_X}{dt} = 0, \quad \frac{dV_Y}{dt} = -g.$$

Интегрируя дифференциальные уравнения первый раз, получаем уравнения скорости:

$$V_X = C \qquad \text{и} \qquad V_Y = -gt + C_2.$$

Интегрируя второй раз, получаем уравнения движения:

$$X = C_1 t + C_3 \qquad \text{и} \qquad Y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_2 t + C_4.$$

Определим постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4.

По условиям примера для $t = t_0 = 0$ запишем начальные координаты и скорость падающего груза:

$$X_0 = 0,\ \dot{X}_0 = V_0,\ Y_0 = Y_{\max},\ \dot{Y}_0 = 0.$$

Подставим в уравнения скорости и уравнения движения начальные условия:

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = V_0 = C_1, \\ \dot{Y}_0 = -gt_0 + C_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} X_0 = C_1 t_0 + C_3, \\ Y_0 = -\dfrac{1}{2} g t_0^2 + C_2 t_0 + C_4. \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$\begin{cases} C_1 = V_0, \\ C_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_3 = 0, \\ C_4 = Y_{\max}. \end{cases}$$

Таким образом, решения дифференциальных уравнений имеют вид

$$\begin{cases} V_X = V_0, \\ X = V_0 t, \\ V_Y = -gt, \\ Y = -\dfrac{1}{2} g t^2 + Y_{\max}. \end{cases} \tag{1}$$

Для определения высоты полета дирижабля используем из четырех уравнений только два:

$$X = V_0 t \quad \text{и} \quad Y = -\frac{1}{2} g t^2 + Y_{\max}.$$

По условию груз упал на расстоянии $OC = X_{\max}$. Подставив это значение во второе уравнение системы (1), получим время T, в течение которого падал груз:

$$X_{\max} = V_0 T \Rightarrow T = \frac{X_{\max}}{V_0}.$$

Высоту, на которой летит вертолет, определим из четвертого уравнения системы (1), подставив в него $T_{пад}$ и $Y = Y_C = 0$, $y = 0$, так как при падении на землю ордината груза равна нулю. Тогда

$$\begin{cases} Y_C = -\frac{1}{2} gT^2 + Y_{\max}, \\ 0 = -\frac{1}{2} gT^2 + Y_{\max}, \\ Y_{\max} = \frac{1}{2} gT^2. \end{cases}$$

Пример 4.4.3. Математический маятник и его малые колебания

Напомним, что математическим маятником называется материальная точка M, подвешенная на нерастяжимой нити, совершающая движения в одной вертикальной плоскости под действием сил тяжести.

Требуется найти натяжение нити, уравнение скорости и уравнение движения маятника длинной L и массой m.

Решение

Изобразим на рис. 4.4.4 математический маятник в произвольном положении, т. е. отклоненном от положения равновесия, точки O, на произвольный угол α Величина $\alpha = \alpha(t)$ является дуговой координатой, закон изменения которой надо найти.

Так как траектория точки задана и является дугой окружности радиуса L, выбираем для решения плоскую систему естественных осей координат τMn, имеющих начало в движущейся точке M.

Решение

На точку M действуют постоянная сила тяжести $\bar{G} = m\bar{g}$ и сила натяжения нити $\bar{N}$ (реакция связи), зависящая от положения маятника.

Равнодействующую сил, приложенных к точке, раскладываем на составляющие, параллельные выбранным осям координат:

$$\bar{F} = \bar{G} + \bar{N} = F_\tau \bar{\tau} + F_n \bar{n},$$

$$F_\tau = - mg \cdot \sin\alpha(t), \qquad F_n = N - mg \cdot \cos\alpha(t).$$

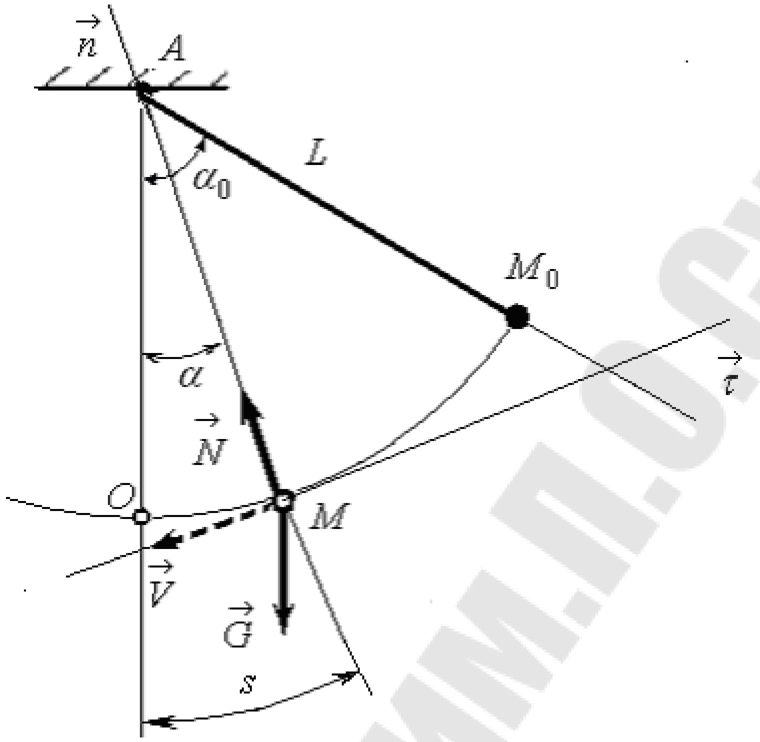


Рис. 4.4.4

Запишем дифференциальные уравнения движения в естественных координатах:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2} = F_\tau, \\ m\dfrac{V^2}{L} = F_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2} = -mg\cdot\sin\alpha(t), \\ m\dfrac{V^2}{L} = N - mg\cdot\cos\alpha(t). \end{cases}$$

Дуговую координату точки s выразим через амплитуду колебаний: $s = L\alpha$.

Тогда

$$\frac{ds}{dt} = L\frac{d\alpha}{dt} \text{ и } \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Здесь

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha = \omega \text{ – угловая скорость нити } AM;$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\vec{\alpha}} = \varepsilon \text{ – угловое ускорение нити } AM.$$

Представим линейную скорость точки M как функцию угловой скорости $V = L\omega = L\dot{\alpha}$, а касательное ускорение как

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = L\ddot{\alpha} = L\varepsilon.$$

Перепишем дифференциальные уравнения движения в угловых переменных:

$$\begin{cases} mL\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\cdot\sin\alpha(t), \\ m\dfrac{(L\dot{\alpha})^2}{L} = N - mg\cdot\cos\alpha(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = -\dfrac{g}{L}\cdot\sin\alpha(t), \\ N = m\left(g\cdot\cos\alpha(t) + L(\dot{\alpha})^2\right) \end{cases}$$

Здесь первое уравнение называется дифференциальным уравнением математического маятника:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

Его решение определяет закон движения маятника $\alpha = \alpha(t)$.

Вторая формула:

$$N = G\cdot\cos\alpha(t) + mL\omega^2,$$

определяет реакцию нити, зависящей от амплитуды и угловой скорости маятника.

Если учесть, что центробежная (нормальная) сила инерции маятника равна $\Phi_n = -mL\omega^2$, то

$$N = G\cdot\cos\alpha(t) - \Phi_n = m(g\cdot\cos\alpha(t) - L\omega^2).$$

Для решения уравнения (1) введем обозначения

$$k^2 = \frac{g}{L}, \quad k = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Перепишем уравнение (1):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k^2\sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

Проведем преобразования

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega\cdot d\omega}{d\alpha};$$

$$\omega\frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} = -k^2\sin\alpha. \qquad (3)$$

$$\omega\cdot d\omega = -k^2\sin\alpha\cdot d\alpha, \quad \int\omega\cdot d\omega = -k^2\int\sin\alpha\cdot d\alpha,$$

$$\frac{\omega^2}{2} = k^2\cos\alpha + C_1.$$

Подставляем начальные условия $\alpha = \alpha_0$, $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$ и находим постоянную интегрирования:

$$\frac{\omega_0^2}{2} = k^2\cos\alpha_0 + C_1, \qquad C_1 = \frac{\omega_0^2}{2} - k^2\cos\alpha_0.$$

Находим теперь угловую скорость, силу инерции и реакцию нити:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2k^2(\cos\alpha - \cos\alpha_0),$$

$$\Phi_n = -mL\left(\omega_0^2 + 2k^2(\cos\alpha - \cos\alpha_0)\right),$$

$$N = mg\cdot\cos\alpha(t) + mL\left(\omega_0^2 + 2k^2(\cos\alpha(t) - \cos\alpha_0)\right).$$

Однако в последнем уравнении неопределена амплитуда $\alpha(t)$.

Для ее определения применяем метод разделения переменных:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2k^2(\cos\alpha - \cos\alpha_0)};$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\omega_0^2 + 2k^2(\cos\alpha - \cos\alpha_0)};$$

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 + 2k^2(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}} = dt;$$

$$\int\frac{d\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 + 2k^2(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}} = \int dt. \qquad (4)$$

Полученное уравнение (4) не относится к числу элементарных интегралов. Для его решения необходимо провести достаточное количество преобразований, которые выходят за рамки нашего курса.

На данном примере показано, что метод разделения переменных в дифференциальных уравнениях не всегда приводит к простейшим решениям с использованием элементарных интегралов. Для решения дифференциальных уравнений движения существуют и другие методы, например, метод характеристического уравнения, который мы рассмотрим в следующей главе.

Чтобы найти $\alpha = \alpha(t)$ упростим задачу и будем рассматривать только малую амплитуду математического маятника, для которой угол $\alpha(t) \approx \sin\alpha(t)$.

Тогда упрощается дифференциальное уравнение (2):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k^2\alpha = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\ddot{\alpha} + k^2\alpha = 0.$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением малых колебаний математического маятника*.

Его решение ищется в виде

$$\alpha = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt).$$

Производная от этого уравнения определяет закон изменения угловой скорости:

$$\dot{\alpha} = -kC_1\sin(kt) + kC_2\cos(kt).$$

Чтобы найти постоянные интегрирования, в полученные решения подставляем начальные условия: $t = t_0 = 0, \alpha = \alpha_0$, $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$.

Получаем систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0 = C_1\cos(kt_0) + C_2\sin(kt_0), \\ \omega_0 = -kC_1\sin(kt_0) + kC_2\cos(kt_0), \end{cases} \text{ если } t_0 = 0, \text{ то } \begin{cases} \alpha_0 = C_1, \\ \omega_0 = kC_2. \end{cases}$$

Учитывая вычисленные постоянные, окончательно получаем уравнение малых колебаний математического маятника и уравнение его скорости:

$$\alpha(t) = \alpha_0\cos(kt) + \frac{\dot{\alpha}_0}{k}\sin(kt) \quad \text{и} \quad \dot{\alpha}(t) = -k\alpha_0\sin(kt) + \dot{\alpha}_0\cos(kt).$$

Здесь k – частота колебаний, $[k] = \left(\frac{\text{м/с}}{\text{м}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$.

Период малых колебаний математического маятника равен:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

4.5. Движение точки под действием силы, зависящей от времени

Пусть к материальной точке M приложена сила, которая является функцией времени $\bar{F} = \bar{F}(t)$. Запишем в векторном виде дифференциальное уравнение движения точки и рассмотрим алгоритм его решения:

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = \vec{F}(t).$$

Разделим переменные t и $\bar{V}$. Для удобства решения величину m перенесем в правую часть уравнения и возьмем неопределенные интегралы от каждой части дифференциального уравнения:

$$d\bar{V} = \frac{1}{m}\bar{F}(t)dt, \qquad \int d\vec{V} = \frac{1}{m}\int \vec{F}(t)dt \cdot$$

Так как функция $\bar{F} = \bar{F}(t)$ в каждой конкретной задаче имеет определенную зависимость от времени t, решение представим в общем виде.

Обозначим вычисленный интеграл $\int \bar{F}(t)dt$ новой функцией

$$\int \bar{F}(t)dt = \bar{F}_1(t).$$

Тогда получаем первый интеграл движения – уравнение скорости:

$$\vec{V} = \frac{1}{m}\vec{F}_1(t) + \vec{C}_1.$$

Далее, как нам уже известно, интегрируем уравнение скорости. Учитывая, что

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

последовательно получаем

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}_1(t) + \vec{C}_1, \qquad d\vec{r} = \frac{1}{m}\vec{F}_1(t)dt + \vec{C}_1\,dt,$$

$$d\vec{r} = \frac{1}{m}\int \vec{F}_1(t)dt + \vec{C}_1\int dt.$$

Вычисленный интеграл $\int \bar{F}_1(t)dt$, как и раньше, обозначаем новой функцией $\int \bar{F}_1(t)dt = \bar{F}_2(t)$. Получаем второй интеграл – уравнение движения в векторном виде:

$$\vec{r} = \frac{1}{m}\vec{F}_2(t) + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2 .$$

Здесь $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M.

Так как решение записано в векторном виде, то постоянные интегрирования $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ также являются векторными величинами. Как известно, они определяются по начальным условиям:

$$\begin{cases} t = t_{0,} \\ \vec{V} = \vec{V}_{0}, \\ \vec{r} = \vec{r}_{0}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_0 = \dfrac{1}{m}\vec{F}_1(t_0) + \vec{C}_{1,} \\ \vec{r}_0 = \dfrac{1}{m}\vec{F}_2(t_0) + \vec{C}_1 t_0 + \vec{C}_{2.} \end{cases}$$

В результате имеем

$$\vec{C}_1 = \vec{V}_0 - \frac{1}{m}\vec{F}_1(t_0) \quad \text{и} \quad \vec{C}_2 = \vec{r}_0 - \vec{C}_1 t_0 - \frac{1}{m}\vec{F}_2(t_0).$$

Если $t_0 = 0$, то

$$\vec{C}_2 = \vec{r}_0 - \frac{1}{m}\vec{F}_2(t_0).$$

Пример 4.5.1. Криволинейное движение точки под действием силы, зависящей от времени

На точку M массой m действует горизонтальная сила $\bar{F}$, параллельная оси OX и имеющая величину $F = F_0 \cos(\alpha \cdot t)$..

Определить движение точки M в горизонтальной плоскости, если в начальный момент скорость $\bar{V}_0$ точки перпендикулярна к направлению силы $\bar{F}$ (рис. 4.5.1).

Решение

Выберем систему координат XOY,запишем для нее начальные условия и проекции силы:

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad V_{X_0} = 0, \quad V_{Y_0} > 0$$

$$\begin{cases} F_X = F_0 \cos(\omega \cdot t), \\ F_Y = 0. \end{cases}$$

Составим дифференциальные уравнения:

$$m\frac{dV_X}{dt} = F_X \Rightarrow \frac{dV_X}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega \cdot t) \text{ и } m\frac{dV_Y}{dt} = F_Y \Rightarrow \frac{dV_Y}{dt} = 0. \quad (1)$$

Интегрируем первое дифференциальное уравнение и находим уравнение скорости:

$$dV_X = \frac{1}{m}F_X dt, \qquad dV_X = \frac{F_0}{m}\cos(\omega \cdot t)dt, \quad \int dV_X = \frac{F_0}{m}\int \cos(\omega \cdot t)dt,$$

$$V_X = \frac{F_0}{m \cdot \alpha}\sin(\omega \cdot t) + C_1.$$

По начальным условиям находим постоянную интегрирования:

Для $t = t_0 = 0$ запишем

$$V_{X_0} = \frac{F_0}{m \cdot \alpha}\sin(\omega \cdot t_0) + C_1.$$

Так как $V_{X_0} = 0 \quad \sin(\alpha \cdot t_0)=0,$ то $\quad C_1 = 0.$

Получаем уравнение проекции скорости на ось OX:

$$V_X = \frac{F_0}{m \cdot \alpha}\sin(\omega \cdot t). \quad (2)$$

Для нахождения уравнения движения для оси OX интегрируем уравнение (2):

$$V_X = \frac{dX}{dt}, \qquad \frac{dX}{dt} = \frac{F_0}{m \cdot \alpha}\sin(\omega \cdot t), \qquad dX = \frac{F_0}{m \cdot \alpha}\sin(\omega \cdot t) \cdot dt,$$

$$\int dX = \frac{F_0}{m \cdot \alpha}\int \sin(\omega \cdot t) \cdot dt.$$

Получаем

$$X = -\frac{F_0}{m \cdot \alpha^2}\cos(\omega \cdot t) + C_2. \quad (3)$$

Для определения постоянной интегрирования в уравнение (3) подставляем начальные параметры:

$$X_0 = -\frac{F_0}{m \cdot \alpha^2}\cos(\omega \cdot t_0) + C_2 \Rightarrow X_0 = -\frac{F_0}{m \cdot \alpha^2} + C_2,$$

$$C_2 = X_0 + \frac{F_0}{m \cdot \alpha^2}.$$

С учетом C_2 из уравнения (3) получаем

$$X = -\frac{F_0}{m\cdot^{2}}\cos(\omega\cdot t) + \left(X_0 + \frac{F_0}{m\cdot\omega^2}\right).$$

Или $\quad X = \frac{F_0}{m\cdot\alpha^2}\left(1-\cos(\omega\cdot t)\right) + X_0. \qquad (4)$

Так как $X_0 = 0$, то уравнение (4) принимает окончательный вид

$$X = \frac{F_0}{m\cdot\alpha^2}\left(1-\cos(\omega\cdot t)\right). \qquad (5)$$

Интегрируем теперь второе дифференциальное уравнение (1):

$$V_Y = const = C_3 = \ C_3 = V_{Y_0}.$$

Так как

$$V_Y = \frac{dY}{dt}, \quad \text{то}$$

$$\frac{dY}{dt} = V_{Y_0}, \qquad dY = V_{Y_0}dt, \qquad \int dY = V_{Y_0}\int dt.$$

Получаем уравнение движения с неопределенной постоянной интегрирования:

$$Y = V_{Y_0}t + C_4. \qquad (6)$$

Подставим в уравнение (6) начальные условия:

$$t = t_0 = 0, \qquad Y = Y_0 = 0, \qquad Y_0 = V_{Y_0}t_0 + C_4 = \ C_4 = 0.$$

Получаем уравнение движения для оси OY:

$$Y = V_{Y_0}t. \qquad (7)$$

Находим уравнение траектории точки. Из уравнения (7) выражаем время

$$t = \frac{Y}{V_{Y_0}}$$

и подставляем его в уравнение (5). Получаем уравнение траектории точки (рис. 4.5.1):

$$X = \frac{F_0}{m\cdot\omega^2}\left(1-\cos(\omega\frac{Y}{V_{Y_0}})\right).$$

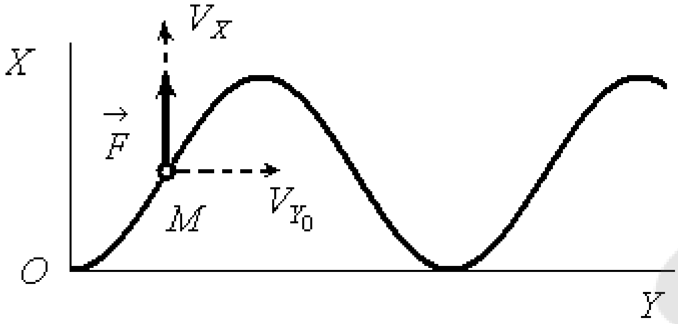


Рис. 4.5.1

4.6. Движение точки под действием силы, зависящей от скорости

Примером силы, зависящей от скорости точки, может служить сила сопротивления среды, в которой находится точка (воздух, жидкость). Запишем в векторном виде дифференциальное уравнение движения для такого случая:

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = \vec{F}(\vec{V}).$$

Это уравнение решаем методом разделения переменных:

$$m\frac{d\vec{V}}{\vec{F}(\vec{V})} = dt, \qquad \frac{d\vec{V}}{\vec{F}(\vec{V})} = \frac{dt}{m}, \qquad \int\frac{d\vec{V}}{\vec{F}(\vec{V})} = \frac{1}{m}\int dt. \tag{4.6.1}$$

Вычисляем интеграл $\int\frac{d\bar{V}}{\vec{F}(\vec{V})}$ и обозначаем его решение новой функцией $\left[\int\frac{d\vec{V}}{\vec{F}(\vec{V})}\right] = \vec{F}_1(\vec{V})\cdot.$

Из уравнений (4.6.1) получаем уравнение скорости точки в неявном виде:

$$\vec{F}_1(\vec{V}) = \frac{t}{m} + C_1 \cdot$$

Чтобы найти уравнение движения точки, т. е. функцию $\bar{r} = \bar{r}(t)$, необходимо, зная в конкретной задаче функцию $\bar{F}_1(\bar{V})$, выразить скорость как функцию времени $\bar{V} = \bar{V}(t)$, после чего решать дифференциальное уравнение $\vec{V}(t) = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$.

Пример 4.6.1. Падение материальной точки с учетом силы сопротивления воздуха

Сохраняя условия примера 4.3.1, определить закономерность изменения скорости точки, учитывая силу сопротивления воздуха, линейно зависящую от скорости (рис. 4.3.1, *б*).

Решение задачи будем искать в системе координат, выбранной для решения примера 4.3.1.

Оставляя прежними начальные условия $Y_0 = Y$, $X_0 = 0$ и $\bar{V}_0 = 0$, изобразим на рис. 4.6.1 силы, действующие на точку:

$\bar{G} = m\bar{g}$ – сила тяжести;

$\bar{R} = -\alpha\bar{V}$ – сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости точки и направленная против вектора скорости (α – коэффициент, учитывающий сопротивление среды).

Составим векторное дифференциальное уравнение движения:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{G} + \vec{R}\cdot$$

Перепишем уравнение в координатной форме:

$$m\frac{dV_Y}{dt} = mg - \alpha V_Y\cdot$$

Разделим обе части уравнении на m и получим

$$\frac{dV_Y}{dt} = g - kV_Y\cdot$$

Здесь $k = \dfrac{\alpha}{m}\cdot$

Разделим переменные

$$\frac{dV_Y}{g - kV_Y} = dt.$$

Интегрирование выполняем методом замены:

$$u = g - kV_Y, \quad du = -kdV_Y, \quad dV_Y = -\frac{du}{k}\cdot$$

Получаем

$$-\frac{du}{ku} = dt, \quad \text{или,} \quad \int \frac{du}{u} = -k\int dt,$$

$$\ln u = -kt + C_1, \text{ или } \ln(g - kV_Y) = -kt + C_1.$$

По начальным условиям найдем постоянную интегрирования:

$$\ln(g - kV_{Y_0}) = -kt_0 + C_1.$$

Для $t_0 = 0$ и $V_{Y_0} = 0$ получаем $\ln g = + C_1$.

Находим теперь зависимость скорости от времени:

$$\ln(g - kV_{Y_0}) = -kt_0 + \ln g.$$

Потенцируем это выражение

$$\frac{g - kV_Y}{g} = \exp(-kt), \qquad \text{или} \qquad 1 - V_Y\frac{k}{g} = \exp(-kt).$$

Находим уравнение скорости точки:

$$V_Y = g\frac{1 - \exp(-kt)}{k}, \text{ или } \quad V_Y = \frac{g}{k}(1 - \exp(-kt)). \qquad (1)$$

По интегральная кривой (рис. 4.6.1) видим, что скорость точки при больших значениях ($t = \infty$) принимает постоянное (предельное) значение.

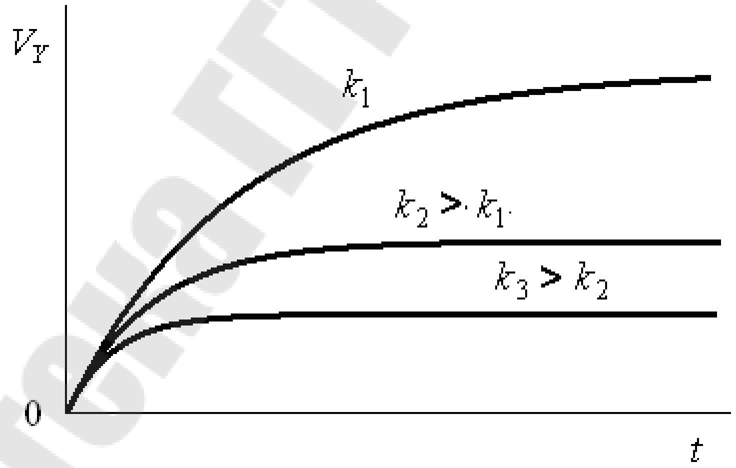


Рис. 4.6.1

Предельное значение скорости для различных значений $k_1 < k_2 < k_3$ можем определить из уравнения (1) при $t \to \infty$. В этом случае имеем $\exp(-kt) \to 0$, и, следовательно:

$$V_{\text{пр}} = \frac{g}{k}.$$

Следовательно, материальная точка, сброшенная с большой высоты и имеющая запас времени, приземляется с постоянной скоростью $V_{пр}$ (например, парашютист). При $V_Y = V_{пр}$ модуль силы сопротивления равен силе тяжести точки, так как

$$R = \alpha \cdot V_{\text{пр}} = km\frac{g}{k} = mg.$$

Пример 4.6.2. Движение точки в среде с вязким сопротивлением

Для снижения скорости на глиссере выключили двигатель при скорости $\bar{V}_0$ м/с. При торможении на глиссер действует сила сопротивления $\bar{R}$, пропорциональная квадрату скорости $R = kV^2$, где k – постоянный коэффициент, его размерность $[k]$=сила/скорость^2. Определить через какое время T после начала торможения скорость глиссера уменьшится вдвое ($V_T = \frac{1}{2}V_0$) и какое расстояние X_T пройдет глиссер за это время.

Решение

Направим ось OX вдоль движения глиссера, выбрав начало координат в положении глиссера, соответствующем моменту выключения двигателя (рис. 4.6.2).

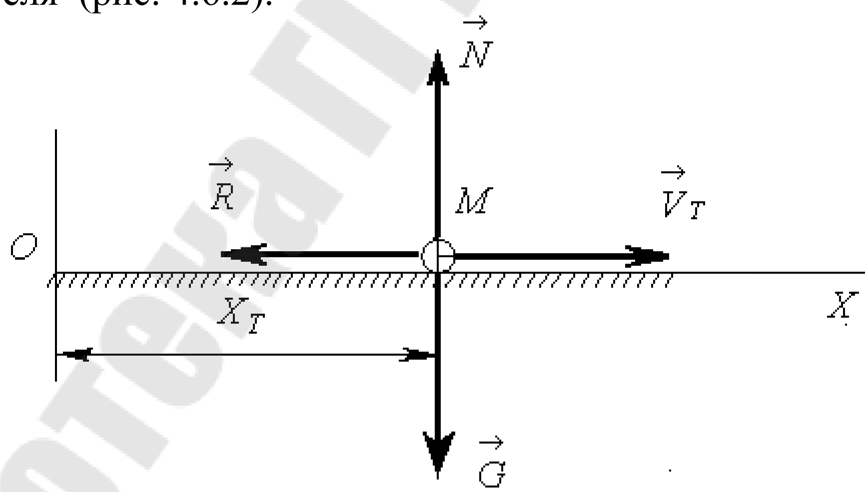


Рис. 4.6.2

Напишем дифференциальное уравнение движения для оси OX. Так как траектория движения горизонтальна, то сила тяжести и вертикальная составляющая реакции поверхности воды не войдут в дифференциальное уравнение движения:

$$m\ddot{X} = -R_X.$$

Учитывая, что $R_X = kV_X^2$ и $\ddot{X} = \frac{dV_X}{dt}$, получим

$$m\frac{dV_X}{dt} = -kV_X^2 \Rightarrow \frac{dV_X}{dt} = -\frac{k}{m}V_X^2.$$

Разделим переменные V_X и t:

$$\frac{dV_X}{V_X^2} = -\frac{k}{m}dt.$$

Интегрируем

$$\int\frac{dV_X}{V_X^2} = -\frac{k}{m}\int dt \Rightarrow \frac{1}{V_X} = \left(\frac{k}{m}t + C_1\right).$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальному условию: при $t = t_0 = 0$ скорость равна $V_X = V_0$:

$$\frac{1}{V_0} = \frac{k}{m}t_0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{V_0}\cdot$$

Получаем окончательно уравнение скорости

$$\frac{1}{V_X} = \frac{k}{m}t + \frac{1}{V_0}.$$

Для определения отрезка времени T подставим в уравнение скорости заданные значения $V_T = \frac{V_0}{2}$ и $t = T$:

$$\frac{2}{V_0} = \frac{k}{m}T + \frac{1}{V_0} \Rightarrow T = \frac{m}{kV_0}.$$

Чтобы определить путь X_T, пройденный судном за время T, выразим V_X как функцию t:

$$\frac{1}{V_X} = \frac{k}{m}t + \frac{1}{V_0}, \qquad \frac{1}{V_X} = \frac{V_0kt + m}{mV_0}, \qquad V_X = \frac{mV_0}{V_0kt + m}.$$

Так как

$$V_X = \frac{dX}{dt},$$

то

$$\frac{dX}{dt} = \frac{mV_0}{V_0kt + m}, \quad dX = \frac{mV_0}{V_0kt + m}dt, \quad dX = \frac{mV_0}{V_0k}\frac{dt}{t + \frac{m}{V_0k}},$$

$$dX = \frac{m}{k}\frac{dt}{\left(t + \frac{m}{V_0 k}\right)}, \qquad \int dX = \frac{m}{k}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{m}{V_0 k}\right)}.$$

Обозначим $u = \left(t + \frac{m}{V_0 k}\right)$, тогда $du = dt$.

Получаем $X = \frac{m}{k}\int \frac{du}{u} = \frac{m}{k}\ln u + C_2 = \frac{m}{k}\ln\left(t + \frac{m}{V_0 k}\right) + C_2$.

Для определения C_2 учтем, что при $t = t_0 = 0$, $X = X_0 = 0$, поэтому

$$X_0 = \frac{m}{k}\ln\left(t_0 + \frac{m}{V_0 k}\right) + C_2, \quad 0 = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{m}{V_0 k}\right) + C_2, \quad C_2 = -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{m}{V_0 k}\right).$$

Окончательно:

$$X = \frac{m}{k}\ln\left(t + \frac{m}{V_0 k}\right) - \frac{m}{k}\ln\left(\frac{m}{V_0 k}\right), \qquad X = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{t + \frac{m}{V_0 k}}{\frac{m}{V_0 k}}\right).$$

Или

$$X = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{V_0 k t + m}{m}\right).$$

Путь, пройденный судном за время $T = \frac{m}{k V_0}$, равен:

$$X_T = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{V_0 k T + m}{m}\right), \qquad X_T = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{V_0 k \frac{m}{k V_0} + m}{m}\right).$$

4.7. Движение точки под действием силы, зависящей от положения точки

Решим дифференциальное уравнение движения материальной точки M, если действующая на нее сила является функцией от радиус-вектора точки $\bar{r}$, определяющего ее положение относительно начала координат: $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$.

Запишем дифференциальное уравнение движения точки M в векторном виде:

$$m\frac{d\overline{V}}{dt}=\vec{F}(\vec{r}).$$

В этом уравнении содержится три переменные величины: t – время; $\overline{r}$ – радиус-вектор; $\overline{V}$ – скорость.

Преобразуем дифференциальное уравнение, чтобы оно содержало две переменные величины $\overline{V}$ и $\overline{r}$:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}\frac{d\vec{r}}{d\vec{r}}=\vec{F}(\vec{r})\Rightarrow m\frac{d\vec{V}}{d\vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}(\vec{r})\cdot$$

Так как $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{V}$, то получаем уравнение, которое можно решать методом разделения переменных:

$$m\frac{d\overline{V}}{d\vec{r}}\frac{d\overline{r}}{dt}=\vec{F}(\vec{r})\Rightarrow m\vec{V}\frac{d\overline{V}}{d\vec{r}}=\vec{F}(\vec{r}).$$

Теперь можем интегрировать дифференциальное уравнение

$$m\overline{V}\,d\overline{V}=\overline{F}(\overline{r})d\,\overline{r}\Rightarrow m\int\overline{V}\,d\overline{V}=\int\overline{F}(\overline{r})d\,\overline{r}.$$

Вычисленный интеграл $\left[\int\vec{F}(\vec{r})d\,\vec{r}\right]$ обозначим как новую скалярную функцию $f_1(\vec{r})=\left[\int\vec{F}(\vec{r})d\,\vec{r}\right]$ от вектора на перемещения точки.

В результате получим уравнение скорости в виде теоремы об изменении кинетической энергии точки:

$$m\frac{V^2}{2}=f_1(\vec{r})+C_1\cdot$$

Для вычисления постоянной C_1 в уравнение скорости вместо переменных V и $\overline{r}$ подставляем их начальные значения:

$$m\frac{V_0^2}{2}=f_1(\vec{r_0})+C_1\Rightarrow C_1=m\frac{V_0^2}{2}-f_1(\vec{r_0}).$$

Чтобы найти уравнение движения, перепишем уравнение скорости в виде известной уже функции.

Получаем уравнение скорости, как скалярную функцию от радиус-вектора $\bar{r}$:

$$V^2 = \frac{2}{m}\left[\int \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} + \left(m\frac{V_0^2}{2} - f_1(\vec{r_0})\right)\right],$$

$$V = V_1(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{m}\left[\int \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} + \left(m\frac{V_0^2}{2} - f_1(\vec{r_0})\right)\right]}.$$

То есть мы получили алгебраическое значение скорости.

Далее решаем дифференциальное уравнение в естественных координатах:

$$V_1(\vec{r}) = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{ds}{V_1(\vec{r})} = dt, \quad \int \frac{ds}{V_1(\vec{r})} = \int dt \cdot$$

Решение интеграла обозначим как функцию $V_2(\vec{r}) = \left[\int \frac{d}{V_1(\vec{r})}\right].$

Тогда уравнение движения будет определено как неявное уравнение

$$V_2(\bar{r}) = t + C_2.$$

Постоянную C_2 находим, подставив в уравнение движения начальные значения параметров $\bar{r}$ и t:

$$V_2(\bar{r}_0) = t_0 + C_2 \Rightarrow C_2 = V_2(\bar{r}_0) - t_0.$$

Если $t_0 = 0$, то $C_2 = V_2(\bar{r}_0)$.

Пример 4.7.1. Движение точки под действием отталкивающей силы

Материальная точка M массой m движется по горизонтальной прямой вдоль оси OX под действием отталкивающей силы $F_X = \dfrac{k}{X^3}$, обратно пропорциональной кубу расстояния точки до некоторого центра O. Заданы начальные координаты X_0, Y_0 и начальная скорость V_0, направленная по оси OX. Требуется получить уравнение движения точки под действием силы отталкивания, а также определить скорость, приобретенную точкой на расстоянии X_K от центра *O*.

Решение

Запишем дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки:

$$m\frac{dV_X}{dt} = F_X, \qquad m\frac{dV_X}{dt} = \frac{k}{X^3}.$$

Преобразуем ускорение:

$$\frac{dV_X}{dt} = \frac{dV_X}{dt}\frac{dX}{dX} = \frac{dV_X}{dX}\frac{dX}{dt} = V_X\frac{dV_X}{dX}.$$

Приведем дифференциальное уравнение к переменным t и V_X:

$$mV_X\frac{dV_X}{dX} = \frac{k}{X^3}, \qquad mV_X dV_X = \frac{k}{X^3}dX.$$

Вычислим интегралы в правой и левой частях уравнения:

$$m\int V_X dV_X = k\int\frac{dX}{X^3},$$

$$\frac{mV_X^2}{2} = -\frac{k}{2X^2} + C_1. \qquad (1)$$

Найдем постоянную C_1, используя заданные начальные условия:

$$\frac{mV_{X_0}^2}{2} = -\frac{k}{2X_0^{\ 2}} + C_1, \qquad C_1 = \frac{mV_{X_0}^2}{2} + \frac{k}{2X_0^{\ 2}} = \frac{1}{2}\left(mV_{X_0}^2 + \frac{k}{X_0^{\ 2}}\right).$$

Тогда из выражения (1) получаем

$$\frac{mV_X^2}{2} = -\frac{k}{2X^2} + \left(\frac{mV_{X_0}^2}{2} + \frac{k}{2X_0^{\ 2}}\right),$$

или

$$\frac{mV_X^2}{2} - \frac{mV_{X_0}^2}{2} = -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{X_0^2}\right).$$

В левой части уравнения получаем разность кинетических энергий точки, в правой части – работу силы.

Находим уравнение скорости точки как функции от ее положения:

$$V_X = \sqrt{V_{X_0}^2 - \frac{k}{m}\left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{X_0^2}\right)}.$$

Когда координата точки примет значение $X = X_K$, то ее скорость будет равна:

$$V_{X_K} = \sqrt{V_{X_0}^2 - \frac{k}{m}\left(\frac{1}{X_K^2} - \frac{1}{X_0^2}\right)}.$$

Представим теперь скорость как производную от координаты и выведем уравнение движения точки:

$$V_X = \frac{dX}{dt}, \qquad \frac{dX}{dt} = \sqrt{V_{X_0}^2 - \frac{k}{m}\left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{X_0^2}\right)},$$

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{\left(V_{X_0}^2 + \frac{k}{m}\frac{1}{X_0^2}\right) - \frac{k}{m}\left(\frac{1}{X^2}\right)}.$$

Упростим выражение, приняв обозначения для постоянных величин:

$$A = \left(V_{X_0}^2 + \frac{k}{m}\frac{1}{X_0^2}\right) \text{ и } \quad B = \frac{k}{m}.$$

Тогда интегрируем уравнение вида

$$\frac{dX}{dt} = \left(A - \frac{B}{X^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{или} \quad \frac{dX}{dt} = \frac{A}{X}\left(X^2 - \frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Разделяем переменные

$$\frac{XdX}{\left(X^2 - \frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2}}} = Adt \cdot$$

Пропуская дальнейшее интегрирование, запишем решение в общем виде.

Обозначим решение левой части уравнения как известную уже функцию $f(X) = \int\left(X^2 - \frac{B}{A}\right)^{(-\frac{1}{2})} XdX.$

Результатом решения задачи должна быть функция вида $f(X) = t - C_2$, определяющая в неявном виде зависимость координаты точки и времени.

Пример 4.7.2. Криволинейное движение частицы в электрическом поле

Частица массой m, несущая положительный заряд q, брошена со скоростью $\bar{V}_0$ под углом α к горизонту в одномерном электрическом поле напряженностью $\bar{E}$, вектор которой составляет угол β с вертикалью (рис. 4.7.1). Найти уравнения скорости и уравнения движения частицы.

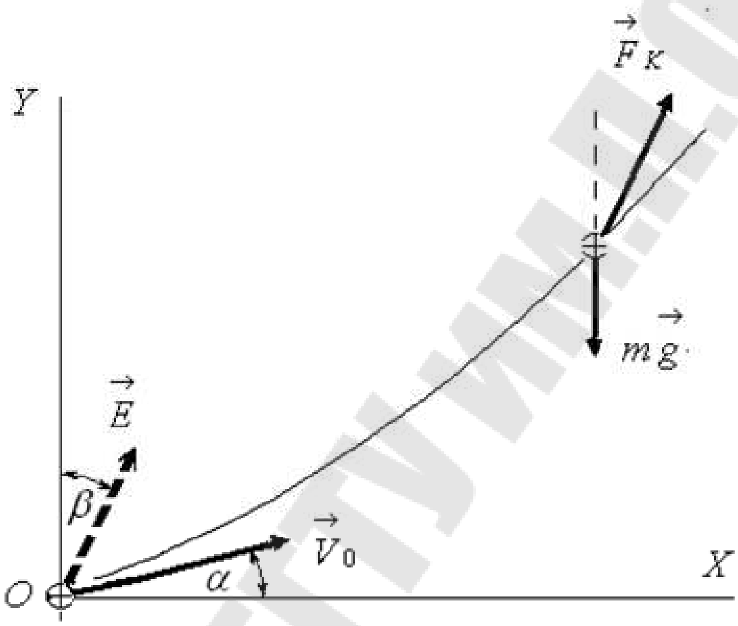


Рис. 4.7.1

Решение

Изобразим на рис. 4.7.1 частицу в произвольный момент времени, укажем силы $m\bar{g}$ и $\bar{F}_K$, действующие на частицу, и запишем основное уравнение динамики

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{F}_K .$$

Сила, действующая на частицу с зарядом, вычисляется по формуле

$$\bar{F}_K = g \cdot \bar{E}.$$

Векторное уравнение (1.5) перепишем в проекциях на оси координат:

$$m\frac{dV_X}{dt} = Eg\sin\beta \quad \text{и} \quad m\frac{dV_Y}{dt} = -mg + Eg\cos\beta.$$

Интегрируя уравнения, найдем сначала уравнения скорости частицы:

$$V_X = \frac{Eg}{m} t \sin\beta + V_0 \cos\alpha \;\text{ и }\; V_Y = \left(\frac{Eg}{m}\cos\beta - gt\right)t + V_0 \cos\alpha. \qquad (1)$$

Так как

$$V_X = \frac{dX}{dt},\; V_Y = \frac{dY}{dt},$$

то, проинтегрировав (1), получим уравнение движения

$$\begin{cases} X = \dfrac{Eg}{2m} t^2 \sin\beta + V_0 t \cos\alpha + X_0, \\ Y = \left(\dfrac{Eg}{m}\cos\beta - g\right)\dfrac{t^2}{2} + V_0 t \sin\alpha + Y_0. \end{cases}$$

Полученные уравнения движения являются параметрическими уравнениями параболы, в которых, следуя условиям задачи, можем положить $X_0 = 0,\; Y_0 = 0.$

Пример 4.7.3. Прямолинейное движение частицы в электрическом поле

Частица массой m и зарядом g движется без начальной скорости в одномерном электрическом поле, вектор $\bar{E}$ которого направлен вертикально вверх. Найти уравнение скорости частицы, если сила сопротивления среды пропорциональна скорости точки $\bar{R}_C = -\mu \bar{V}$.

Решение

Рассмотрим прямолинейное движение частицы. Основное уравнение динамики запишем в виде

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}_C. \qquad (1)$$

Выберем положительное направление оси Z, направив ее вверх, и спроектируем уравнение (1) на эту ось:

$$m\frac{dV_Z}{dt} = mg + Eg + \mu V_Z. \qquad (2)$$

Разделим переменные в уравнении (2):

$$\frac{dV_Z}{g\frac{m}{\mu} - q\frac{E}{\mu} + VZ} = -\frac{m}{\mu} dt.\,. \qquad (3)$$

Введем обозначения

$$a = g\frac{m}{\mu} - q\frac{E}{\mu},$$

и проинтегрируем уравнение (3):

$$\ln\left|a + V_Z\right| = -\frac{m}{\mu}t + C_1. \qquad (4)$$

Подставляя в (4) начальные условия $t = t_0 = 0$ и $V_Z = V_{Z_0} = 0$ находим

$$\begin{cases} \ln\left|a + V_{Z_0}\right| = -\dfrac{m}{\mu}t_0 + C_1, \\ C_1 = \ln|a|, \end{cases} \qquad \begin{cases} \ln\left|a + V_Z\right| = -\dfrac{m}{\mu}t + \ln|a|, \\ \ln\left|\dfrac{a + V_Z}{a}\right| = -\dfrac{\mu}{m}t, \\ \dfrac{a + V_Z}{a} = \exp\left(-\dfrac{\mu}{m}t\right) \end{cases}$$

$$V_Z = a\left(\exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right) - 1\right).$$

4.8. Дифференциальные уравнения относительного движения точки. Силы инерции

Если движение материальной точки исследуется по отношению к неинерциальной системе отсчета, то на основании теоремы о сложении ускорений при сложном движении точки:

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{отн}} + \bar{a}_{\text{кор}}, \qquad (4.8.1)$$

Где $\bar{a}_{пер}$, $\bar{a}_{отн}$, $\bar{a}_{кор}$ – относительное, переносное и кориолисово ускорения точки.

Подставляем уравнение (4.8.1) в основное уравнение динамики (1.2.3):

$$m(\bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{отн}} + \bar{a}_{\text{кор}}) = \bar{F}.$$

Так как нашей задачей является изучение относительного движения точки, то преобразуем уравнение

$$m\bar{a}_{\text{отн}} = \bar{F} - m\bar{a}_{пер} - m\bar{a}_{\text{кор}}. \qquad (4.8.2)$$

То есть если наблюдателя поместить в подвижную систему координат, то он будет наблюдать относительное движение, определенное дифференциальным уравнением (4.8.2).

Введем обозначения

$$\bar{\Phi}_{\text{пер}} = -m\,\bar{a}_{пер} \qquad \text{и} \qquad \bar{\Phi}_{\text{кор}} = -m\,\bar{a}_{\text{кор}}.$$

Векторы $\bar{\Phi}_{\text{пер}}$ и $\bar{\Phi}_{\text{кор}}$ называются соответственно переносной и кориолисовой силами инерции.

Сила инерции не подлежит определению силы как меры взаимодействия тел, поскольку эти силы проявляются только в инерциальных системах отсчета и представляют собой произведение массы тела на ускорение, взятое с обратным знаком, т. е. сила инерции направлена всегда против ускорения.

Уравнение (4.8.2) принимает следующий вид:

$$m\,\bar{a}_{\text{отн}} = \bar{F} + \bar{\Phi}_{\text{пер}} + \bar{\Phi}_{\text{кор}}. \qquad (4.8.3)$$

Если движение точки рассматривается в подвижной системе координат отсчета, то в правой части добавляются силы инерции, которые обращаются в нуль в инерциальных системах отсчета.

Уравнение (4.8.3) называется основным уравнением динамики относительного движения материальной точки.

Таким образом, относительное движение материальной точки можно рассматривать как абсолютное, если к действующим на точку силам добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Пример 4.8.1. Относительное движение точки при вращательном переносном движении

Составить дифференциальное уравнение относительного движения кольца M массой m, перемещающегося вдоль направляющей, наклоненной под углом α к вертикали. Направляющая вместе с вертикальным валом совершает вращение с постоянной угловой скоростью $\alpha = const$ (рис. 4.8.1).

Решение

Выбираем на рис. 4.8.1 неподвижную систему $O_1X_1Y_1Z_1$ координат таким образом, чтобы ось вращения вала совпадала с осью O_1Z_1.

Ось O_rX_r подвижной системы координат совмещаем с направляющей, по которой движется кольцо M. Изображаем на рис. 4.8.1

точку M в произвольном положении на расстоянии O_rM от начала отсчета, точки O_r, и указываем силы действующие на точку M :

$\overline{G} = m\overline{g}$ – сила тяжести;

$\overline{\Phi}_{\text{кор}} = -m\,\overline{a}_{\text{кор}}$ -кориолисова сила инерции;

$\overline{\Phi}_n = -m\,\overline{a}_n$ – нормальная (центробежная) сила инерции;

$\overline{N}_{X_1Y_1}$ – нормальная реакция, параллельная координатной плоскости $X_1O_1Y_1$;

$\overline{N}_{X_rZ_1}$ – нормальная реакция, расположенная в плоскости $Z_1O_1X_r$.

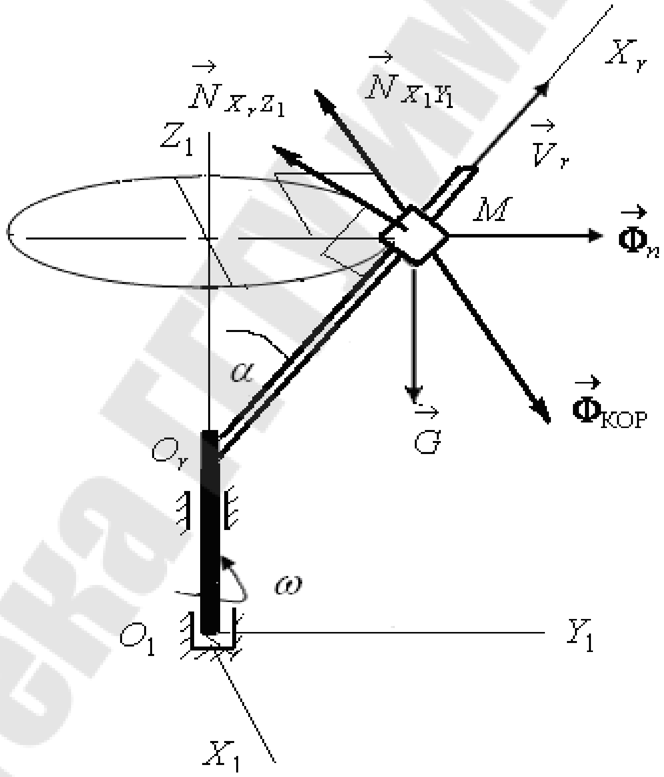


Рис. 4.8.1

Определим сумму проекций сил на ось O_rX_r (рис. 4.8.2).

Так как $\overline{\Phi}_{\text{кор}} \perp O_rX_r$, $\overline{N}_{X_1Y_1} \perp O_rX_r$, $\overline{N}_{X_rZ_1} \perp O_rX_r$, то

$$\sum F_{X_r} = \Phi_e^n \sin\alpha - G\cos\alpha.$$

Вычисляем силы инерции:

$$\Phi_n = ma_n = m\omega^2 O_r M = m\omega^2 O_r M \cdot \sin\alpha.$$

$$\Phi_{\text{кор}} = ma_{\text{кор}} = 2m\alpha \cdot V_r \sin\alpha..$$

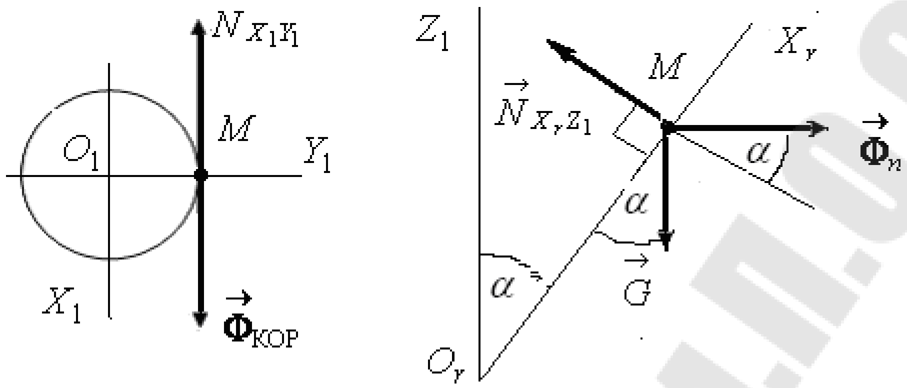


Рис. 4.8.2

Здесь $O_r M = X_r$ – координата относительного положения точки M; $V_r = \dot{X}_r$ – относительная скорость.

Записываем дифференциальное уравнение относительного движения:

$$m\ddot{X}_r = \sum F_{X_r},$$

$$m\ddot{X}_r = \Phi_n \sin\alpha - G\cos\alpha,$$

$$m\ddot{X}_r = m\omega^2 X_r \cdot \sin^2\alpha - mg\cos\alpha,,$$

$$\ddot{X}_r = \omega^2 X_r \cdot \sin^2\alpha - g\cos\alpha..$$

Получаем дифференциальное уравнение относительного движения кольца M:

$$\ddot{X}_r - \omega^2 X_r \cdot \sin^2\alpha = -g\cos\alpha.$$

5. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

5.1. Собственные колебания

Пусть на точку действует восстанавливающая (упругая) сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия и по величине пропорциональная отклонению точки от этого положения. Если движение точки происходит вдоль оси OX, а O – положение равновесия, то

$$F_X = -cX,$$

где c – коэффициент упругости (жесткости).

Дифференциальное уравнение движения точки в этом случае имеет вид

$$m\ddot{X} = -cX.$$

Разделив на массу, получаем дифференциальное уравнение свободных колебаний

$$\ddot{X} + k^2 X = 0. \qquad (5.1.1)$$

.Здесь $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – круговая частота.

Для составления характеристического уравнения делаем замену в уравнении (5.1.1):

$$\ddot{X} \to \lambda^2 \quad \text{и} \quad X \to (\lambda^0 = 1).$$

В результате замены в уравнении (5.1.1) полученное характеристическое уравнение дифференциального уравнения имеет вид квадратного уравнения

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Так как его корни – чисто мнимые числа

$$\lambda_1 = +\sqrt{-k_2} = +ik \qquad \text{и} \qquad \lambda_2 = -\sqrt{-k_2} = -ik,$$

то общим решением уравнения (5.1.1) будет уравнение движения

$$X = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt). \qquad (5.1.2)$$

Запишем теперь уравнение скорости

$$V_X = \dot{X} = -C_1 k\sin(kt) + C_2 k\cos(kt). \qquad (5.1.3)$$

Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям движения из уравнений (5.1.2) и (5.1.3): $C_1 = X_0$ и $C_2 = {}^{V_0}\!/_{k}$.

Период колебания определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{5.1.4}$$

Колебания точки в этом случае являются незатухающими и гармоническими (рис. 5.1.1).

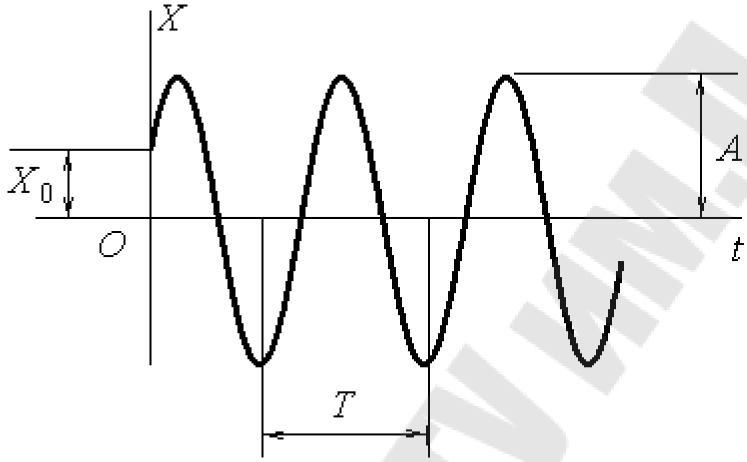


Рис. 5.1.1

Пусть кроме упругой силы на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная первой степени скорости и направленная против вектора скорости, т. е.

$$R_X = -\alpha V_X = \alpha \dot{X}.$$

В этом случае получим дифференциальное уравнение

$$m\ddot{X} = -cX - \alpha\dot{X}.$$

Разделив на массу, получим дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{X} + 2n\dot{X} + k^2 X = 0. \tag{5.1.5}$$

Здесь $n = \dfrac{\alpha}{2m}$ – коэффициент, зависящий от вязкости среды, в которой движется точка.

Для составления характеристического уравнения делаем замену в уравнении (5.1.5):

$$\ddot{X} \to \lambda^2,\ \dot{X} \to (\lambda^1 = \lambda),\ X \to (\lambda^0 = 1).$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет вид квадратного уравнения вида

$$\lambda^2 - 2n\lambda + k^2 = 0.$$

При решении этого дифференциального уравнения возможны три случая.

Случай 1. «Малое» сопротивление среды, когда $n < k$. Корни характеристического уравнения будут комплексными сопряженными числами

$$\lambda_1 = a + ib \text{ и } \lambda_2 = a - ib.$$

Здесь $a = -n$, $b = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Решение дифференциального уравнения (5.1.5) имеет вид

$$X = \exp(-nt)\big(C_1 \cos(k_R t) + C_2 \sin(k_R t)\big), \qquad (5.1.6)$$

где

$$k_R = b = \sqrt{k^2 - n^2} \text{ – круговая частота затухающих колебаний.}$$

Чтобы вычислить постоянные C_1 и C_2 надо по уравнению (5.1.5) получить уравнение скорости $V_X = \dot{X}$, и имея два алгебраических уравнения с начальными значениями, решить их относительно постоянных. Движение точки в этом случае носит характер затухающего колебания с периодом (промежуток времени между двумя последующими наибольшими отклонениями точки в одну сторону) (рис. 5.1.2):

$$T_R = \frac{2\pi}{k_R} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

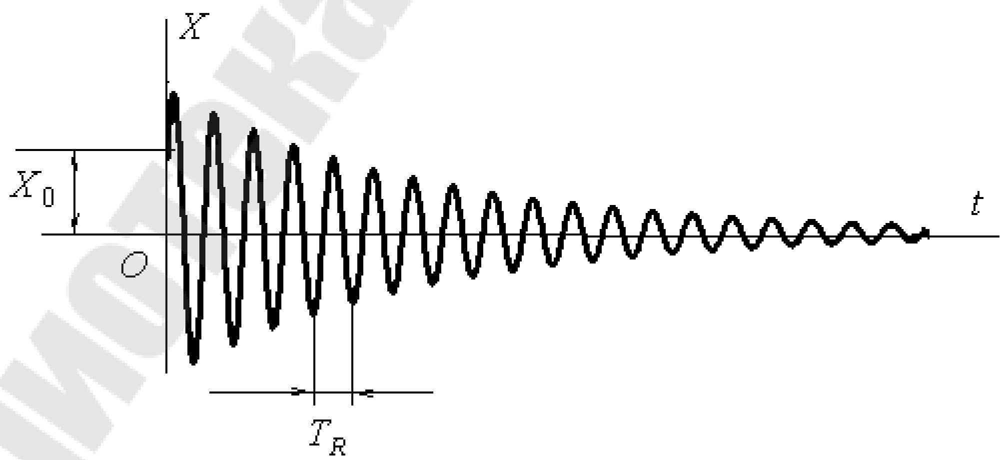


Рис. 5.1.2

Случай 2. «Большое» сопротивление среды, когда $n > k$. Корни характеристического уравнения будут действительными величинами:

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Решение уравнения (5.1.5) представляется в виде

$$X = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t).$$

В этом случае точка совершает апериодическое затухающее движение (рис. 5.1.3).

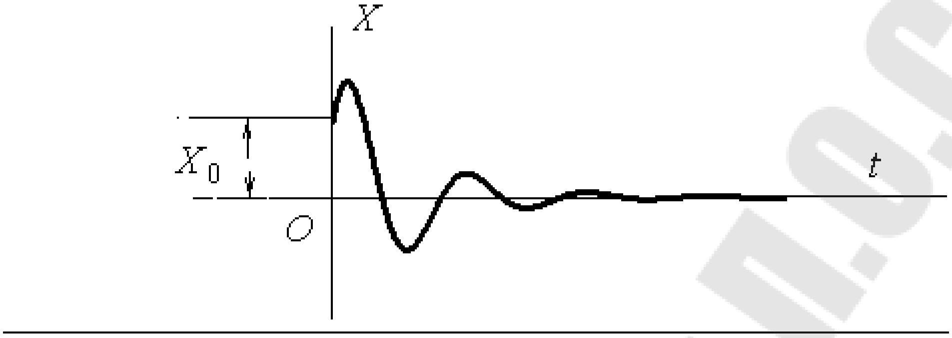


Рис. 5.1.3

Случай 3. «Предельный» случай, когда $n = k$. Корни характеристического уравнения будут действительными и равными величинами:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n.$$

Общее решение уравнения (5.1.4) примет вид

$$X = (C_1 t + C_2)\exp(-nt).$$

В данном случае имеет место также апериодическое затухающее движение (рис. 5.1.4).

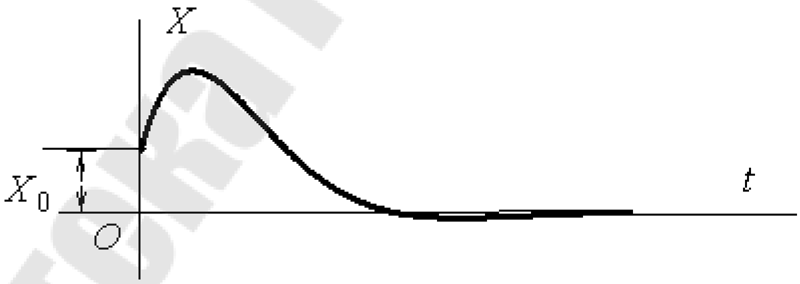


Рис. 5.1.4

5.2. Вынужденные колебания

Пусть кроме упругой силы и силы сопротивления среды на точку действует внешняя сила, зависящая от времени так называемая возмущающая сила $\bar{Q}$, проекция которой на ось OX равна периодической функции:

$$Q_X = Q_0 \sin(pt),$$

где Q_0 – амплитуда силы (ее наибольшее значение); p – круговая частота силы.

Дифференциальное уравнение движения точки примет вид

$$m\ddot{X} = -cX - \alpha\dot{X} + Q_0 \sin(pt).$$

Или

$$\ddot{X} + 2n\dot{X} + k^2 X = \frac{Q_0}{m}\sin(pt). \qquad (5.2.1)$$

Решение этого дифференциального уравнения состоит из двух решений вида

$$X = X_* + X_{**},$$

где X_* – общее решение однородного уравнения (5.1.5); X_{**} – частное решение уравнения (5.2.1), которое можно получить в виде

$$X_{**} = A\sin(pt + \beta),$$

где

$$A = \frac{n}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2p^2}}, \quad tg\beta = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Частное решение $X_{част} = A\sin(pt + \beta)$ называют *вынужденным колебанием*.

Если $n \neq 0$ (т. е. имеет место сопротивление среды), то $X_* \to 0$ при $t \to \infty$, и поэтому интерес представляют только вынужденные колебания (частное решение X_{**}).

Если $n = 0$, то

$$A = \frac{n}{\sqrt{(k^2 - p^2)}} \quad \text{и} \quad tg\beta = 0.$$

Тогда

$$X = X_* + X_{**},$$

где

$$X_* = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) \quad \text{и} \quad X** = \frac{n}{\sqrt{(k^2 - p^2)}}\sin(pt).$$

Следовательно, решение дифференциального уравнения (5.2.1) можно записать в виде

$$X = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) + \frac{n}{\sqrt{(k^2 - p^2)}}\sin(pt).$$

Если $p = k$, т. е. частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных незатухающих колебаний, то наступает явление резонанса. В этом случае при отсутствии сопротивления

$$X_{**} = \frac{nt}{2p}\cos(pt),$$

т. е. с течением времени происходит нарастание амплитуды (рис. 5.2.1).

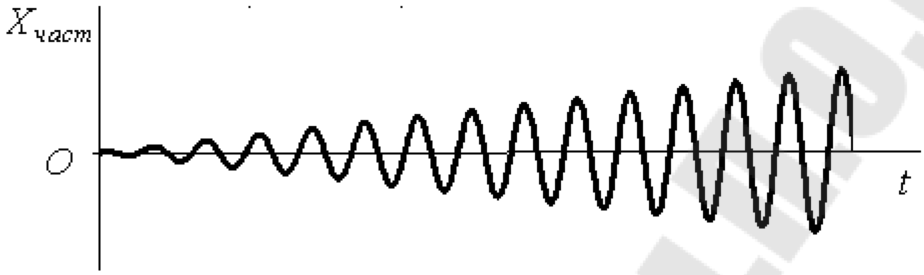


Рис. 5.2.1

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Рекомендуемый список учебников и учебных пособий, имеющихся в фонде библиотеки ГГТУ:

1. Аркуша, А. И. Руководство к решению задач по теоретической механике : учеб. пособие для средних проф. учеб. заведений / А. И. Аркуша – 4-е изд., испр. – Москва.: Высш. шк., 2000. – 336 с.

2. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учеб. пособие для вузов. Т. 1: Статика и кинематика М. И. Бать., Г. Ю. Джанелидзе., А. С. Кельзон. – 9-е изд., перераб. – Москва.: Наука, 1990. – 670 с.

3. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики : учеб. для студентов вузов. Т. 1: Статика и кинематика / Н. В. Бутенин., Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 4-е изд., испр. – Москва.: Наука, 1985. – 239 с. : ил.

4. Воронков, И. М. Курс теоретической механики : учеб. для студентов вузов / – 12-е изд., стер. – Москва.: Наука, 1965. – 596 с.

5. Гернет, М. М. Курс теоретической механики : учеб. для вузов / М. М. Гернет – 5-е изд., испр. – Москва.: Высш. шк., 1987. – 344 с. : ил.

6. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики : учеб. для студентов вузов / Ю. Ф. Голубев – Москва.: Изд-во МГУ, 1992. – 526 с. -Библиогр.: [с. 524 – 525].

7. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики : учеб. для студентов машиностроит. и приборостроит. специальностей вузов / Н. Н. Никитин – 5-е изд., перераб. и доп. -Ммосква.: Высш. шк., 1990. – 607 с. : ил.

8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для вузов / под ред. А. А. Яблонского. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва.: Высш. шк., 1985. 367с. : ил. – Библиогр.: с. 363.

9. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для вузов / С. М. Тарг. – 10-е изд., перераб. и доп. – Москва.: Высш. шк., 1986. – 415 с.

10. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Кинематика : учеб. для техн. вузов / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. изд. 6-е, испр. – Москва.: Высш. шк., 1984. – 343 с.

11. Теоретическая механика : программа, метод. указания и контрол. задания для студентов заочн. специальностей. – Иванов-Франковск,: ИФИИГ, 1990.

Рекомендуемый список методических пособий, имеющихся в фонде библиотеки ГГТУ:

1. Шабловский, О. Н. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников по теоретической механике. Часть 2. Кинематика / О. Н. Шабловский – Гомель : ГПИ, 1991. – 29 с.
2. Теоретическая механика : курс лекций по одноим. дисциплине для студентов инженер.-техн. специальностей заоч. формы обучения : в 3 ч. Ч. 1. Статика / сост. С. Ф. Андреев. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 68 с. – Электр. библ. ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009.
3. Теоретическая механика : курс лекций по одноим. дисциплине для студентов инженер.-техн. специальностей заоч. формы обучения : в 3 ч. Ч. 2. Кинематика / сост. С. Ф. Андреев. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 68 с. – Электр. библ. ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009.
4. Теоретическая механика : пособие по одноим. курсу для студентов инженер.-техн. специальностей заочной формы обучения / С.Ф Андреев, – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2006.– 44 с.
5. Теоретическая механика : практикум по одноим. курсу для студентов днев. и заоч. форм обучения инженер.-техн. специальностей высш. учеб. заведений. Часть II. Динамика / Авт. сост.: О. Н. Шабловский, Н. В. Иноземцева. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2004.– 60 с.
6. Шабловский, О. Н. Динамика : практикум по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженер.-техн. специальностей днев. и заочн. форм обучения / О. Н. Шабловский, И. А. Концевой. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 42 с.
7. Электронный учебно-методический комплект дисциплины «Теоретическая механика» для студентов специальности 1-36 20 02 «Упаковочное производство», 1-36 01 05 «Машины и технология обработки материалов давлением», 1-36 02 01 ««Машины и технология литейного производства» / О. Н. Шабловский [и др.] – Электр. библ. ГГТУ им. П. О. Сухого, 2010.

СОДЕРЖАНИЕ

Андреев Сергей Филиппович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ
по одноименной дисциплине
для студентов технических специальностей
заочной формы обучения
В трех частях
Часть 3 (1). Динамика точки

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 01.03.11.
Рег. № 67E.
E-mail: ic@gstu.by
http://www.gstu.by