АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

На правах рукописи

БАБИЧ АЛЕКСАНДР АНТОНОВИЧ

УДК 539.12

ТЕОРЕТИКО - ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЕЙСТВИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ФЕДОРОВА

(01.04.02 - теоретическая и математическая физика)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск - 1988

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Теоретико-групповые методы являются одним из основных математических инструментов в современной теоретической физике. Особенно большую роль они играют в физике элементарных частиц. Действительно, кинематика частиц с произвольным спином и массой, как известно, адекватно описывается на языке унитарных неприводимых представлений группы Пуанкаре, а их динамика, обусловленная электрослабыми и сильными взаимодействиями, генерируется инвариантностью теории относительно калибровочных преобразований из групп $SU(2)\otimes U(1)$ и $SU_c(3)$, соответственно.

Появившиеся за последние полтора десятилетия многочисленные работы, в которых предлагаются теории (начиная с первых схем Большого объединения и кончая суперструнными моделями), объединяющие известные фундаментальные взаимодействия, свидетельствуют о возрастании аксиоматической значимости требования инвариантности теории относительно преобразований из группы фундаментальной симметрии. Другими словами требование инвариантности следует трактовать как основополагающий принцип, которым необходимо последовательно руководствоваться при построении любой реалистичной модели. При этом свойства симметрии будущей теории фундаментальных взаимодействий должны фиксировать не только структуру калибровочного сектора, как в обычных калибровочных теориях янг-миллсовского типа, но и структуру сектора материальных полей, а также саму калибровочную группу (здесь первые результаты получены на пути построения теорий супергравитации, а затем и суперструн).

С другой стороны на современном этапе развития теории, когда принятая аксиоматика не позволяет выделять только физически значимые функционалы действия (в силу чего последние, как правило, строятся из различного рода физических предположений и аналогий), наличие фундаментальной симметрии рассматривается просто как один из критериев их отбора.

Однако по мере усложнения моделей исследование их инвариантности сталкивается с определенными математическими трудностями, для преодоления которых необходимо либо использовать специальные приемы, упрощающие вычисления, как, например, I,5 – формализм в супергравитации, либо работать в ковариантном формализме, разработка которого в целом ряде случаев (например, для суперструнных теорий) представляет собой довольно сложную проблему. Кроме того возникают технические трудности и при реализации существенных для теории требований алгебраического характера таких, как замкнутость off-shell алгебры преобразований (поскольку до сих пор не существует стандартного алгоритма для поиска вспомогательных полей) или отсутствие квантовых аномалий.

Таким образом для многих задач теории поля актуальной и важной представляется разработка методов построения функционалов действия с заданными теоретико-групповыми свойствами.

Препятствием здесь является отсутствие общего конструктивного подхода, в котором групповые условия инвариантности записывались бы в виде уравнений с достаточно разработанными методами решения. В этом отношении особенно удобной оказывается реализация программы построения функционалов действия с заданными свойствами симметрии на основе формализма универсальных нелинейных матричных уравнений первого порядка (УНМУ), предложенных Ф.И.Федоровым. В этом формализме определяющую роль играют некоторые квадратные и кубическая матрицы. Это позволяет записывать условия инвариантности в виде матричных уравнений, в отличие, например, от известного подхода Утиямы для калибровочных полей или подхода группового многообразия для супергравитации. Для разрешения матричных условий инвариантности применяются обычные методы, основанные на результатах теории линейных представлений групп и алгебр.

Универсальность формы уравнений наряду с возможностью алгоритмизации вычислений, существенной при использовании ЭВМ, позволяет проводить общий анализ ряда групповых свойств полевых моделей, который в других известных подходах невозможен или сильно затруднен.

В диссертации исследуются условия инвариантности функционалов действия классических полевых систем относительно таких важных в физике элементарных частиц преобразований, как преобразования пространственно-временной симметрии из группы Лоренца, калибровочные преобразования внутренней симметрии (относящиеся к компактным полупростым группам Ли) и преобразования суперсимметрии из супергруппы Пуанкаре, которая является естественным "суперрасширением" пространственно-временной группы Пуанкаре.

Цель работы. Целью работы является развитие последовательных теоретико-групповых методов построения функционалов действия классических полевых физических теорий в формализме универсальных нелинейных матричных уравнений первого порядка, которые были бы инвариантны относительно заданных пространственно-временных, калибровочных и суперсимметричных преобразований.

Научная новизна. В работе получены следующие основные новые результаты, которые выносятся на защиту:

I. Развита программа последовательного построения функционалов действия классических полевых теорий, инвариантных относительно пространственно-временных преобразований (из группы Лоренца), калибровочных преобразований внутренней симметрии и преобразований глобальной суперсимметрии (из супергруппы Пуанкаре) на основе универсальных нелинейных матричных уравнений Федорова. На ряде примеров продемонстрирована эффективность подхода.

2. Сформулирована самосогласованная система матричных уравнений для поиска мультиплетов вспомогательных полей, замыкающих алгебру супергенераторов вне массовой оболочки, включающая в себя условия инвариантности и алгебру генераторов представления.

3. Доказано отсутствие вспомогательных полей для суперсимметричных моделей в формализме первого порядка, позволяющих замкнуть алгебру супергенераторов из $\mathcal{N} \geqslant 1$ супергруппы Пуанкаре на полях, задающих переход от второго порядка к первому (*no-go* теорема для $\mathcal{N} \geqslant 1$ суперсимметрии в первом порядке).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы основные задачи и цель диссертации, а также приведены структура и краткое содержание работы. Здесь же сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена рассмотрению общих особенностей используемого в диссертации формализма и формулировке условий инвариантности.

В § I излагается подход, основанный на представлении основных уравнений теории в виде универсальных нелинейных матричных уравнений Федорова

$$(\alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^0)\Psi + \frac{g}{2}\Lambda\Psi\Psi = 0,$$

где $\alpha^\mu (\mu = \overline{1,4})$, α^0 – постоянные квадратные матрицы, Λ – кубическая матрица, g – константа взаимодействия.

Вводится понятие объединенного поля Ψ, включающего в себя в качестве компонент физические поля взаимодействующих бозонов и фермионов, поля источников и переносчиков взаимодействия, поля частиц и античастиц, а также дополнительные поля, необходимые для перехода от уравнений второго и высших порядков к первому (Ψ_I), для понижения степени нелинейности (Ψ_H), для замыкания алгебры генераторов представлений (Ψ_{ad}).

В § 2 рассматриваются особенности лагранжевого формализма, в частности, ограничения, накладываемые на основные матрицы теории α^μ, α^0 и Λ, которые следуют из требования самосогласованности вариационной процедуры с функционалом действия вида

$$S[\Psi] = \int d^4x\, \mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu\Psi),$$

$$\mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu\Psi) = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(\alpha^\mu\partial_\mu + \alpha^0)\Psi + \frac{g}{3!}\Psi\Lambda\Psi\Psi.$$

В § 3 рассмотрены общие особенности вывода и формулировки условий инвариантности физической теории в формализме УНМУ. Обсуждаются вопросы, связанные с неоднозначностью формулировки условий инвариантности в силу неоднозначного определения лагранжианов и выделения дивергенции $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu f^\mu$. Отмечается, что в отличие от обычного способа получения условий инвариантности, в формализме УНМУ, благодаря универсальности формы лагранжиана, приравниваются нулю не только коэффициенты перед параметрами преобразований и их производными, но и коэффициенты, стоящие перед членами типа Ψ, $\partial_\mu\Psi$, Ψ^2, $(\partial_\mu\Psi)\Psi$ и т.д. Это приводит в конечном счете к матричным условиям инвариантности действия.

Здесь же сформулированы задачи, возникающие при исследовании особенностей алгебры преобразований в подходе УНМУ. В частности, задачу построения суперсимметричных функционалов действия можно решать одновременно с задачей поиска вспомогательных полей, замыкающих алгебру супергенераторов.

Во второй главе рассматриваются вопросы, связанные с построением релятивистски инвариантных функционалов действия в формализме УНМУ.

В § 4 приведены соответствующие условия инвариантности действия в формализме УНМУ как в инфинитезимальной, так и в конечной форме.

В § 5 рассматриваются методы разрешения инфинитезимальных условий и построения матриц α^{μ}, α^{0} свободной (без взаимодействия) теории в спинорном базисе и в базисе Гельфанда-Яглома. Здесь же развит способ разрешения конечных условий релятивистской инвариантности, который по сравнению с известными методами позволяет значительно проще получить ряд результатов. Он заключается в том, что задача отыскания матриц α^{μ}, α^{0} сводится к выделению из пространства представления $\tau = T^{\tau-1} \otimes T^{\tau-1}$ (T – представление объединенного поля $\mathcal{U}$) инвариантных подпространств $T^{1/2\,1/2}$ и T^{00} и построению в них базисов. Задача выделения из τ подпространств решается в спинорном базисе, что позволяет не прибегать к довольно громоздкому аппарату коэффициентов Клебша-Гордана. Кроме того использование представления матриц в виде разложения по элементам полной матричной алгебры существенно упрощает работу с матрицами произвольных размерностей.

Требования инвариантности теории относительно пространственной инверсии P, зарядового сопряжения C и определенные из самосогласованности вариационной процедуры свойства симметрии накладывают дополнительные ограничения на структуру матриц α^{μ}, α^{0}.

В § 6 в качестве примеров разрешаются условия инвариантности относительно конечных лоренц преобразований и определяется явный вид матриц α^{μ}, α^{0}, для релятивистских волновых уравнений (РВУ), описывающих свободные поля для частиц с различными спинами.

Третья глава посвящена вопросам построения калибровочно-инвариантных лагранжианов на основе формализма УНМУ.

В § 7 основное внимание уделено изложению программы Утиямы-Киббла и особенностям ее реализации в формализме УНМУ. Найдены матричные условия калибровочной инвариантности как в инфинитезимальной, так и в конечной форме с учетом неоднозначного (с точностью до дивергенции) определения лагранжиана.

В § 8 проанализированы матричные условия инвариантности, из которых следует безмассовость калибровочного поля, его векторность, структура тензора напряженности, а также вид генераторов преобразований калибровочного сектора. Получен явный вид той части матрицы Λ , которая определяет минимальное калибровочное взаимодействие:

$$\Lambda = -\frac{1}{g} \sum_{\pi} e^{a\mu}(\alpha_\mu N_a),$$

где N_a - генераторы калибровочной группы в представлении, которому принадлежит объединенное поле Ψ ; $(e^{a\mu})_B = \delta_B^{a\mu}$, $\pi = \{(ABC),(BAC),(BCA)\}$.

Матрица Λ определена с точностью до членов характеризующих, в частности, взаимодействия типа Паулы и Юкавы: $\Psi\sigma_{[\mu\nu]}\Psi F^{[\mu\nu]}$, φ^3, $F^{[\mu}{}_{\nu]}F^{[\nu}{}_{\lambda]}F^{[\lambda}{}_{\mu]}$ и т.п.

В § 9 сформулирован алгоритм построения калибровочно-инвариантных функционалов действия, который заключается в задании представления группы Лоренца и калибровочной группы, пространствам которых принадлежит объединенное поле Ψ ; получении явного вида матриц α^μ и α^0 из условий релятивистской инвариантности; задании генераторов представления калибровочной группы N_a ; нахождении по соответствующей формуле явного вида матриц Λ , определяющей минимальное калибровочное взаимодействие.

Далее рассматривается групповая специфика калибровочно-инвариантных теорий.

Четвертая глава посвящена исследованию особенностей формулировки суперсимметричных теорий в подходе УНМУ.

В § 10 устанавливается взаимосвязь между суперполевым и компонентными подходами с подходом УНМУ, который здесь уместно назвать матричным компонентным. Найдена форма вариации объединенного поля Ψ при глобальных суперпреобразованиях из супергруппы Пуанкаре, в предположении, что Ψ принадлежит в общем случае приводимому представлению этой супергруппы. Она имеет вид:

$$\delta_{SP}\Psi = \xi^\Omega(G^\mu_\Omega \partial_\mu + G_\Omega)\Psi,$$

где $\xi^\Omega = (a^\mu , \omega^{[\mu\nu]}, \xi^\alpha)$ - параметры преобразования; G^μ_Ω , G_Ω - некоторые постоянные матрицы. Установлена связь кубической матрицы Λ ,характеризующей взаимодействие , с базисными полиномами $\chi(\theta)$ в пространстве функций от антикоммутирующих переменных

$$\Lambda \sim \int d\theta \, \chi(\theta)\cdot\chi(\theta)\cdot\chi(\theta).$$

В § II получены условия суперинвариантности функционала действия УНМУ с учетом дивергенциального вида вариации лагранжиана $\delta_{S\varphi}\mathcal{L}$ для суперпреобразований. В честности, для линейного случая их можно записать как

$$\check{G}^{T}_{\Omega}\,\hat{\mathcal{L}} + (-1)^{(A)(\Omega)}\,\hat{\mathcal{L}}\,\hat{G}_{\Omega} = 0,$$

где $\hat{G}_{\Omega} = G^{\mu}_{\Omega}\partial_{\mu} + G_{\Omega}$ – генераторы супергруппы ($\check{G}_{\Omega} = -G^{\mu}_{\Omega}\partial_{\mu} + G_{\Omega}$); G^{μ}_{Ω}, G_{Ω} – некоторые постоянные матрицы, определяющие супергенераторы, Ω – групповой индекс; $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{\mu}\partial_{\mu} + \mathcal{L}^{0}$; (A) – грассманова четность первого матричного индекса, т.е. индекса, нумерующего строки.

В § I2 предложен матричный способ поиска вспомогательных полей, замыкающих алгебру супергенераторов вне массовой оболочки, основанный на разрешении системы соотношений, включающей в себя условия инвариантности функционала действия УНМУ относительно преобразований с открытой супералгеброй, условия инвариантности искомого функционала действия (со вспомогательными полями) относительно новых преобразований с замкнутой супералгеброй, коммутационные соотношения открытой и замкнутой супералгебр, а также соответствующие уравнения связи между старыми и новыми лагранжианами и вариациями полей.

В качестве примеров рассмотрены произвольная линеаризованная безмассовая суперсимметричная модель и модель Весса-Зумино, на которых продемонстрированы возможности и особенности метода.

В § I3 для случая линеаризованной суперсимметричной модели с массивными полями в формализме первого порядка доказано отсутствие вспомогательных полей и невозможность замыкания алгебры на полях, задающих переход от второго порядка к первому.

В § I4 на основе анализа матричных условий суперинвариантности совместно с алгебраическими коммутационными соотношениями доказывается в общем случае невозможность замыкания off-shell алгебры суперпреобразований объединенного поля $\mathcal{U}(x)$ (в том числе и безмассового), принадлежащего приводимому представлению супергруппы Пуанкаре, в формализме первого порядка.

Отсутствие вспомогательных полей для суперсимметричных теорий в формализме первого порядка означает отсутствие суперполевого аналога данных теорий и приводит к необходимости работать с открытыми алгебрами, члены размыкания которых определяются полевыми уравнениями компонент, задающих переход от второго порядка к первому.

В Заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

В Приложении I приводятся определения операций дифференцирования и интегрирования по антикоммутирующим переменным. Здесь также содержатся формулы для некоторых интегралов, необходимые при вычислении явного вида матричных супергенераторов.

В Приложении 2 введена система базисных полиномов в пространстве функций от антикоммутирующих переменных для произвольного , удобная для получения матричного представления генераторов расширенной суперсимметрии.

В Приложении 3 даны явные выражения матриц, определяющие генераторы расширенной суперсимметрии.

В Таблице приводится явный вид генераторов и основных матриц α^{Γ}, α^{0} и Λ для ряда калибровочных теорий.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

I. Дан метод построения релятивистски-инвариантных лагранжианов первого порядка для уравнений Федорова (УНМУ), основанный на разрешении матричных условий инвариантности действия относительно конечных преобразований из группы Лоренца в спинорном базисе. Преимуществом данного метода является упрощение вычислений по сравнению с известными методами разрешения условий лоренц-инвариантности в инфинитезимальной форме. На ряде примеров продемонстрирована эффективность предложенного подхода.

2. Последовательно проведена программа построения лагранжианов теорий, функционалы действия которых инвариантны относительно преобразований, принадлежащих произвольной калибровочной группе (программа Утиямы-Киббла), на основе разрешения соответствующих матричных условий инвариантности. Сформулирован алгоритм построения основных матриц теории α^{μ} , α^{0} и Λ . Получено явное выражение для части матрицы взаимодействия Λ , определяющей минимальное калибровочное взаимодействие.

3. Найдены условия инвариантности функционала действия в формализме УНМУ относительно глобальных суперпреобразований в виде матричных уравнений, связывающих основные матрицы теории и соответствующие супергенераторы.

4. Сформулирована самосогласованная система матричных уравнений, замыкающих алгебру супергенераторов вне массовой оболочки. В качестве примеров решения этой системы рассмотрены: отыскание вспомогательных полей и построение соответствующих лагранжианов и законов преобразований для произвольной безмассовой линеаризованной суперсимметричной модели и модели Весса-Зумино.

5. На основе анализа условий суперинвариантности совместно с алгебраическими коммутационными соотношениями доказано отсутствие вспомогательных полей, замыкающих алгебру супергенераторов вне массовой оболочки, для суперсимметричных моделей в формализме первого порядка, мультиплет полей которых принадлежит приводимому представлению $N \geq 1$ супергруппы Пуанкаре.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Бабич А.А.,Кувшинов В.И.,Федоров Ф.И. Теоретико-групповые принципы построения нелинейных уравнений первого порядка для физических взаимодействий. - В кн.: Тр.межд.семинара "Теоретико-групповые методы в физике". Звенигород, 1982. - М.:Наука, 1983. Т.2.С.458-463.

2. Бабич А.А.,Кувшинов В.И.,Федоров Ф.И. Условия локальной калибровочной и релятивистской инвариантности универсальных нелинейных уравнений первого порядка в теории фундаментальных взаимодействий.//Докл.АН СССР. 1982. Т.257. С.1093-1097.

3. Бабич А.А.,Кувшинов В.И.,Федоров Ф.И. Определение матриц универсальных нелинейных уравнений из условий релятивистской инвариантности в спинорном базисе.// Изв.АН БССР. Сер.физ.-мат.наук. 1983. № 4. С.50-57.

4. Бабич А.А.,Кувшинов В.И.,Федоров Ф.И. О взаимосвязи суперполевого и матричного компонентного подходов.//Изв. АН БССР. Сер.физ.-мат.наук. 1987. № 1. С.48-55.

5. Бабич А.А.,Бабичев Л.Ф.,Кувшинов В.И.,Федоров Ф.И. Матричная реализация программы Утиямы-Киббла в теории калибровочных полей и супергравитации. - Препринт/Ин-т физики АН БССР.1987. № 461. - 40с.

6. Бабич А.А., Кувшинов В.И.,Федоров Ф.И. Матричный способ замыкания алгебры супергенераторов вне массовой оболочки.//Изв. АН БССР.Сер.физ.-мат.наук. 1987. № 3. С.48-54.

7. Бабич А.А.,Кувшинов В.И.,Федоров Ф.И. О невозможности замыкания алгебры супергенераторов в формализме первого порядка в массивном случае.//Докл.АН БССР. 1987. Т.31. № 7. С.601-604.

Бабич

БАБИЧ АЛЕКСАНДР АНТОНОВИЧ

ТЕОРЕТИКО – ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЕЙСТВИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ФЕДОРОВА

Подписано к печати 8.02.1988. АТ № 13016 . Печать офсетная.
Бесплатно. Формат 60x90 1/16. Объем 0,8 п.л. Тираж 100 экз.
Заказ 88.

Институт физики АН БССР
220602, г.Минск, ГСП, Ленинский пр-т, 70
Отпечатано на ротапринте Института физики АН БССР