

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Теоретические основы электротехники»

**С. А. Грачев, В. В. Соленков, Я. О. Шабловский**

## **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**ПРАКТИКУМ**

**по курсу «Теория линейных электрических цепей»  
для студентов электротехнических специальностей**

**В трех частях**

**Часть 1**

**Электрические цепи постоянного, однофазного  
синусоидального и несинусоидального тока**

**Электронный аналог печатного издания**

**Гомель 2008**

УДК 621.3.011.7(075.8)  
ББК 31.211я73  
Г78

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом  
энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 5 от 28.06.2007 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Электроснабжение» ГГТУ им. П. О. Сухого канд. техн. наук, доц. *А. В. Сычев*

**Грачев, С. А.**  
Г78 Теоретические основы электротехники : практикум по курсу «Теория линейных электрических цепей» для студентов электротехн. специальностей : в 3 ч. Ч. 1. Электрические цепи постоянного, однофазного синусоидального и несинусоидального тока / С. А. Грачев, В. В. Соленков, Я. О. Шабловский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 98 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://gstu.local/lib>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-710-0.

Содержатся базовые теоретические сведения и основные типы задач, связанных с расчетом цепей постоянного, однофазного синусоидального и несинусоидального тока. Цифровые данные, приведенные в задачах, соответствуют истинным данным аппаратов и электро- и радиотехнических устройств.

Для студентов электротехнических специальностей.

УДК 621.3.011.7(075.8)  
ББК 31.211я73

ISBN 978-985-420-710-0 (ч. 1)  
ISBN 978-985-420-713-1

© Грачев С. А., Соленков В. В.,  
Шабловский Я. О., 2008  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2008

## ВВЕДЕНИЕ

Теория линейных электрических цепей курса ТОЭ для студентов электротехнических и электроэнергетических специальностей состоит из трех частей:

1. Цепи постоянного, однофазного синусоидального и несинусоидального тока.
2. Трехфазные цепи. Переходные процессы в цепях с сосредоточенными параметрами.
3. Установившиеся и переходные процессы в цепях с распределенными параметрами.

Предлагаемый практикум по теории линейных электрических цепей охватывает все три названные части. Настоящее издание является первой частью практикума и содержит все основные типы задач, связанных с расчетом цепей постоянного, однофазного синусоидального и несинусоидального тока. Каждая из трех глав практикума содержит краткую сводку базовых теоретических сведений и подробные решения типовых задач.

Для предварительной подготовки по теории линейных электрических цепей рекомендуется использовать следующие учебные издания:

1. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – 10-е изд. – Москва : Гардарики, 2002. – 638 с.
2. Новгородцев, А. Б. Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей / А. Б. Новгородцев. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Питер, 2006. – 576 с.
3. Теоретические основы электротехники : в 3 т. / К. С. Демирчян [и др.]. – 4-е изд. – Санкт-Петербург : Питер, 2004. – Т. 1. – 463 с.
4. Прянишников, В. А. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах / В. А. Прянишников, Е. А. Петров, Ю. М. Осипов. – Санкт-Петербург : КОРОНА-принт, 2003. – 336 с.

# ГЛАВА 1 ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

## Вводные положения

Ток  $I$  и напряжение  $U_{ab}$  участка  $ab$ , имеющего электрическое сопротивление  $R$  (рис. 1.1, а), связаны законом Ома:  $U_{ab} = RI$ . Величину, обратную сопротивлению, называют электрической проводимостью:  $G = 1/R$ . Закон Ома применяется для ветви или для одноконтурной схемы; при его написании следует прежде всего выбрать произвольно некоторое положительное направление тока. Для ветви, не содержащей ЭДС (например, для ветви  $ab$  на рис. 1.2), при положительном направлении тока от точки  $a$  к точке  $b$

$$I = (\varphi_a - \varphi_b) / R_{ab} = U_{ab} / R_{ab},$$

где  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$  – потенциалы точек  $a$  и  $b$ ;  $U_{ab}$  – разность потенциалов (напряжение) между точками  $a$  и  $b$ ;  $R_{ab} = R_4 + R_5$ .

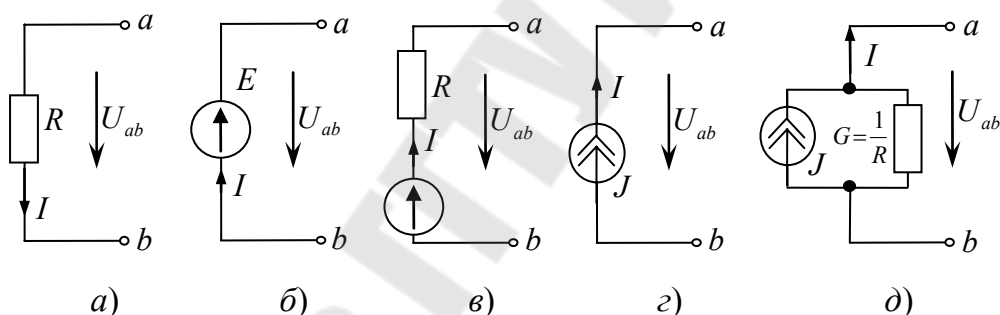


Рис. 1.1

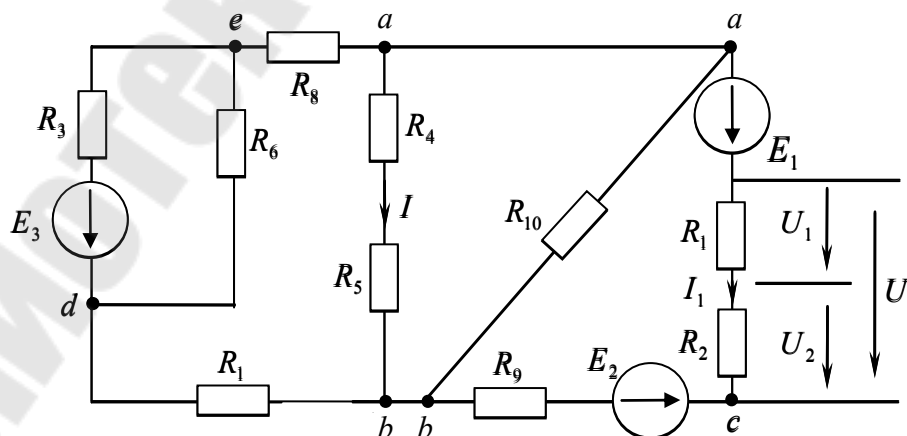


Рис. 1.2

Для ветви схемы, содержащей ЭДС и резисторы, например, для ветви  $acb$  на рис. 1.2:

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b + \sum E}{R_{acb}} = \frac{U_{ab} + E_1 - E_2}{R_{acb}},$$

где  $R_{acb} = R_1 + R_2 + R_9$ .

*Первый закон Кирхгофа:*

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

*Второй закон Кирхгофа:*

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad \text{либо} \quad \sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^n R_k I_k.$$

Для написания первого закона Кирхгофа необходимо задаться положительными направлениями токов каждой ветви. Токи, направленные к узлу, принимаются положительными, а направленные от узла – отрицательными (или наоборот). Для написания второго закона Кирхгофа необходимо произвольно выбрать положительное направление обхода контура. Со знаком «+» берут падения напряжения в тех ветвях, в которых выбранное положительное направление тока совпадает с направлением обхода (независимо от направления ЭДС в этих ветвях), а со знаком «-» берут падения напряжения в тех ветвях, в которых положительное направление тока противоположно направлению обхода. Величины ЭДС, направления которых совпадают с выбранным направлением обхода (независимо от направления тока, протекающего через них), принимаются положительными, а ЭДС, направленные против выбранного направления обхода, – отрицательными.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать контуры, не содержащие источников тока !

*Идеальный источник электродвижущей силы* характеризуется напряжением  $U_{ab}$ , которое не зависит от тока  $I$  и называется электродвижущей силой  $E$  (рис. 1, б):  $U_{ab} = E$ .

*Реальный источник электродвижущей силы* имеет внутреннее сопротивление и изображается схемой последовательного соединения ЭДС  $E$  и внутреннего сопротивления  $R$  (рис. 1.1, в).

*Идеальный источник тока:* ток  $J$  источника не зависит от напряжения  $U_{ab}$ ; внутренняя проводимость источника тока равна нулю, сопротивление источника тока бесконечно велико (рис. 1.1,  $\varepsilon$ ).

*Реальный источник тока* (с внутренней проводимостью  $G = 1/R$ ) может быть изображен в виде параллельной схемы, содержащей источник тока  $J$  и проводимость  $G$  (рис. 1.1,  $\delta$ ).

Переход от схемы реального источника ЭДС к эквивалентной схеме реального источника тока осуществляется по формулам:

$$J = E/R, \quad E = J/G, \quad R = 1/G.$$

*Эквивалентные преобразования схем* не должны привести к изменению токов или напряжений на участках схемы, не подвергшихся преобразованию.

Замена *последовательно* соединенных сопротивлений одним эквивалентным: эквивалентное сопротивление схемы, состоящей из  $n$  последовательно соединенных сопротивлений, равно сумме этих сопротивлений, т. е.

$$R_{\text{эк}} = \sum_{k=1}^n R_k.$$

При этом сопротивления соединены последовательно, если они обтекаются одним и тем же током (например, на рис. 1.2 последовательно соединены сопротивления  $R_1, R_2$  и  $R_9$ ).

Замена *параллельно* соединенных сопротивлений одним эквивалентным: эквивалентное сопротивление схемы, состоящей из  $n$  параллельно соединенных сопротивлений определяется по формуле

$$\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad \text{или} \quad G_{\text{эк}} = \sum_{k=1}^n G_k.$$

При этом сопротивления соединены параллельно, если все они присоединены к одной паре узлов, например, сопротивления  $R_{45} = R_4 + R_5$  и  $R_{10}$  (см. рис. 1.2).

При параллельном соединении  $n$  ветвей (рис. 1.3,  $a$ ) ток каждой из ветвей вычисляется через ток  $I$  неразветвленной части схемы:

$$I_k = I \frac{G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}.$$

В частном случае двух параллельных ветвей (рис. 1.3, б):

$$I_2 = I_1 \frac{G_3}{G_2 + G_3} = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad I_3 = I_1 \frac{G_2}{G_2 + G_3} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

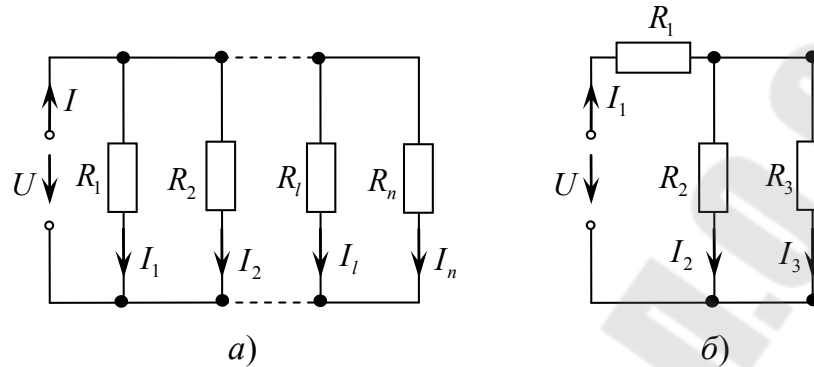


Рис. 1.3

Преобразование треугольника сопротивлений (рис. 1.4, а) в эквивалентную звезду сопротивлений (рис. 1.4, б) производится по формулам:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Преобразование звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник сопротивлений производится по формулам:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}.$$

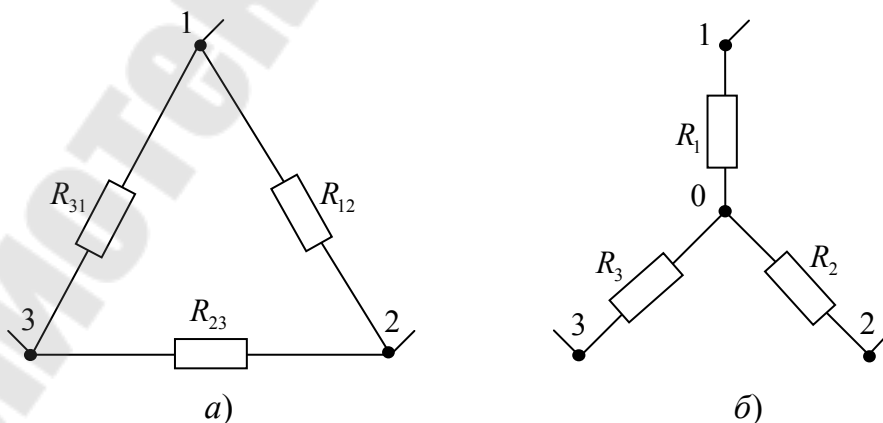


Рис. 1.4

*Баланс мощностей:* для любой замкнутой электрической схемы сумма мощностей  $P_{\text{И}}$ , развиваемых источниками электрической энергии, равна сумме мощностей  $P_{\text{П}}$ , расходуемых в приемниках энергии, т. е.

$$\sum P_{\text{И}} = \sum P_{\text{П}} \quad \text{или} \quad \sum (E_k I_k + U_k J_k) = \sum I_k^2 R_k.$$

Здесь  $\sum E_k I_k$  – алгебраическая сумма, в которой положительны те слагаемые, для которых направления ЭДС  $E_k$  и соответствующего тока  $I_k$  совпадают (в противном случае слагаемое отрицательно);  $\sum U_k J_k$  – алгебраическая сумма, в которой положительны те слагаемые, для которых напряжение на источнике тока и его ток  $J_k$  противоположны; в противном случае слагаемое отрицательно;  $\sum I_k^2 R_k$  – арифметическая сумма, в которой учитываются как внешние сопротивления, так и сопротивления самих источников энергии.

### Примеры решения задач

#### *Эквивалентные преобразования в электрических цепях*

**1.1.** Для схемы рис. 1.1.1 найти эквивалентные сопротивления между зажимами  $a$  и  $b$ ,  $c$  и  $d$ ,  $d$  и  $b$ , если  $R_1 = 6$  Ом;  $R_2 = 5$  Ом;  $R_3 = 15$  Ом;  $R_4 = 30$  Ом;  $R_5 = 6$  Ом.

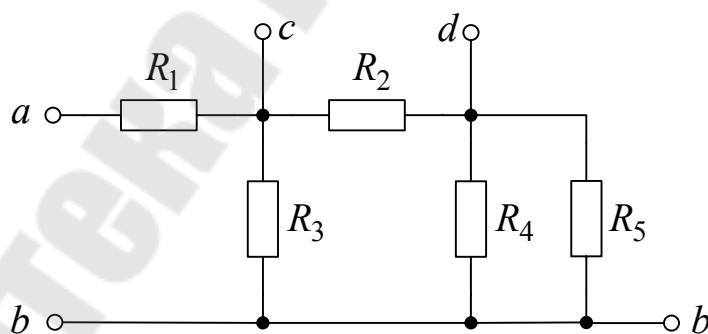


Рис. 1.1.1

#### *Решение*

Рассчитаем эквивалентное сопротивление  $R_{ab}$ . Расчет начинаем с элементов, наиболее удаленных от зажимов  $a$  и  $b$ , а именно с сопротивлений  $R_4$  и  $R_5$ , которые присоединены параллельно к узлам  $b$  и  $d$ . Эквивалентное сопротивление участка  $bd$  равно



$$R_{4,5} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 5 \text{ Ом.}$$

Сопротивление  $R_{4,5}$  соединено последовательно с  $R_2$  (рис. 1.1.2). Общее сопротивление участка  $cbd$  равно

$$R' = R_2 + R_{4,5} = 5 + 5 = 10 \text{ Ом.}$$

Эквивалентная схемы показана на рис. 1.1.3. Схема состоит из сопротивления  $R_1$ , последовательно с которым на участке  $cb$  соединены два параллельных сопротивления  $R'$  и  $R_3$ :

$$R_{cb} = \frac{R' R_3}{R' + R_3} = \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 6 \text{ Ом.}$$

Эквивалентное сопротивление  $R_{cb}$  соединено последовательно с сопротивлением  $R_1$  (рис. 1.1.4). В итоге имеем:

$$R_{ab} = R_1 + R_{cb} = 6 + 6 = 12 \text{ Ом.}$$

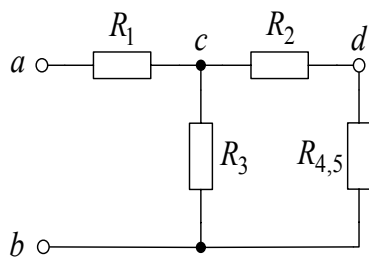


Рис. 1.1.2

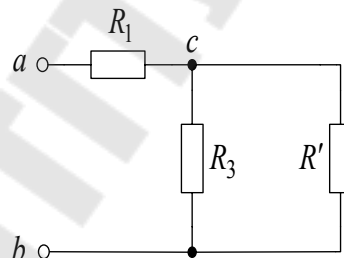


Рис. 1.1.3

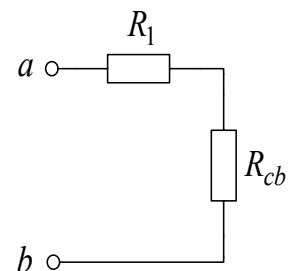


Рис. 1.1.4

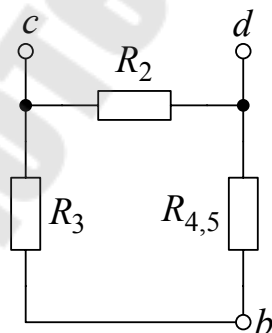


Рис. 1.1.5

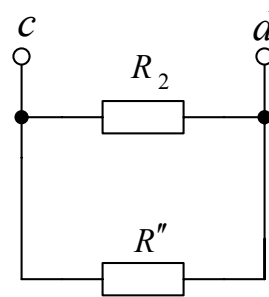


Рис. 1.1.6

Рассчитаем эквивалентное сопротивление  $R_{cd}$ . На его величину сопротивление  $R_1$  не влияет. В данном случае схема содержит участок  $bd$ , который был рассмотрен в предыдущем случае. Его эквивалентное сопротивление  $R_{4,5}$  было найдено выше. Это сопротивление соединено последовательно с сопротивлением  $R_3$  (рис. 1.1.5):

$$R'' = R_3 + R_{4,5} = 15 + 5 = 20 \text{ Ом.}$$

Сопротивление  $R_{cd}$  состоит из двух параллельно соединенных сопротивлений  $R_2$  и  $R''$  (рис. 1.1.6):

$$R_{cd} = \frac{R_2 R''}{R_2 + R''} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \text{ Ом.}$$

Рассчитаем сопротивление  $R_{db}$ . По отношению к зажимам  $d$  и  $b$  схема состоит из трех параллельно соединенных сопротивлений  $R_5$ ,  $R_4$  и  $R_{2,3} = R_2 + R_3 = 5 + 15 = 20 \text{ Ом}$  (рис. 1.1.7 и 1.1.8).

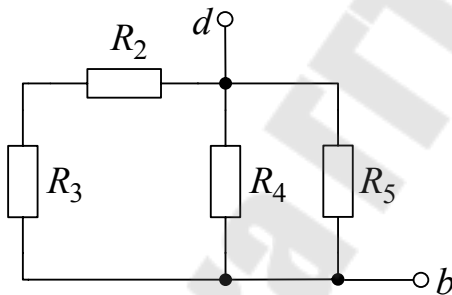


Рис. 1.1.7

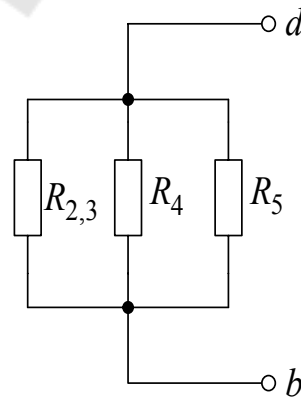


Рис. 1.1.8

С учетом этого

$$\frac{1}{R_{db}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{2,3}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \text{ См,}$$

откуда  $R_{db} = 4 \text{ Ом}$ .

**1.2.** Найти распределение токов в схеме рис. 1.2.1, если  $R_1 = R_2 = 0,5 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 6 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = R_6 = 1 \text{ Ом}$ ;  $R_7 = 2 \text{ Ом}$ ; а напряжение на входе  $U = 120 \text{ В}$ .

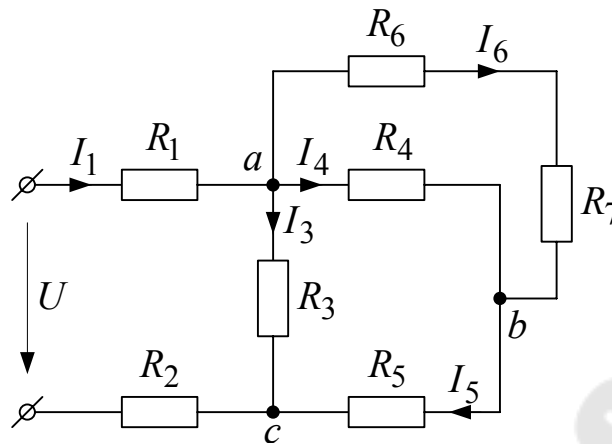


Рис. 1.2.1

*Решение*

Определяем общее сопротивление схемы, заменяя ее отдельные участки эквивалентными сопротивлениями:

$$R_{ab} = \frac{(R_6 + R_7)R_4}{R_6 + R_7 + R_4} = \frac{(1 + 2) \cdot 6}{1 + 2 + 6} = 2 \text{ Ом};$$

$$R_{ac} = \frac{(R_{ab} + R_5)R_3}{R_{ab} + R_5 + R_3} = \frac{(2 + 1) \cdot 6}{2 + 1 + 6} = 2 \text{ Ом}.$$

Общее или входное сопротивление схемы  $R_{вх} = R_{ac} + R_1 + R_2 = 2 + 0,5 + 0,5 = 3 \text{ Ом}.$

Ток в неразветвленной части схемы, т. е. на участках с резисторами  $R_1$  и  $R_2$ ,

$$I_1 = \frac{U}{R_{вх}} = \frac{120}{3} = 40 \text{ А}.$$

Напряжение  $U_{ac}$  можно определить двумя способами:

$$1) U_{ac} = U - (R_1 + R_2)I_1 = 120 - (0,5 + 0,5) \cdot 40 = 80 \text{ В};$$

$$2) U_{ac} = R_{ac}I_1 = 2 \cdot 40 = 80 \text{ В}.$$

В резисторе  $R_3$  ток определяется по закону Ома:

$$I_3 = \frac{U_{ac}}{R_3} = \frac{80}{6} = 13,3 \text{ А}.$$

В резисторе  $R_5$  ток

$$I_5 = \frac{U_{ac}}{R_5 + R_{ab}} = \frac{80}{1 + 2} = 26,7 \text{ А}.$$

Проверка:  $I_1 = I_3 + I_5$ , или  $40 = 13,3 + 26,7$  А.

Напряжение на участке  $ab$

$$U_{ab} = R_{ab}I_5 = 2 \cdot 26,7 = 53,4 \text{ В}$$

или

$$U_{ab} = U_{ac} - R_5I_5 = 80 - 26,7 = 53,3 \text{ В.}$$

В резисторе  $R_4$  ток

$$I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4} = \frac{53,3}{6} = 8,9 \text{ А.}$$

В резисторах  $R_6$  и  $R_7$  ток

$$I_6 = \frac{U_{ab}}{R_6 + R_7} = \frac{53,3}{1+2} = 17,8 \text{ А.}$$

Проверка:  $I_5 = I_4 + I_6$ , или  $26,7 = 8,9 + 17,8$ .

**1.3.** Определить входное сопротивление электрической схемы (рис. 1.3.1) и все токи в ней, если  $U = 114$  В;  $R_1 = 30$  Ом;  $R_2 = R_3 = 10$  Ом;  $R_4 = 26$  Ом;  $R_5 = 11$  Ом;  $R_6 = 10$  Ом;  $R_7 = 40$  Ом;  $R_8 = 50$  Ом.

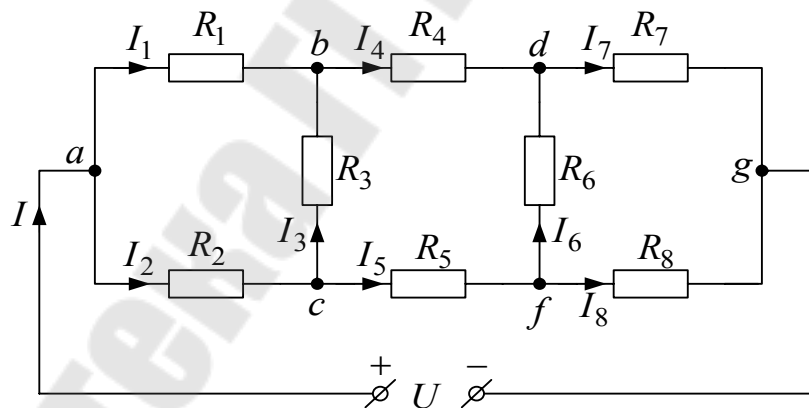


Рис. 1.3.1

*Решение*

Заменим эквивалентными звездами треугольники сопротивлений с вершинами в узлах  $abc$  и  $dfg$  (рис. 1.3.2). Подсчитаем сопротивления  $r_1, r_2, r_3$  лучей звезды, эквивалентной треугольнику  $abc$  сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$ :

$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 10}{30 + 10 + 10} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 10}{30 + 10 + 10} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{30 + 10 + 10} = 2 \text{ Ом}.$$

Определим сопротивления  $r_4, r_5, r_6$  лучей звезды, эквивалентной треугольнику  $dfg$  сопротивлений  $R_6, R_7, R_8$ :

$$r_4 = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40 + 50} = 4 \text{ Ом};$$

$$r_5 = \frac{R_6 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{10 \cdot 50}{10 + 40 + 50} = 5 \text{ Ом};$$

$$r_6 = \frac{R_7 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{40 \cdot 50}{10 + 40 + 50} = 20 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление всей схемы:

$$R = r_1 + \frac{R' R''}{R' + R''} + r_6 = 6 + \frac{36 \cdot 18}{36 + 18} + 20 = 38 \text{ Ом},$$

где

$$R' = r_2 + R_4 + r_4 = 36 \text{ Ом}; \quad R'' = r_3 + R_5 + r_5 = 18 \text{ Ом}.$$

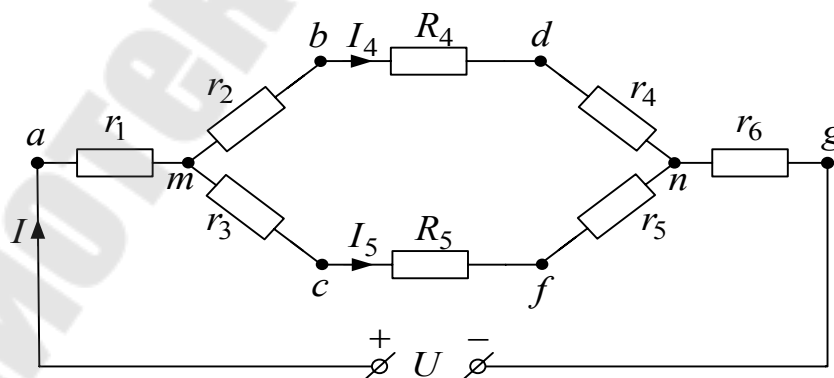


Рис. 1.3.2

После преобразования в схеме сохранились неизменными значения токов  $I$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  тех участков схемы, которые не подвергались преобразованию. Ток в неразветвленной части схемы:

$$I = U / R = 114 / 38 = 3 \text{ А.}$$

Токи в параллельных ветвях:

$$I_4 = I \frac{R''}{R' + R''} = 3 \frac{18}{36 + 18} = 1 \text{ А}; \quad I_5 = I \frac{R'}{R' + R''} = I - I_4 = 2 \text{ А.}$$

Теперь найдем токи в ветвях, подвергшихся преобразованию. Для этого, воспользовавшись законом Ома и вторым законом Кирхгофа, по схеме рис. 1.3.2 определим напряжения между точками  $a$  и  $b$ ,  $a$  и  $c$ ,  $c$  и  $b$ ,  $d$  и  $g$ ,  $f$  и  $g$ ,  $f$  и  $d$ :

$$U_{ab} = r_1 I + r_2 I_4 = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 24 \text{ В};$$

$$U_{ac} = r_1 I + r_3 I_5 = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 22 \text{ В};$$

$$U_{cb} = U_{ab} - U_{ac} = 24 - 22 = 2 \text{ В};$$

$$U_{dg} = r_4 I_4 + r_6 I = 4 \cdot 1 + 20 \cdot 3 = 64 \text{ В};$$

$$U_{fg} = r_5 I_5 + r_6 I = 5 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 70 \text{ В};$$

$$U_{fd} = U_{fg} - U_{dg} = 70 - 64 = 6 \text{ В.}$$

Искомые токи определяем по закону Ома:

$$I_1 = U_{ab} / R_1 = 24 / 30 = 0,8 \text{ А}; \quad I_2 = U_{ac} / R_2 = 22 / 10 = 2,2 \text{ А};$$

$$I_3 = U_{cb} / R_3 = 2 / 10 = 0,2 \text{ А}; \quad I_6 = U_{fd} / R_6 = 6 / 10 = 0,6 \text{ А};$$

$$I_7 = U_{dg} / R_7 = 64 / 40 = 1,6 \text{ А}; \quad I_8 = U_{fg} / R_8 = 70 / 50 = 1,4 \text{ А.}$$

**1.4.** Для электрической схемы рис. 1.4.1 определить мощность потерь в резисторе с сопротивлением  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ , если  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 5 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 2 \text{ Ом}$ ;  $J_1 = 20 \text{ А}$ ;  $J_2 = 20 \text{ А}$ .

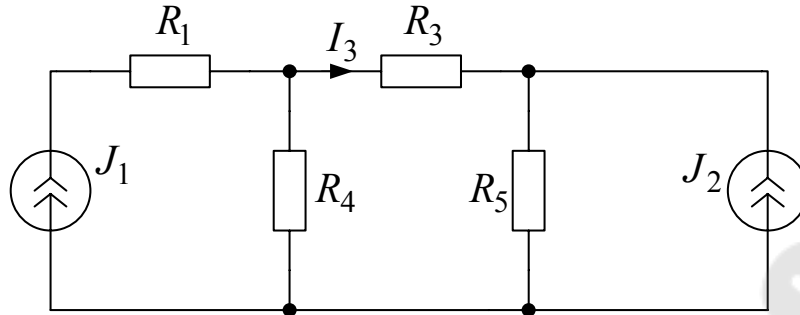


Рис. 1.4.1

*Решение*

Преобразуем источники тока  $J_1$  и  $J_2$  в эквивалентные источники ЭДС (рис. 1.4.2). Значения ЭДС эквивалентных источников:

$$E_1 = R_4 J_1 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ В}; \quad E_2 = R_5 J_2 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ В}.$$

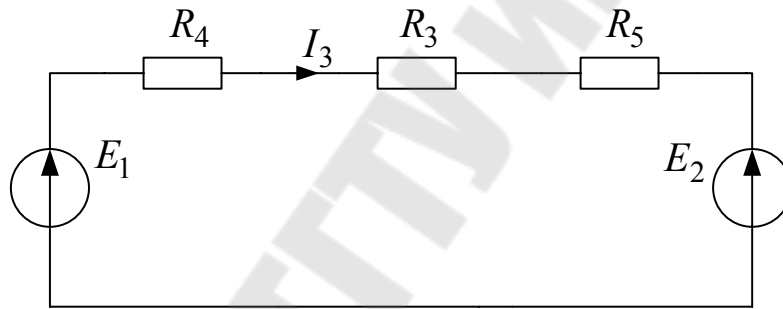


Рис. 1.4.2

Ток и мощность потерь в исследуемом резисторе:

$$I_3 = \frac{E_1 - E_2}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{100 - 40}{3 + 5 + 2} = 6 \text{ А}; \quad P_3 = R_3 I_3^2 = 3 \cdot 6^2 = 108 \text{ Вт}.$$

**Расчет цепей постоянного тока на основе уравнений Кирхгофа**

**1.5.** Найти токи в схеме рис. 1.5.1 и составить баланс мощностей, если  $E_1 = 15 \text{ В}$ ;  $E_2 = 70 \text{ В}$ ;  $E_3 = 5 \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 2 \text{ Ом}$ ;  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 2,5 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 15 \text{ Ом}$ .

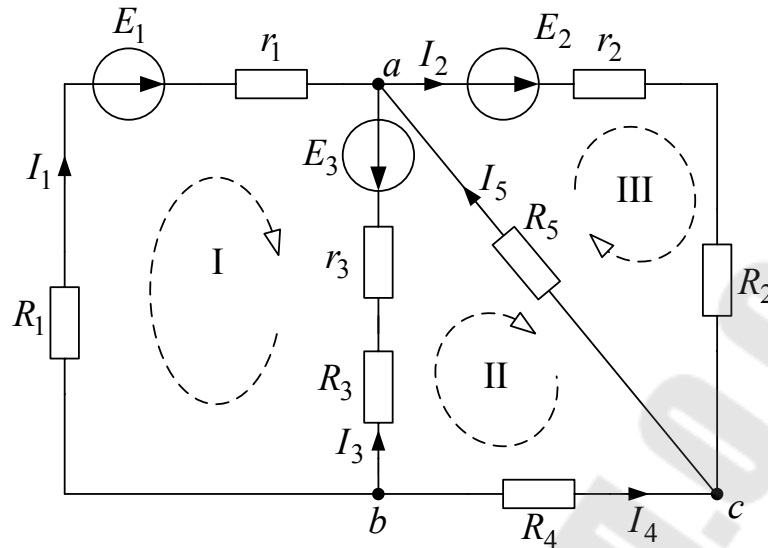


Рис. 1.5.1

*Решение*

Выберем и обозначим стрелками условные положительные направления токов и направления обхода трех независимых контуров: I, II, III. Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\text{для узла } a: -I_1 + I_2 - I_3 - I_5 = 0; \quad (1.1)$$

$$\text{для узла } b: I_1 + I_3 + I_4 = 0; \quad (1.2)$$

$$\text{для контура I: } (R_1 + r_1)I_1 - (R_3 + r_3)I_3 = E_1 + E_3; \quad (1.3)$$

$$\text{для контура II: } (R_3 + r_3)I_3 - R_4I_4 - R_5I_5 = -E_3; \quad (1.4)$$

$$\text{для контура III: } (R_2 + r_2)I_2 + R_5I_5 = E_2. \quad (1.5)$$

После подстановки числовых значений уравнения (1.3)–(1.5) принимают следующий вид:

$$6I_1 - 10I_3 = 20; \quad (1.3a)$$

$$10I_3 - 2,5I_4 - 15I_5 = -5; \quad (1.4a)$$

$$5I_2 + 15I_5 = 70. \quad (1.5a)$$

Решая систему уравнений (1.1), (1.2), (1.3a)–(1.5a), получим:

$$I_1 = 5 \text{ A}, \quad I_2 = 8 \text{ A}; \quad I_3 = 1 \text{ A}; \quad I_4 = -6 \text{ A}; \quad I_5 = 2 \text{ A}.$$



Баланс мощностей для рассматриваемой схемы:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_3 I_3 = I_1^2 (R_1 + r_1) + I_2^2 (R_2 + r_2) + I_3^2 (R_3 + r_3) + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5,$$

или

$$15 \cdot 5 + 70 \cdot 8 - 5 \cdot 1 = 5^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 2,5 + 2^2 \cdot 15,$$

имеем тождество:  $630 = 630$ .

**1.6.** Найти все токи в схеме рис. 1.6.1, если  $E_1 = 40$  В;  $E_2 = 20$  В;  $E_4 = 10$  В;  $J_6 = 3$  А;  $R_1 = 5$  Ом;  $R_3 = 5$  Ом;  $R_4 = 20$  Ом;  $R_5 = 10$  Ом.

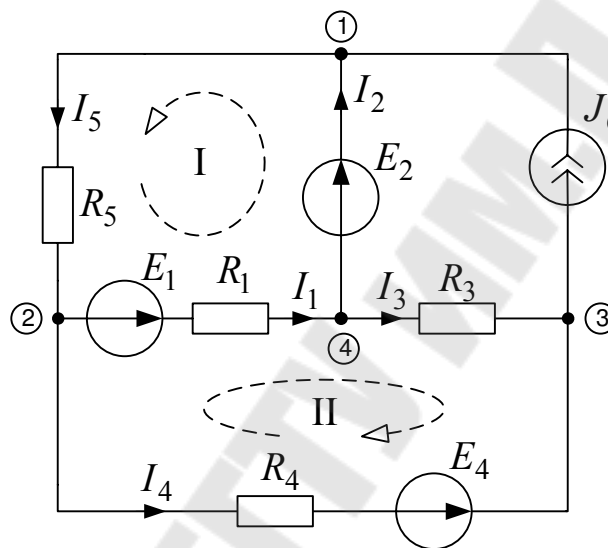


Рис. 1.6.1

*Решение*

Выберем направления токов в ветвях, как показано на рис. 1.6.1, и составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2, 3:

$$-I_2 + I_5 - J_6 = 0; \quad I_1 + I_4 - I_5 = 0; \quad I_3 + I_4 - J_6 = 0.$$

В схеме три независимых контура. По второму закону Кирхгофа уравнения составляем только для контуров I и II, в которые не входит ветвь с источником тока. Выбрав направления обхода этих контуров, как показано на рис. 1.6.1, запишем:

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_5 I_5 = E_1 + E_2; \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = E_1 - E_4. \end{cases}$$

Полную систему уравнений, составленных по законам Кирхгофа, можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & R_5 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_6 \\ 0 \\ J_6 \\ E_1 + E_2 \\ E_1 - E_4 \end{bmatrix}$$

Подстановка значений параметров элементов дает уравнение

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 5 & -20 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Решая полученное матричное уравнение, находим значения токов:

$$I_1 = 3,882 \text{ А}; I_2 = 1,058 \text{ А}; I_3 = 2,823 \text{ А}; I_4 = 0,176 \text{ А}; I_5 = 4,058 \text{ А}.$$

### *Метод контурных токов*

**1.7.** Найти токи в схеме, схема которой изображена на рис. 1.7.1.

Дано:  $E_1 = 100 \text{ В}$ ;  $E_2 = 30 \text{ В}$ ;  $E_3 = 10 \text{ В}$ ;  $E_4 = 6 \text{ В}$ ;  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 6 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 5 \text{ Ом}$ ;  $R_6 = 15 \text{ Ом}$ ;  $r_4 = 1 \text{ Ом}$ .

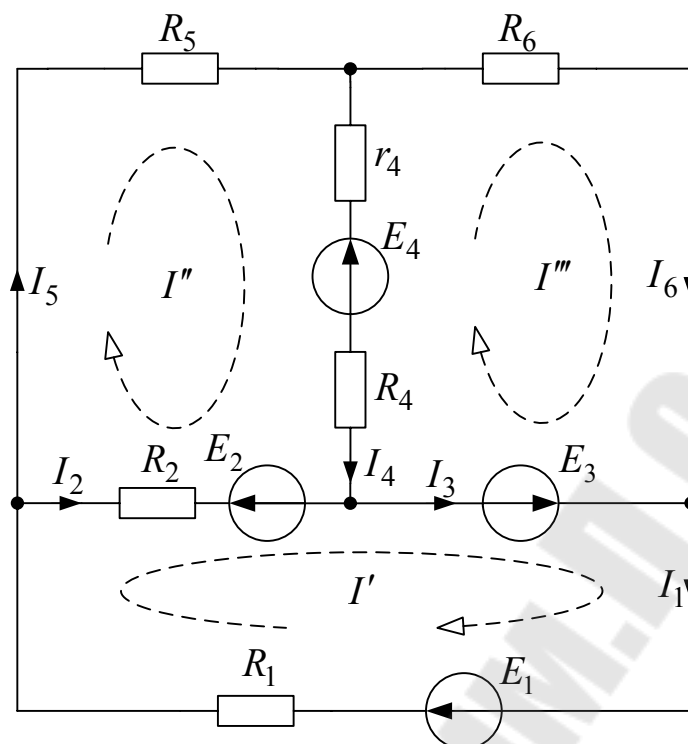


Рис. 1.7.1

*Решение*

Выберем направления контурных токов  $I'$ ,  $I''$ ,  $I'''$ , как показано на рис. 1.7.1. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)I' - R_2I'' = E_1 - E_2 + E_3; \\ -R_2I' + (R_2 + R_5 + R_4 + r_4)I'' - (R_4 + r_4)I''' = E_2 - E_4; \\ -(R_4 + r_4)I'' + (R_6 + R_4 + r_4)I''' = E_4 - E_3. \end{cases}$$

После подстановки числовых значений имеем:

$$\begin{aligned} 20I' - 10I'' &= 80; \\ -10I' + 21I'' - 7I''' &= 24; \\ -7I'' + 22I''' &= 16. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, найдем контурные токи:

$$I' = 5 \text{ A}; \quad I'' = 4 \text{ A}; \quad I''' = 2 \text{ A}.$$

Ток  $I_1$  имеет направление контурного тока  $I'$  и равен

$$I_1 = I' = 5 \text{ A}.$$

Ток  $I_5$  имеет направление контурного тока  $I''$  и равен

$$I_5 = I'' = 4 \text{ А.}$$

Ток  $I_2$  создается наложением контурных токов  $I'$  и  $I''$ , имея направление большего контурного тока  $I'$ :

$$I_2 = I' - I'' = 5 - 4 = 1 \text{ А.}$$

Ток  $I_4$  создается наложением контурных токов  $I''$  и  $I'''$ , имея направление контурного тока  $I''$ :

$$I_4 = I'' - I''' = 4 - 2 = 2 \text{ А.}$$

Ток  $I_3$  создается наложением контурных токов  $I'$  и  $I'''$ , имея направление тока  $I'$ :

$$I_3 = I' - I''' = 5 - 2 = 3 \text{ А.}$$

**1.8.** Схема (рис. 1.8.1) содержит источник ЭДС  $E = 60 \text{ В}$ , источник тока  $J = 50 \text{ А}$  и резисторы, сопротивления которых  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 16 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 2 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 8 \text{ Ом}$ . Рассчитать все токи, составить баланс мощностей.

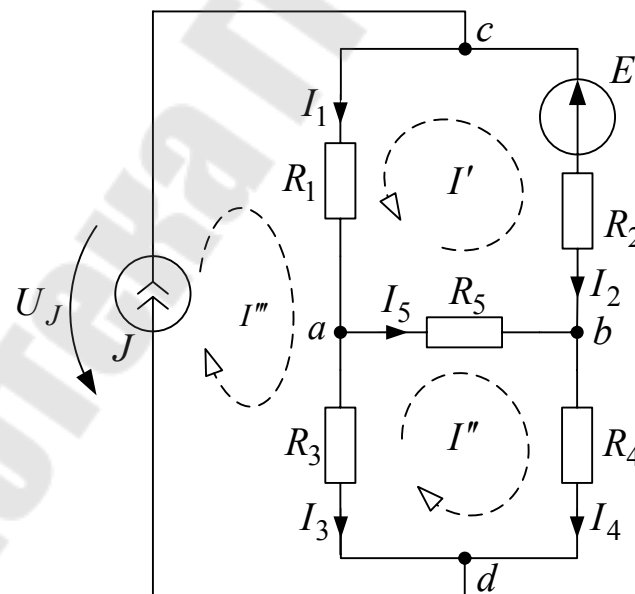


Рис. 1.8.1

### Решение

Выберем направления контурных токов  $I'$ ,  $I''$ ,  $I''' = J$  как показано на рис. 1.8.1. Составим систему уравнений для первого и второго контуров:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)I' + R_5I'' + R_1J = E; \\ R_5I' + (R_3 + R_4 + R_5)I'' - R_3J = 0. \end{cases}$$

Подставляя числовые значения, имеем:

$$17I' + 8I'' = -190; \quad 8I' + 26I'' = 800.$$

Решая эти уравнения, найдем контурные токи:

$$I' = -30 \text{ А}; \quad I'' = 40 \text{ А}.$$

Искомые токи:

$$I_1 = I' + J = -30 + 50 = 20 \text{ А}; \quad I_2 = -I' = 30 \text{ А};$$

$$I_3 = -I'' + J = -40 + 50 = 10 \text{ А}; \quad I_4 = I'' = 40 \text{ А};$$

$$I_5 = I' + I'' = -30 + 40 = 10 \text{ А}.$$

Составим баланс мощностей:

$$P_{\text{ист}} = -EI_2 + U_J J; \quad P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5.$$

$$U_J = U_{cd} = R_1 I_1 + R_3 I_3 = 5 \cdot 20 + 16 \cdot 10 = 260 \text{ В}.$$

В итоге имеем тождество:

$$P_{\text{ист}} = -60 \cdot 30 + 260 \cdot 50 = 11200 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{пр}} = 20^2 \cdot 5 + 30^2 \cdot 4 + 10^2 \cdot 16 + 40^2 \cdot 2 + 10^2 \cdot 8 = 11200 \text{ Вт}.$$

### Метод узловых потенциалов

**1.9.** В схеме (рис. 1.9.1) найти все токи, если  $E_1 = 4 \text{ В}$ ;  $E_3 = 2 \text{ В}$ ;  $E_5 = 12 \text{ В}$ ;  $J_3 = 2 \text{ А}$ ;  $R'_1 = R''_1 = 4 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 8 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 1 \text{ Ом}$ .

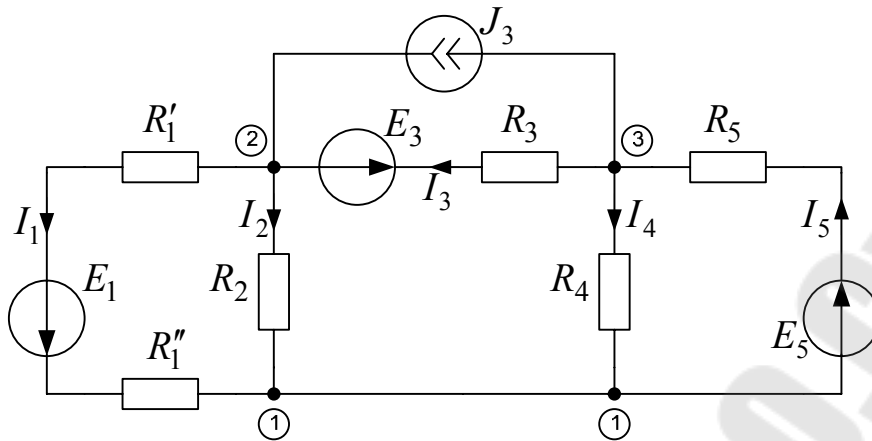


Рис. 1.9.1

*Решение*

Выберем положительные направления токов как показано на рис. 1.9.1. Примем  $\varphi_1 = 0$  и запишем уравнения для узлов 2 и 3:

$$\begin{cases} \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} = J_3 - \frac{E_1}{R_1' + R_1''} - \frac{E_3}{R_3}; \\ \varphi_3 G_{33} - \varphi_2 G_{23} = -J_3 + \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_5}{R_5}, \end{cases}$$

где

$$G_{22} = \frac{1}{R_1' + R_1''} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,125 \text{ См};$$

$$G_{23} = \frac{1}{R_3} = 0,5 \text{ См}; \quad G_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 1 = 1,625 \text{ См}.$$

Подставив численные значения, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1,125\varphi_2 - 0,5\varphi_3 &= 2 - 0,5 - 1; \\ -0,5\varphi_2 + 1,625\varphi_3 &= -2 + 1 + 12. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений дает:

$$\varphi_2 = 4 \text{ В}; \quad \varphi_3 = 8 \text{ В}.$$

Токи в ветвях определим по обобщенному закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{R_1' + R_1''} = \frac{4 + 4}{4 + 4} = 1 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 - E_3}{R_3} = \frac{8 - 4 - 2}{2} = 1 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} = \frac{8}{8} = 1 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_5}{R_5} = \frac{0 - 8 + 12}{1} = 4 \text{ А}.$$

**1.10.** В схеме рис. 1.10.1  $E_1 = 85 \text{ В}$ ;  $E_2 = 84 \text{ В}$ ;  $E_3 = 5 \text{ В}$ ;  $E_4 = 12 \text{ В}$ ;  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_6 = 4 \text{ Ом}$ . Найти все токи.

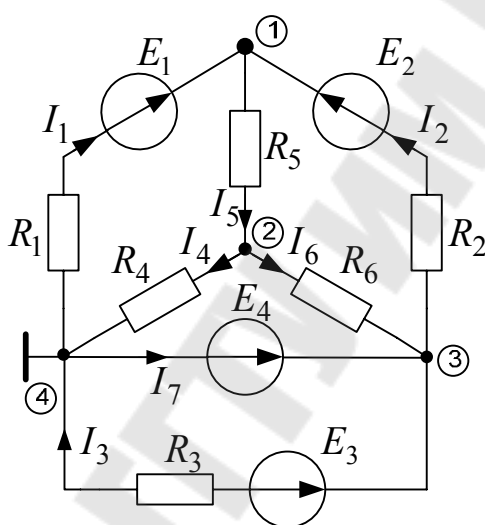


Рис. 1.10.1

*Решение*

Примем потенциал узла 4 равным нулю ( $\varphi_4 = 0$ ). Тогда потенциал узла 3 будет равен  $\varphi_3 = E_4 = 12 \text{ В}$ , а система уравнений для определения потенциалов узлов 1 и 2 будет иметь вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \varphi_3 G_{13} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}; \\ -\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

где

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0,325 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = 0,45 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См}; \quad G_{13} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См};$$

$$G_{23} = \frac{1}{R_6} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ См}.$$

Подставляя эти значения, а также значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $R_1$  и  $R_2$  в уравнения (1.10), получим:

$$\begin{cases} 0,325\varphi_1 - 0,1\varphi_2 - 0,1\varphi_3 = \frac{85}{85} + \frac{84}{10}; \\ -0,1\varphi_1 + 0,45\varphi_2 - 0,25\varphi_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\varphi_1 = 69 \text{ В}; \quad \varphi_2 = 22 \text{ В}.$$

Используя обобщенный закон Ома, находим:

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = \frac{-69 + 85}{8} = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_2}{R_2} = \frac{12 - 69 + 84}{10} = 2,7 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 - E_3}{R_3} = \frac{12 - 5}{10} = 0,7 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_4} = \frac{22}{10} = 2,2 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5} = \frac{69 - 22}{10} = 4,7 \text{ А}.$$

Ток  $I_7$  не определяется по закону Ома. Он может быть вычислен с помощью первого закона Кирхгофа:

$$I_7 = I_3 + I_4 - I_1 = 0,7 + 2,2 - 0,19 = 2,71 \text{ А}.$$

**1.11.** Рассчитать все токи в схеме (рис. 1.11.1), если  $E_1 = 160 \text{ В}$ ;  $E_2 = 100 \text{ В}$ ;  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 150 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 100 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 40 \text{ Ом}$ .



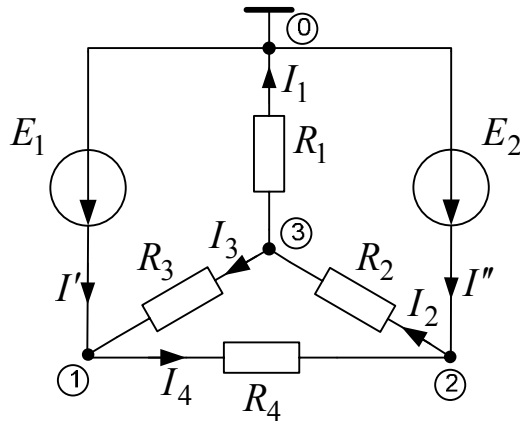


Рис. 1.11.1

*Решение*

В схеме две ветви с идеальными источниками ЭДС, имеющие общий узел. Заземлив их общий узел, можно сразу определить потенциалы двух узлов, ограничивающих эти ветви:

$$\varphi_0 = 0; \quad \varphi_1 = E_1 = 160 \text{ В}; \quad \varphi_2 = E_2 = 100 \text{ В}.$$

Неизвестным остается потенциал узла 3, для которого составляем уравнение

$$\varphi_3 G_{33} - \varphi_1 G_{31} - \varphi_2 G_{32} = 0,$$

где

$$G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{100} + \frac{1}{150} + \frac{1}{100} = 0,0267 \text{ См};$$

$$G_{31} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ См}; \quad G_{32} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{150} = 0,0067 \text{ См}.$$

Решая уравнение, получаем:  $\varphi_3 = 85 \text{ В}$ .

Токи  $I_1 \div I_4$  находим по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_3}{R_1} = \frac{85}{100} = 0,85 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_2} = \frac{100 - 85}{150} = 0,1 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_3} = \frac{85 - 160}{100} = -0,75 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_4} = \frac{160 - 100}{40} = 1,5 \text{ А}.$$

Токи в ветвях с идеальными источниками ЭДС находим по первому закону Кирхгофа:

$$I' = I_4 - I_3 = 1,5 - (-0,75) = 2,25 \text{ A};$$

$$I'' = I_2 - I_4 = 0,1 - 1,5 = -1,4 \text{ A}.$$

Полученные при расчете отрицательные значения токов  $I_3$  и  $I_5$  указывают на то, что истинные направления этих токов противоположны указанным на схеме рис. 1.11.1.

**1.12.** Найти все токи в схеме (рис. 1.12.1), если  $E = 100 \text{ В}$ ;  $E_2 = 10 \text{ В}$ ;  $E_5 = 40 \text{ В}$ ;  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 10 \text{ Ом}$ .

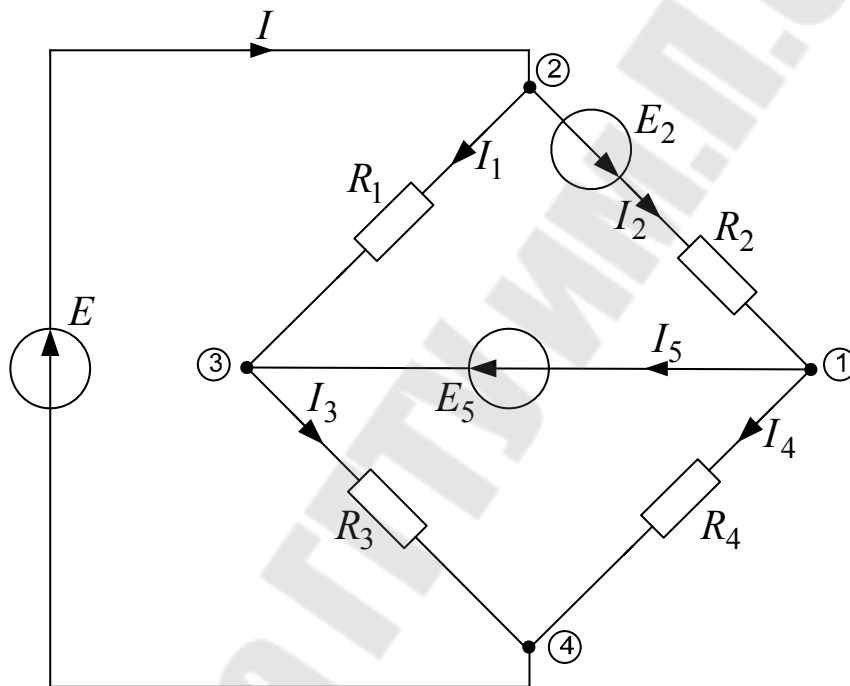


Рис. 1.12.1

*Решение*

В заданной схеме  $R_{1-3} = R_{2-4} = 0$ . Поэтому при составлении уравнений по методу узловых потенциалов для любого из узлов заданной схемы в эти уравнения войдут слагаемые, имеющие бесконечно большую проводимость. Это затруднение можно обойти.

Введение во все ветви, примыкающие к какому-либо узлу, одинаковых ЭДС, направленных к узлу (или от него), не влияет на распределение токов в схеме, т. к. в уравнениях второго закона Кирхгофа для любого контура эти ЭДС взаимно компенсируются. Воспользовавшись этим, введем во все ветви, примыкающие к узлу 1, ЭДС  $E'$ , направленные к этому узлу и равные  $E_5$  (рис. 1.12.2). Тогда окажется,

что в ветви 1–3 действуют две одинаковые и противоположно направленные ЭДС. Их сумма равна нулю, поэтому точки 1 и 3 равнопотенциальны и их можно объединить (рис. 1.12.3). Полученная эквивалентная схема имеет три узла и одну ветвь, содержащую идеальный источник ЭДС  $E$ . Поэтому по методу узловых потенциалов надо составить всего одно уравнение. Составим его для узла 1.

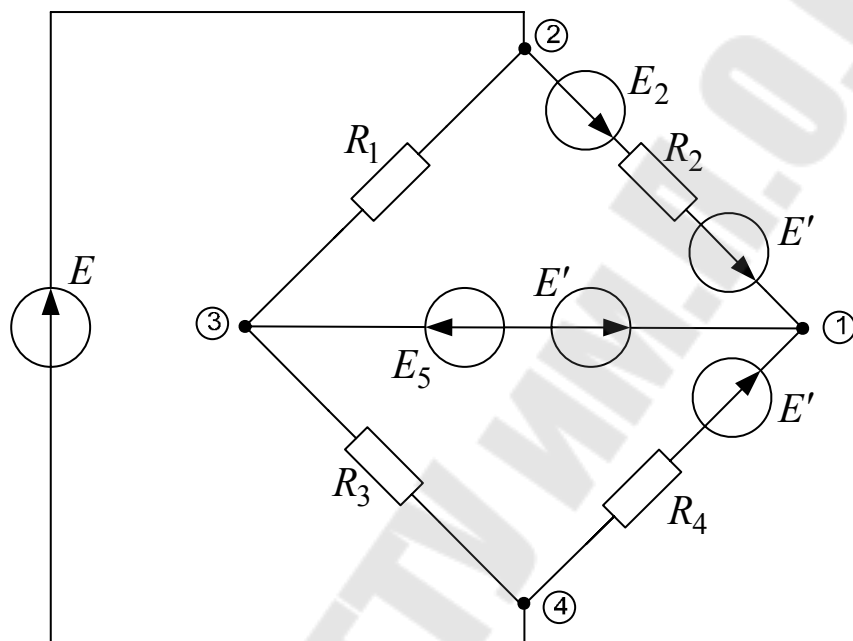


Рис. 1.12.2

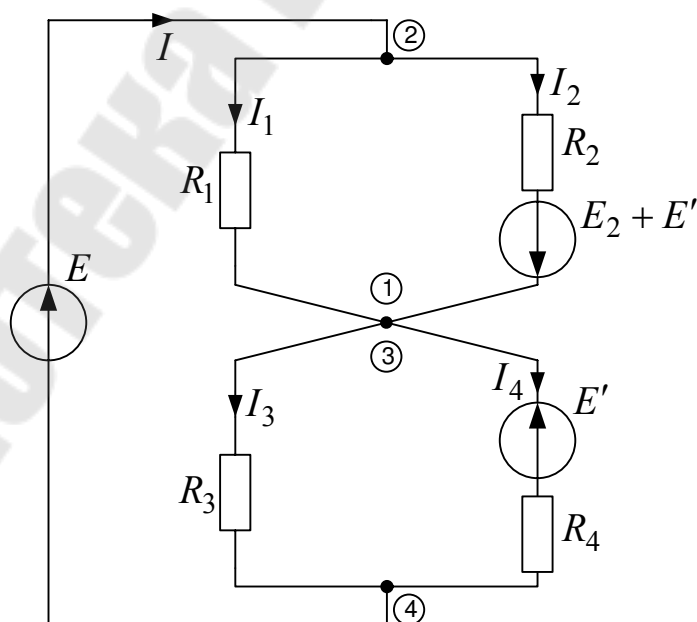


Рис. 1.12.3

Примем  $\varphi_4 = 0$  В. Тогда  $\varphi_2 = E = 100$  В, а уравнение для узла 1 имеет такой вид:

$$\varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \varphi_4 G_{14} = (E_2 + E') \frac{1}{R_2} + E' \frac{1}{R_4}.$$

Здесь

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0,233 \text{ См};$$

$$G_{12} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = 0,083 \text{ См};$$

$$G_{14} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0,15 \text{ См}.$$

После подстановки числовых значений уравнение для потенциала  $\varphi_1$  принимает вид:

$$0,233\varphi_1 - 0,083\varphi_2 - 0,15\varphi_4 = (10 + 40) \frac{1}{30} + 40 \frac{1}{10}.$$

Решая это уравнение, получим:  $\varphi_1 = 60$  В.

Токи в ветвях исходной схемы найдем по обобщенному закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_1} = \frac{100 - 60}{20} = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_2 + E'}{R_2} = \frac{100 - 60 + 10 + 40}{30} = 3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_3} = \frac{60 - 0}{20} = 3 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 - E'}{R_4} = \frac{60 - 0 - 40}{10} = 2 \text{ А}.$$

Токи  $I$  и  $I_5$  определим по первому закону Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 = 2 + 3 = 5 \text{ А}; \quad I_5 = I_2 - I_4 = 3 - 2 = 1 \text{ А}.$$

**1.13.** Рассчитать токи в схеме рис. 1.13.1, если  $E_1 = 10$  В;  $E_2 = 20$  В;  $E_3 = 30$  В;  $J = 1$  А;  $R_2 = 20$  Ом;  $R_3 = 30$  Ом;  $R_4 = 40$  Ом;  $R_5 = 50$  Ом.

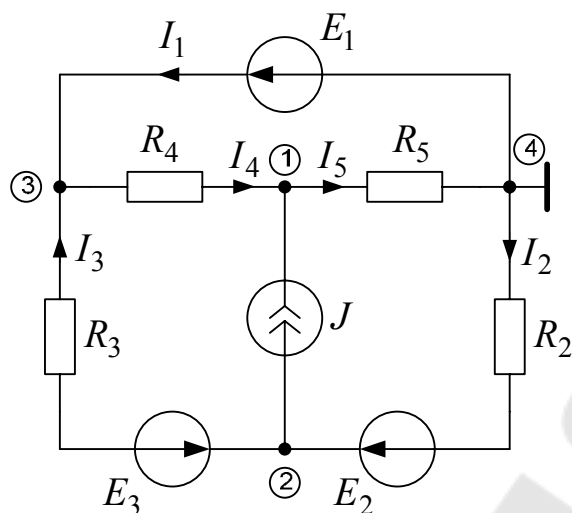


Рис. 1.13.1

*Решение*

Примем  $\varphi_4 = 0$ . Тогда  $\varphi_3 = E_1 = 10$  В. Составляем уравнения для неизвестных потенциалов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\varphi_1 G_{11} - \varphi_3 G_{13} = J;$$

$$\varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} = \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} - J,$$

где

$$G_{11} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{40} + \frac{1}{50} = 0,045 \text{ См}; \quad G_{13} = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = 0,083 \text{ См}; \quad G_{23} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{30} = 0,033 \text{ См}.$$

В обоих уравнениях для узловых потенциалов отсутствует слагаемое  $-\varphi_2 G_{12}$ , т. к.  $G_{12} = 0$ . После подстановки числовых значений уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} 0,045\varphi_1 - 0,025\varphi_3 = 1; \\ 0,083\varphi_2 - 0,033\varphi_3 = 1. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим:  $\varphi_1 = 27,78$  В,  $\varphi_2 = 16$  В. Токи  $I_2 - I_6$  находим по обобщенному закону Ома:

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{-16 + 20}{20} = 0,2 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_3}{R_3} = \frac{16 - 10 - 30}{30} = -0,8 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} = \frac{10 - 27,78}{40} = -0,445 \text{ A}; \quad I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_5} = \frac{27,78}{50} = 0,555 \text{ A}.$$

Ток  $I_1$  находим по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 = I_4 - I_3 = -0,445 + 0,8 = 0,355 \text{ A}.$$

### Метод наложения

**1.14.** Определить токи во всех ветвях схемы рис. 1.14.1, если  $E = 25 \text{ В}$ ;  $J = 12,5 \text{ А}$ ;  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_H = 5 \text{ Ом}$ .

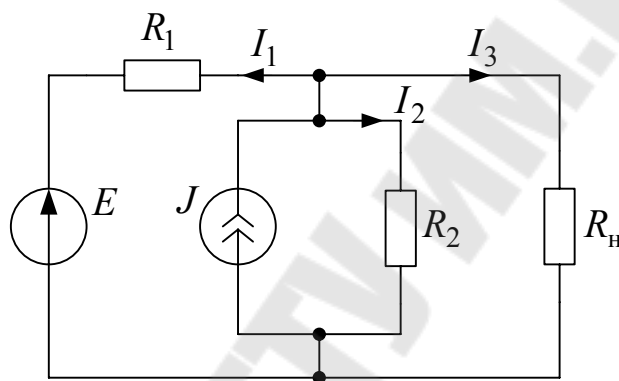


Рис. 1.14.1

### Решение

При расчете схемы методом наложения рассматриваем отдельно действие источника ЭДС  $E$  и источника тока  $J$ . Эквивалентные схемы для определения частичных токов приведены на рис. 1.14.2 и 1.14.3.

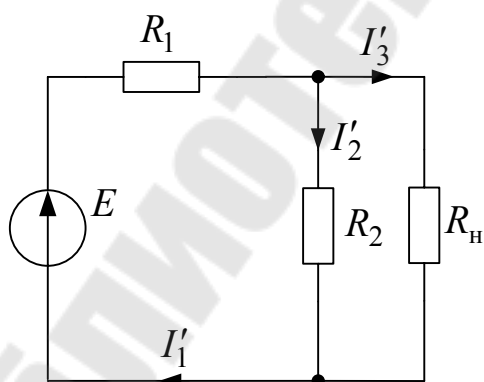


Рис. 1.14.2

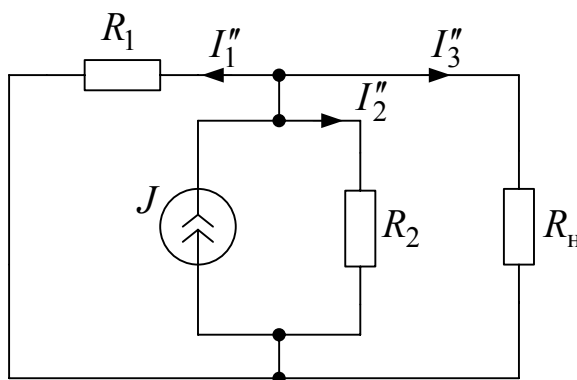


Рис. 1.14.3

В схеме рис. 1.14.2:

$$I'_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_H}{R_2 + R_H}} = \frac{25}{100 + \frac{20 \cdot 5}{20 + 5}} = 5 \text{ A};$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_H}{R_2 + R_H} = 5 \frac{5}{20 + 5} = 1 \text{ A}; \quad I'_3 = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_H} = 5 \frac{20}{20 + 5} = 4 \text{ A}.$$

В схеме рис. 1.14.3:

$$I''_1 = J \frac{\frac{R_2 \cdot R_H}{R_2 + R_H}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_H}{R_2 + R_H}} = 12,5 \frac{\frac{20 \cdot 5}{20 + 5}}{1 + \frac{20 \cdot 5}{20 + 5}} = 10 \text{ A};$$

$$I''_2 = J \frac{\frac{R_1 \cdot R_H}{R_1 + R_H}}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_H}{R_1 + R_H}} = 12,5 \frac{\frac{1 \cdot 5}{1 + 5}}{20 + \frac{1 \cdot 5}{1 + 5}} = 0,5 \text{ A};$$

$$I''_3 = J - I''_1 - I''_2 = 12,5 - 10 - 0,5 = 2 \text{ A}.$$

В итоге имеем:

$$I_1 = I''_1 - I'_1 = 10 - 5 = 5 \text{ A}; \quad I_2 = I''_2 + I'_2 = 0,5 + 1 = 1,5 \text{ A};$$

$$I_3 = I''_3 + I'_3 = 2 + 4 = 6 \text{ A}.$$

**1.15.** В схеме рис. 1.15.1 найти ток  $I_1$ , если  $E_1 = 16 \text{ В}$ ;  $E_2 = 14,29 \text{ В}$ ;  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 2 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 8 \text{ Ом}$ .

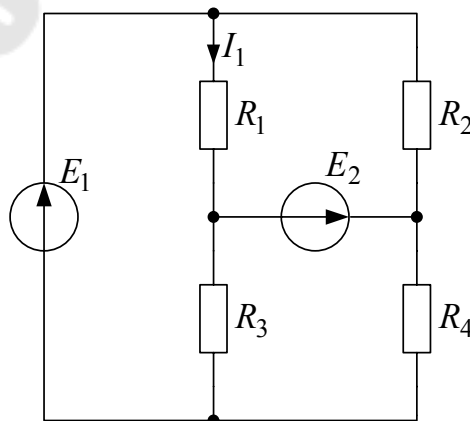


Рис. 1.15.1

*Решение*

После воображаемого изъятия из схемы источника ЭДС  $E_1$  схема принимает вид, показанный на рис. 1.15.2. Для наглядности на рис. 1.15.3 показана эквивалентная схема.

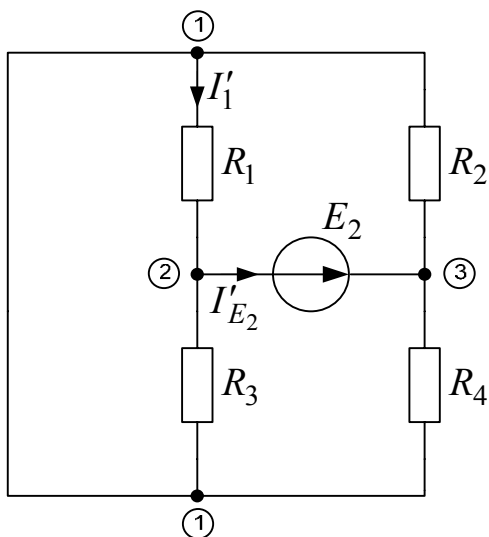


Рис. 1.15.2

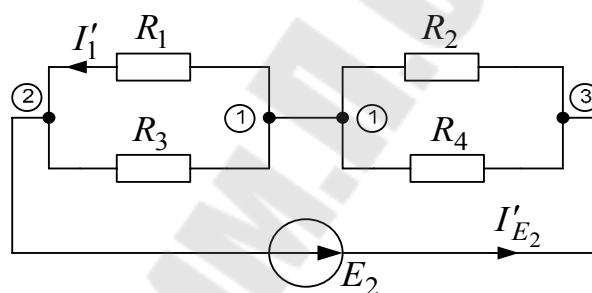


Рис. 1.15.3

В схеме рис. 1.15.3:

$$I'_1 = I'_{E_2} \frac{R_3}{R_1 + R_3}, \quad I'_{E_2} = \frac{E_2}{R'}; \quad R' = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

Подставляя числовые значения, находим:

$$R' = \frac{4 \cdot 2}{4 + 2} + \frac{6 \cdot 8}{6 + 8} = 4,76 \text{ Ом}; \quad I'_{E_2} = \frac{14,29}{4,76} = 3 \text{ А}; \quad I'_1 = 3 \frac{2}{4 + 2} = 1 \text{ А}.$$

После изъятия из схемы рис. 1.15.1 источника ЭДС  $E_2$  получаем схему, показанную на рис. 1.15.4. Для этой схемы имеем:

$$R''_{\text{вх}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} + \frac{2 \cdot 8}{3 + 8} = 4 \text{ Ом};$$

$$I''_{E_1} = \frac{E_1}{R''_{\text{вх}}} = \frac{16}{4} = 4 \text{ А}; \quad I''_1 = I''_{E_1} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 4 \frac{6}{4 + 6} = 2,4 \text{ А}.$$



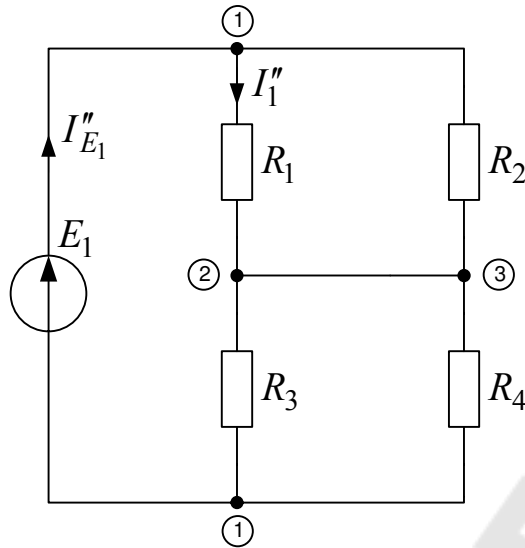


Рис. 1.15.4

Наложив схему рис. 1.15.2 на схему рис. 1.15.4, получим:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 1 + 2,4 = 3,4 \text{ А.}$$

**Метод эквивалентного генератора**

**1.16.** Найти ток в ветви  $R_5$  (рис. 1.16.1), если  $E_1 = E_2 = 20 \text{ В}$ ;  $R_1 = R_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 160 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 20 \text{ Ом}$ .

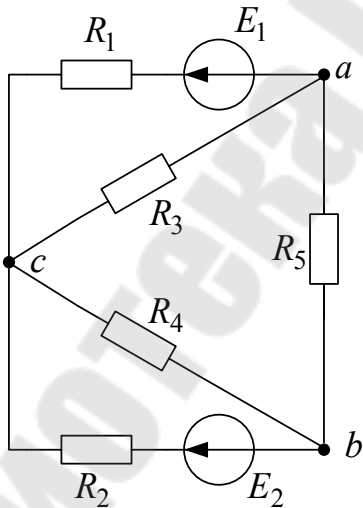


Рис. 1.16.1

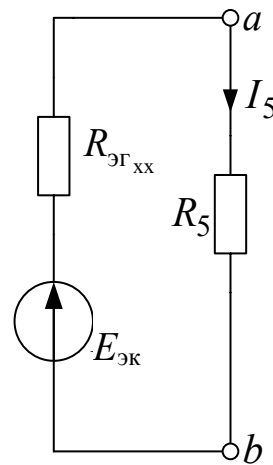


Рис. 1.16.2

**Решение**

Будем рассматривать сопротивление  $R_5$  как нагрузку остальной части схемы – эквивалентного генератора (рис. 1.16.2). Чтобы опре-

делить параметры эквивалентного генератора, в заданной схеме отключим ветвь с  $R_5$  (рис. 1.16.3) и найдем напряжение  $U_{ab_{xx}}$  холостого хода между точками  $a$  и  $b$ , а также  $R_{ab_{xx}}$  – сопротивление холостого хода между узлами  $a$  и  $b$  при закороченных ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  (рис. 1.16.4).

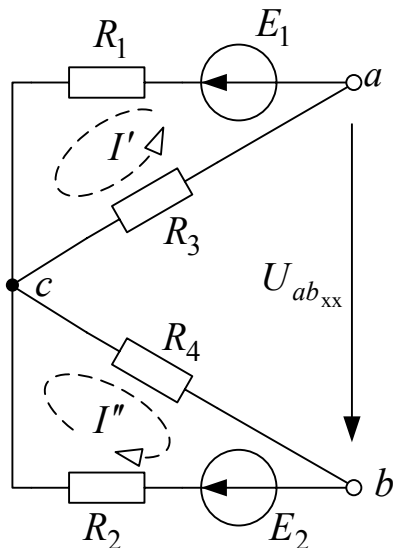


Рис. 1.16.3

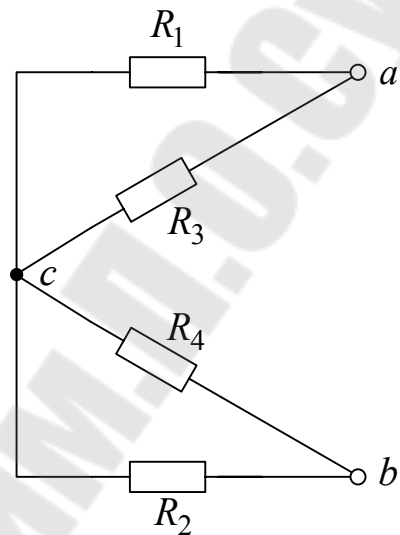


Рис. 1.16.4

ЭДС эквивалентного генератора  $E_{\text{ЭГ}}$  и его внутреннее сопротивление  $R_{\text{ЭГ}}$  равны:

$$E_{\text{ЭГ}} = U_{ab_{xx}} = -I'R_3 + I''R_4 = -\frac{E_1}{R_1 + R_3}R_3 + \frac{E_2}{R_2 + R_4}R_4 =$$

$$= -\frac{20}{40 + 10} \cdot 10 + \frac{20}{40 + 160} \cdot 160 = 12 \text{ В};$$

$$R_{\text{ЭГ}} = R_{ab_{xx}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{40 \cdot 10}{40 + 10} + \frac{40 \cdot 160}{40 + 160} = 40 \text{ Ом}.$$

Искомый ток:

$$I_5 = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_{ab_{xx}} + R_5} = \frac{12}{40 + 20} = 0,2 \text{ А}.$$

**1.17.** В схеме рис. 1.17.1 заданы  $E_1 = 225 \text{ В}$ ;  $E_4 = 180 \text{ В}$ ;  $R_1 = 45 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 15 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 36 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 18 \text{ Ом}$ ;  $R_6 = 3 \text{ Ом}$ ;  $R_7 = 5 \text{ Ом}$ . Рассчитать ток  $I_6$ .

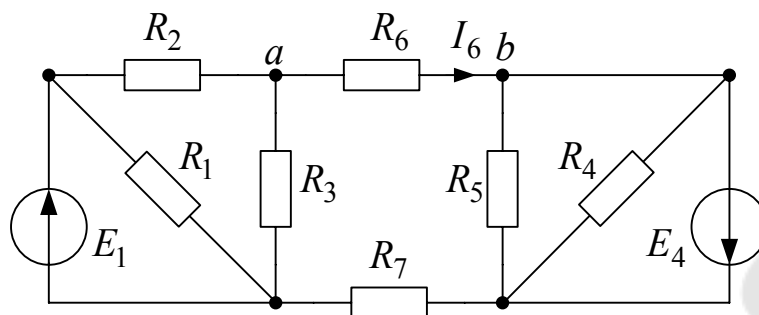


Рис. 1.17.1

*Решение*

Размыкая ветвь с резистором  $R_6$ , получаем схему, показанную на рис. 1.17.2.

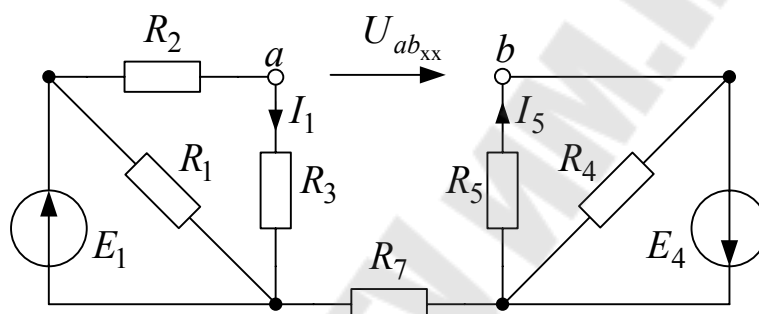


Рис. 1.17.2

Напряжение холостого хода:

$$U_{ab_{xx}} = R_3 I_1 + R_5 I_5.$$

Находим неизвестные токи  $I_1$  и  $I_5$  в схеме рис. 1.17.2:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_2 + R_3} = \frac{225}{30 + 15} = 5 \text{ A}; \quad I_5 = \frac{E_4}{R_5} = \frac{180}{18} = 10 \text{ A}.$$

Тогда

$$U_{ab_{xx}} = 15 \cdot 5 + 18 \cdot 10 = 255 \text{ В}.$$

Для расчета внутреннего сопротивления эквивалентного генератора заменяем идеальные источники ЭДС в схеме рис. 1.17.1 короткозамкнутыми участками (рис. 1.17.3); эквивалентная схема получаемой при этом схемы показана на рис. 1.17.4.

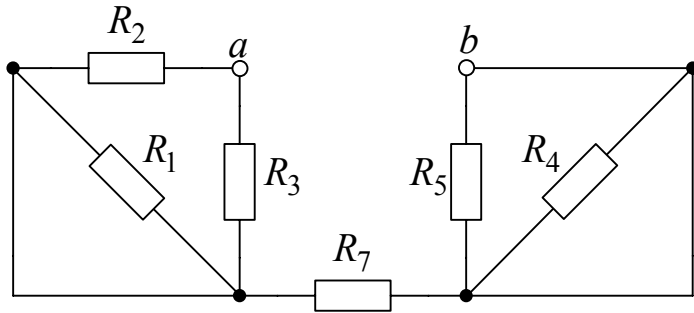


Рис. 1.17.3

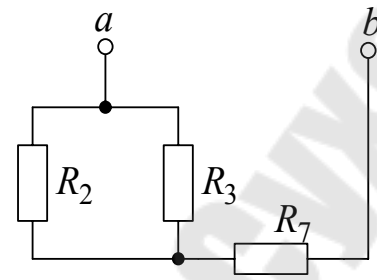


Рис. 1.17.4

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора:

$$R_{ab_{xx}} = R_7 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 5 + \frac{30 \cdot 15}{30 + 15} = 15 \text{ Ом.}$$

Искомый ток  $I_6$  равен

$$I_6 = \frac{U_{ab_{xx}}}{R_{ab_{xx}} + R_6} = \frac{255}{15 + 5} = 14,2 \text{ А.}$$

**1.18.** В схеме рис. 1.18.1  $J = 10 \text{ А}$ ;  $E_6 = 40 \text{ В}$ ;  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 3 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 2 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_6 = 4 \text{ Ом}$ . Найти величину сопротивления  $R_3$ , при которой в нем выделяется максимальная мощность.

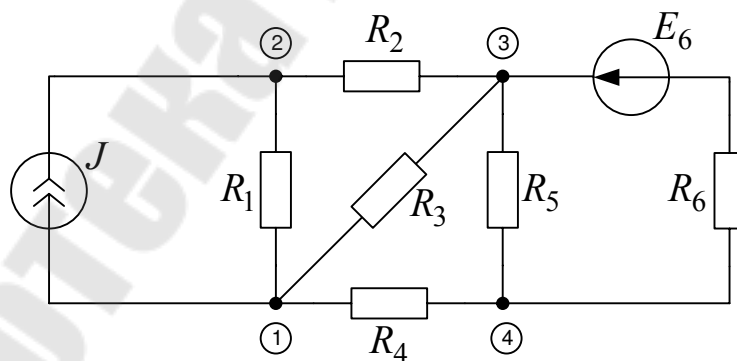


Рис. 1.18.1

*Решение*

Будем рассматривать сопротивление  $R_3$  как нагрузку остальной части схемы – эквивалентного генератора, схема которого показана на рис. 1.18.2.

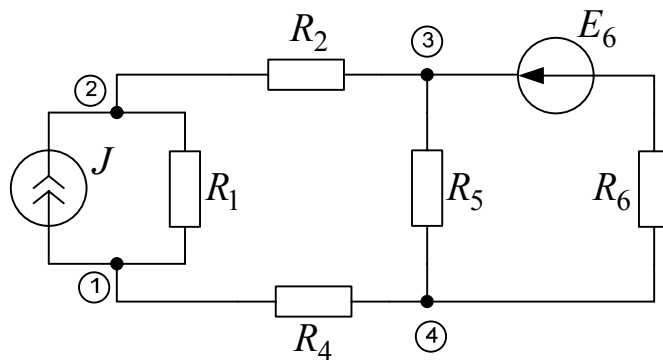


Рис. 1.18.2

Максимальная мощность в сопротивлении  $R_3$  выделится при  $R_3 = R_{13_{xx}}$  (согласованный режим), где  $R_{13_{xx}}$  – внутреннее сопротивление эквивалентного генератора. Для расчета этого сопротивления в схеме рис. 1.18.2 изымаем источник тока, а источник ЭДС заменяем короткозамкнутым участком. После такого преобразования получаем схему, показанную на рис. 1.18.3, по которой определяем  $R_{13_{xx}}$  :

$$R_{13_{xx}} = \frac{\left( \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} + R_4 \right) \cdot (R_1 + R_2)}{\frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} + R_4 + R_1 + R_2} = \frac{\left( \frac{20 \cdot 4}{20 + 4} + 2 \right) \cdot (5 + 3)}{\frac{20 \cdot 4}{20 + 4} + 2 + 5 + 3} = 3,2 \text{ Ом.}$$

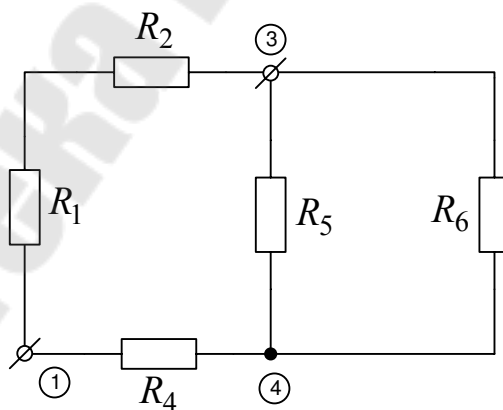


Рис. 1.18.3

Для расчета максимальной мощности  $P_{3_{max}}$ , которая выделяется в нагрузке  $R_3$ , преобразуем схему рис. 1.18.2 к виду, показанному на рис. 1.18.4.

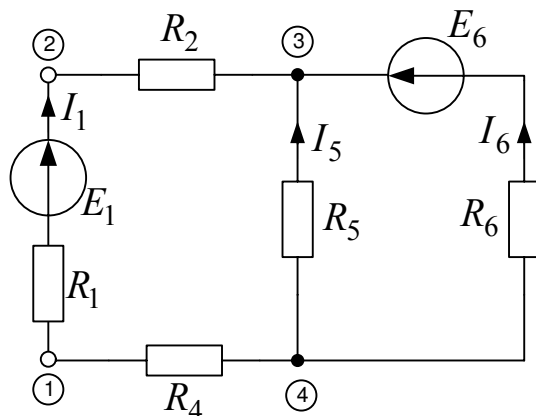


Рис. 1.18.4

Для схемы рис. 1.18.4 имеем:

$$E_1 = JR_1 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ В.}$$

Напряжение  $U_{34}$  определим, используя метод узловых потенциалов:

$$U_{34} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_4} + \frac{E_6}{R_6}}{\frac{1}{R_1 + R_2 + R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}} = \frac{\frac{50}{5 + 3 + 2} + \frac{40}{4}}{\frac{1}{5 + 3 + 2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4}} = 37,5 \text{ В.}$$

Тогда

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{34}}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{50 - 37,5}{5 + 3 + 2} = 1,25 \text{ А;}$$

$$U_{xx} = U_{31} = -I_1(R_1 + R_2) + E_1 = -1,25 \cdot (5 + 3) + 50 = 40 \text{ В.}$$

В итоге

$$P_{3\max} = \frac{U_{xx}^2}{4 \cdot R_{13_{xx}}} = \frac{40^2}{4 \cdot 3,2} = 125 \text{ Вт.}$$

## ГЛАВА 2 ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### Вводные положения

Мгновенное значение величины  $a$ , синусоидально изменяющейся с течением времени:

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi),$$

где  $A_m$  – амплитуда (максимальное значение);  $(\omega t + \psi)$  – фаза (фазовый угол);  $\psi$  – начальная фаза;  $\omega$  – угловая частота.

Период  $T$ , угловая частота  $\omega$  и циклическая частота  $f$  связаны соотношениями

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T; \quad f = 1/T.$$

Проекция вращающегося против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вектора  $\vec{A}_m$  на вертикальную ось изменяется во времени по синусоидальному закону  $a = A_m \sin(\omega t + \psi)$ . Поэтому любая синусоидальная функция (ток, напряжение, ЭДС) может быть изображена вектором. Если оси координат векторной диаграммы считать осями комплексной плоскости, то вектор  $\vec{A}_m$  можно рассматривать как комплексную амплитуду  $\underline{A}_m$ .

Действующие значения синусоидально изменяющихся ЭДС, напряжения и тока:

$$E = E_m / \sqrt{2} = 0,707 E_m; \quad U = U_m / \sqrt{2}; \quad I = I_m / \sqrt{2}.$$

Комплексное действующее значение связано с комплексной амплитудой равенством  $\underline{A} = \underline{A}_m / \sqrt{2}$ .

Используются следующие формы записи комплексного числа:

*алгебраическая*  $\underline{A}_m = A'_m + jA''_m;$

*показательная*  $\underline{A}_m = A_m e^{j\psi};$

*тригонометрическая*  $\underline{A}_m = A_m \cos \psi + jA_m \sin \psi.$

Здесь  $A'_m = A_m \cos \psi = \operatorname{Re} \underline{A}_m$  – действительная (вещественная) часть комплексного числа  $\underline{A}_m$ ;  $A''_m = A_m \sin \psi = j_m \underline{A}_m$  – его мнимая часть;  $A_m$  – его модуль;  $\psi$  – аргумент комплексного числа;

$$j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

– мнимая единица, или оператор поворота на угол  $\pi/2 = 90^\circ$ .

Умножение на  $j$  сводится к повороту вектора на прямой угол против часовой стрелки, а умножение на число

$$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

сводится к повороту вектора по часовой стрелке на прямой угол.

Алгебраическая форма удобна при сложении и вычитании комплексных чисел, а показательная – при умножении, делении, возведении в степень.

Переход от алгебраической формы к показательной производится по формулам:

$$A_m = \sqrt{(A'_m)^2 + (A''_m)^2}; \quad \psi = \arctg(A''_m / A'_m).$$

Для обратного перехода используют формулы:

$$A'_m = A_m \cos \psi; \quad A''_m = A_m \sin \psi.$$

Обозначения и правила комплексной арифметики:

$$j = \sqrt{-1} = e^{j90^\circ} = e^{j\pi/2}; \quad 1/j = -j = e^{-j90^\circ} = e^{-j\pi/2}; \quad -1 = e^{\pm j180^\circ} = e^{\pm j\pi};$$

$$\underline{A}_1 \underline{A}_2 = A_1 A_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)}; \quad \frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} = \frac{A_1 e^{j\psi_1}}{A_2 e^{j\psi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\psi_1 - \psi_2)}.$$

Комплексное число  $A^* = A' - jA'' = Ae^{-j\psi}$  называется комплексно-сопряженным числу  $\underline{A} = A' + jA'' = Ae^{j\psi}$ . Произведение комплексно-сопряженных чисел равно квадрату их модуля:  $\underline{A} A^* = A^2$ .

Пассивный элемент электрической схемы определяется полным комплексным сопротивлением  $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$  – комплексным числом, равным отношению комплексного напряжения на зажимах данного элемента к комплексному току этого элемента:

$$\underline{Z} = \underline{U} / \underline{I} = R + jX = Ze^{j\varphi},$$

где  $\underline{U}$  и  $\underline{I}$  – комплексные действующие значения напряжения и тока;  $R$  – вещественная часть комплексного сопротивления  $\underline{Z}$ , равная рези-



стивному сопротивлению схемы;  $X$  – мнимая часть  $\underline{Z}$ , равная реактивному сопротивлению схемы;  $Z$  – модуль полного комплексного сопротивления схемы;  $\pm \varphi$  – аргумент  $\underline{Z}$ , равный углу сдвига фаз между напряжением и током.

Отношение комплексного тока элемента к комплексному напряжению на его зажимах называется полной комплексной проводимостью:

$$\underline{Y} = \underline{I}/\underline{U} = G \mp jB = Ye^{\mp j\varphi},$$

где  $G$  и  $B$  – вещественная и мнимая части  $\underline{Y}$ , равные активной и реактивной проводимостям. Комплексная проводимость обратна комплексному сопротивлению:  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ .

Комплексная мощность:

$$\tilde{S} = \underline{U}I^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = Se^{\pm j\varphi},$$

где

$S = UI$ ;  $P = \operatorname{Re}[\tilde{S}] = \operatorname{Re}[\underline{U}I^*] = UI \cos \varphi$ ;  $Q = I_m[\tilde{S}] = I_m[\underline{U}I^*] = UI \sin \varphi$  – полная, активная и реактивная мощности. Баланс мощностей:

$$\sum_{k=1}^m (\underline{E}_k I_k^* + \underline{U}_{J_k} J_k^*) = \sum_{k=1}^n [I_k^2 R_k + jI_k^2 (X_{Lk} - X_{Ck})].$$

Здесь  $\underline{U}_J$  – комплекс действующего значения напряжения на источнике тока;  $\sum_{k=1}^n (\underline{E}_k I_k^*)$  – алгебраическая сумма, в которой положительны слагаемые, для которых направления действия ЭДС  $\underline{E}_k$  и соответствующего тока  $\underline{I}_k$  совпадают (в противном случае слагаемое отрицательно);  $\sum_{k=1}^n (\underline{U}_k J_k^*)$  – алгебраическая сумма, в которой положительны слагаемые, для которых напряжение  $\underline{U}_k$  на источнике тока и его ток  $\underline{J}_k$  противоположны (в противном случае слагаемое отрицательно);  $\sum_{k=1}^n (I_k^2 R_k)$  – арифметическая сумма, в которой учитываются как внешние сопротивления, так и сопротивления самих источников энергии.

Переход от последовательной схемы (рис. 2.1, а) к эквивалентной параллельной схеме (рис. 2.1, б) осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, & B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}; \\ Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{1}{Z}. \end{cases}$$

При переходе от параллельной схемы к эквивалентной последовательной ее параметры определяют по формулам:

$$\begin{cases} R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, & X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}; \\ Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}} = \frac{1}{Y}. \end{cases}$$

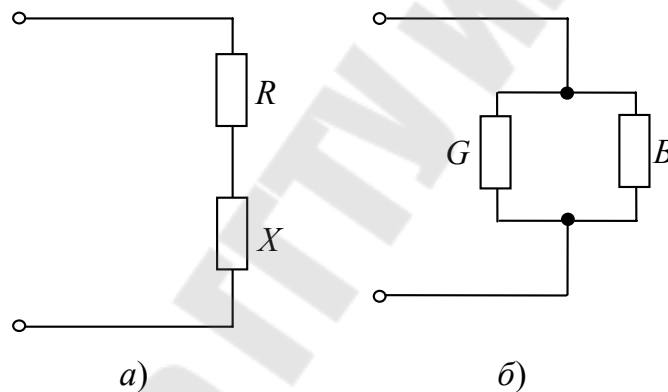


Рис. 2.1

### Примеры решения задач

**2.1.** На рис. 2.1.1 показаны осциллограммы тока и напряжения элемента  $AB$ . В схеме рис. 2.1.2 по заданным осциллограммам необходимо: 1) записать мгновенные значения напряжения и тока, определить разность фаз между ними; 2) записать комплексы амплитуд и действующих значений; 3) определить полное, активное и реактивное сопротивление двухполюсника.

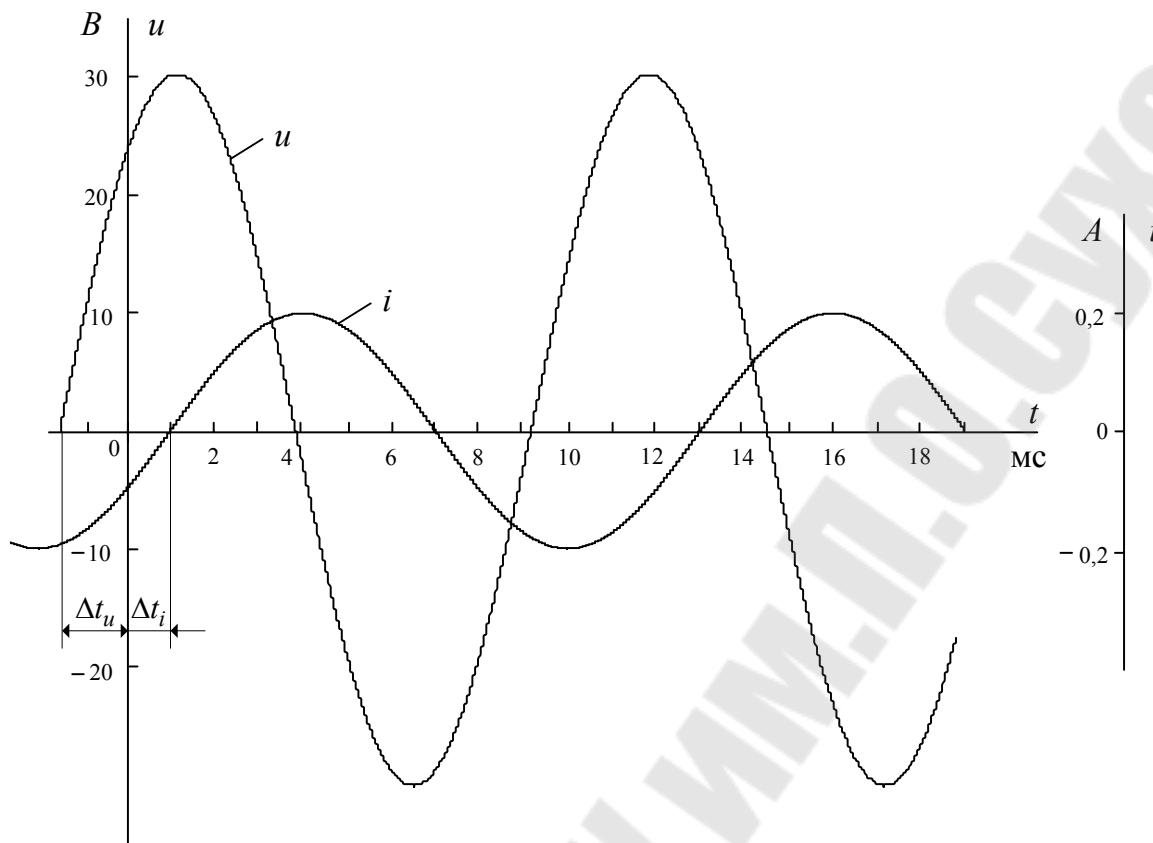


Рис. 2.1.1

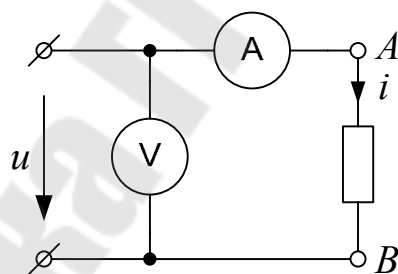


Рис. 2.1.2

*Решение*

Амплитуда напряжения:

$$U_m = 30 \text{ В.}$$

Амплитуда тока:

$$I_m = 0,2 \text{ А.}$$

Период колебаний:

$$T = 12 \text{ мс} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Циклическая частота колебаний:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{12 \cdot 10^{-3}} = 83,33 \text{ Гц.}$$

Круговая частота колебаний:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 83,33 = 523,6 \text{ рад/с.}$$

Начальная фаза напряжения:

$$\psi_u = \frac{\Delta t_u}{T} \cdot 360^\circ = \frac{1,5}{12} \cdot 360^\circ = 45^\circ.$$

Начальная фаза тока:

$$\psi_i = \frac{-\Delta t_i}{T} \cdot 360^\circ = \frac{-1}{12} \cdot 360^\circ = -30^\circ.$$

Сдвиг фаз между напряжением и током:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 75^\circ.$$

Мгновенные значения напряжения и тока:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 30 \sin(523,6t + 45^\circ), \text{ В;}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 0,2 \sin(523,6t - 30^\circ), \text{ А.}$$

Комплексы амплитуд:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = 30e^{j45^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = 0,2e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

Комплексы действующих значений:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 21,2e^{j45^\circ} \text{ В; } \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,141e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

Комплексное сопротивление двухполюсника находим по закону Ома:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U}{I} = \frac{30}{0,2} e^{j75^\circ} = 150e^{j75^\circ} = (39 + j145) \text{ Ом.}$$

В общем случае:

$$\underline{Z} = R + jX = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

Отсюда активное сопротивление элемента:

$$R = \operatorname{Re}Z = Z \cos \varphi = 39 \text{ Ом.}$$

Реактивное сопротивление элемента:

$$X = I_m Z = Z \sin \varphi = 145 \text{ Ом.}$$

Поскольку  $X > 0$ , заданный элемент является активно-индуктивным. Его схема замещения показана на рис. 2.1.3.

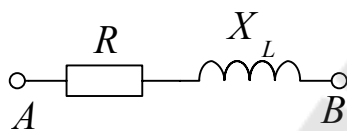


Рис. 2.1.3

**2.2.** Для схемы, показанной на рис. 2.1.1, проведены два опыта. При  $U_V = U_1 = 100 \text{ В}$  ( $f_1 = 0 \text{ Гц}$ ) показание амперметра  $I_A = I_1 = 1 \text{ А}$ . При  $U_V = U_2 = 100 \text{ В}$  ( $f_2 = 500 \text{ Гц}$ ) показания амперметра  $I_A = I_2 = 0,5 \text{ А}$ . Определить показание амперметра при  $U_V = U_3 = 100 \text{ В}$ ,  $f_3 = 1 \text{ кГц}$ .

*Решение*

Из решения задачи 2.1 известно, что заданный элемент  $AB$  является активно-индуктивным (рис. 2.1.3). В первом опыте через него пропускали постоянный ток ( $f = 0$ ). Поэтому показание амперметра определялось активным сопротивлением участка  $AB$ :

$$R = \frac{U_1}{I_1} = 100 \text{ Ом.}$$

Во втором опыте на участке  $AB$  протекал переменный ток ( $f > 0$ ), величина которого определялась полным сопротивлением двухполюсника:

$$Z = \frac{U_2}{I_2} = 200 \text{ Ом.}$$

Индуктивное сопротивление участка  $AB$ :

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{200^2 - 100^2} = 173,2 \text{ Ом.}$$

Индуктивность эквивалентной катушки:

$$L = \frac{X_L}{2\pi f_2} = \frac{173,2}{2\pi \cdot 500} = 0,055 \text{ Гн.}$$

При частоте  $f_3 = 1000$  Гц индуктивное и полное сопротивления участка  $AB$  соответственно равны:

$$X_{L_3} = 2\pi f_3 L = 2 \cdot 3,14 \cdot 1000 \cdot 0,055 = 346,4 \text{ Ом;}$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + X_{L_3}^2} = \sqrt{100^2 + 346,4^2} = 360,55 \text{ Ом.}$$

В этом случае при таком же напряжении  $U = U_3 = 100$  В на участке  $AB$  будет протекать ток

$$I_A = I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{100}{360,5} = 0,28 \text{ А.}$$

**2.3.** Для определения параметров эквивалентной схемы пассивного двухполюсника  $\Pi$  (рис. 2.3.1) измерены напряжение  $U_1 = 26$  В, ток  $I_1 = 4$  А и мощность  $P_1 = 40$  Вт. Для определения характера реактивного сопротивления этого двухполюсника последовательно с ним включили конденсатор (рис. 2.3.2). В этом случае при том же приложенном напряжении приборы показали  $I_2 = 5,53$  А,  $P_2 = 76,5$  Вт. Частота переменного тока  $f = 50$  Гц. Определить параметры эквивалентной схемы двухполюсника.

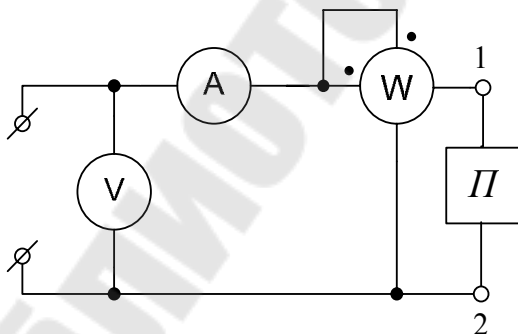


Рис. 2.3.1

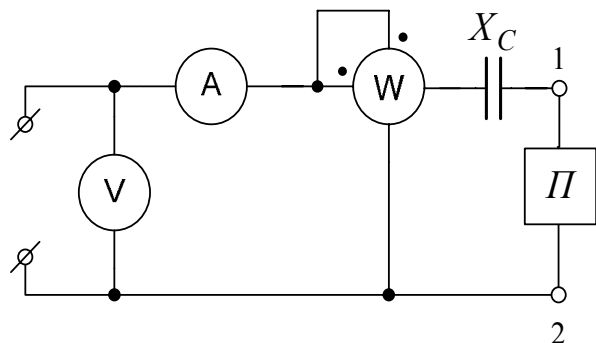


Рис. 2.3.2

### Решение

Параметры эквивалентной схемы двухполюсника по данным первого опыта:

$$R_{\text{эк}} = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{40}{4^2} = 2,5 \text{ Ом}; \quad Z_{\text{эк}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{26}{4} = 6,5 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{эк}} = \sqrt{Z_{\text{эк}}^2 - R_{\text{эк}}^2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ Ом}.$$

Из данных второго эксперимента находим:

$$Z = \frac{U_1}{I_2} = \frac{26}{5,53} = 4,7 \text{ Ом};$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R_{\text{эк}}^2} = \sqrt{4,7^2 - 2,5^2} = 4 \text{ Ом}.$$

Обработка данных второго эксперимента показывает, что емкостное сопротивление, соединенное последовательно с изучаемым двухполюсником, уменьшает общее реактивное сопротивление схемы

$$X = \pm X_{\text{эк}} - X_C.$$

Это возможно лишь в том случае, если собственное реактивное сопротивление двухполюсника имеет индуктивный характер, т. е.

$$X_{\text{эк}} = +X_{\text{эк}}.$$

Соответственно, эквивалентная индуктивность двухполюсника равна

$$L_{\text{эк}} = \frac{X_{\text{эк}}}{\omega} = \frac{6}{314} = 0,0191 \text{ Гн} = 19,1 \text{ мГн}.$$

Неизвестное значение дополнительно введенного емкостного сопротивления  $X_C$  можно определить следующим путем. В ходе решения установлено:

$$X_{\text{эк}} = +6 \text{ Ом}; \quad X = +4 \text{ Ом} \text{ либо } X = -4 \text{ Ом}.$$

Из данных второго эксперимента следует, что

$$X = X_{\text{эк}} - X_C.$$

Отсюда получаем:

$$X_C = 2 \text{ Ом} \text{ либо } X_C = 10 \text{ Ом}.$$

2.4. Приборы, подключенные к пассивному двухполюснику  $AB$  (рис. 2.4.1), при разомкнутом ключе  $K$  показали  $U_1 = 100$  В,  $I_1 = 2$  А,  $P_1 = 160$  Вт. Для определения характера реактивного сопротивления двухполюсника параллельно ему подключили конденсатор (ключ  $K$  замкнут), емкостное сопротивление которого  $X_C = 100$  Ом, при этом приборы показали:  $U_2 = 100$  В,  $I_2 = 2,73$  А,  $P_2 = 160$  Вт. Определить эквивалентные параметры двухполюсника.

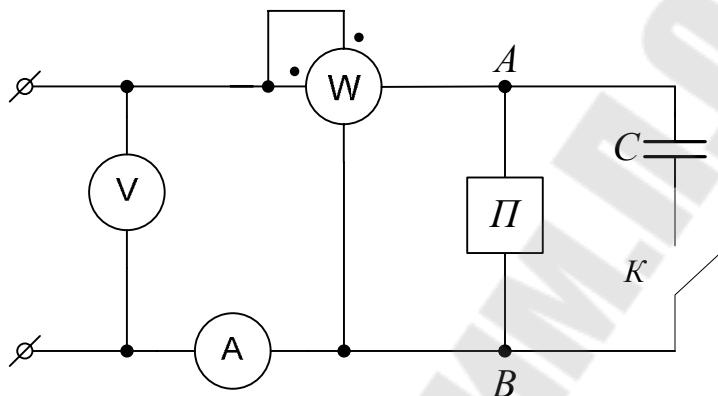


Рис. 2.4.1

*Решение*

Рассмотрим первый эксперимент (ключ разомкнут). Сопротивления элементов последовательной схемы замещения двухполюсника (рис 2.4.2):

$$R = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{160}{2^2} = 40 \text{ Ом}; \quad Z = \frac{U_1}{I_1} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Ом};$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 \text{ Ом}.$$

Параметры его параллельной схемы замещения:

$$G = \frac{40}{40^2 + 30^2} = 0,016 \text{ См}; \quad B = \frac{30}{40^2 + 30^2} = 0,012 \text{ См}.$$

Обработку данных второго эксперимента произведем, используя параллельную схему замещения двухполюсника. Совокупность трех параллельных ветвей в эквивалентной схеме второго эксперимента (рис. 2.4.3) можно рассматривать как двухполюсник, имеющий следующие параметры последовательной схемы замещения:



$$R_{\text{ЭК}} = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{160}{2,73^2} = 21,6 \text{ Ом}; \quad Z_{\text{ЭК}} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{100}{2,73} = 36,7 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{ЭК}} = \sqrt{Z_{\text{ЭК}}^2 - R_{\text{ЭК}}^2} = \sqrt{36,7^2 - 21,6^2} = 29,7 \text{ Ом}.$$

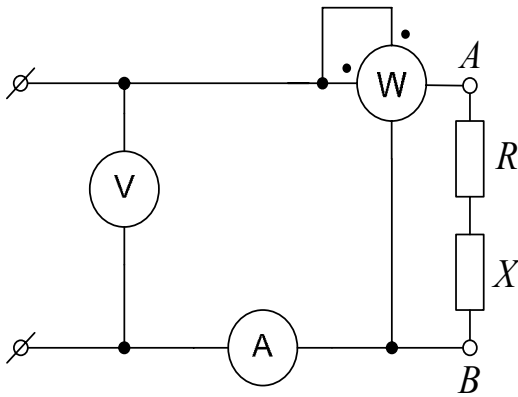


Рис. 2.4.2

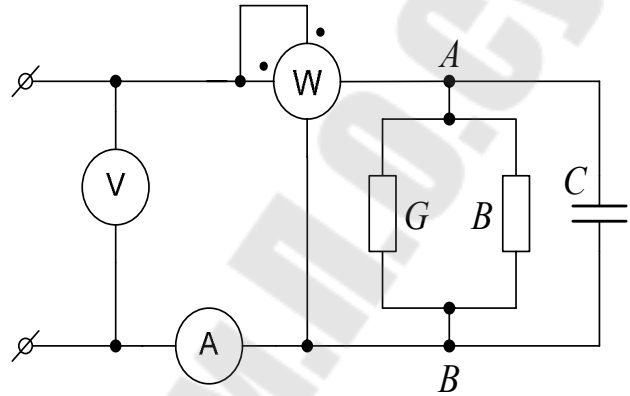


Рис. 2.4.3

Параллельная схема замещения такого двухполюсника имеет параметры:

$$G_{\text{ЭК}} = \frac{R_{\text{ЭК}}}{Z_{\text{ЭК}}^2} = \frac{21,6}{21,6^2 + 29,7^2} = 0,016 \text{ См};$$

$$B_{\text{ЭК}} = \frac{X_{\text{ЭК}}}{Z_{\text{ЭК}}^2} = \frac{29,7}{21,6^2 + 29,7^2} = 0,22 \text{ См}.$$

Как видим,

$$G_{\text{ЭК}} = G; \quad B_{\text{ЭК}} > B,$$

причем

$$B_{\text{ЭК}} = B + B_C,$$

где

$$B_C = \omega C = 0,010 \text{ См}$$

– проводимость конденсатора. Таким образом, при неизменном напряжении ток в схеме после параллельного подключения конденсатора увеличился, т. е. увеличилась общая проводимость схемы:

$$\underline{Y} = G - j(\pm B - B_C).$$

Это возможно лишь в том случае, когда реактивная проводимость подключаемой ветви  $B_C$  имеет тот же характер, что и искомая реактивная проводимость  $B$  (при условии, что  $B_C < 2B$ ). Другими словами, собственная реактивная проводимость двухполюсника  $AB$  имеет емкостной характер.

**2.5.** Определить все токи в схеме рис. 2.5.1, если  $E = 100$  В;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 20$  Ом;  $X_L = 30$  Ом;  $X_{C1} = 40$  Ом;  $X_{C2} = 50$  Ом.

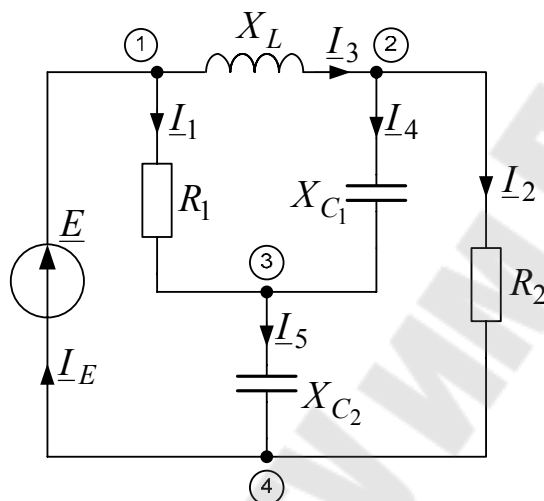


Рис. 2.5.1

### Решение

Расчет схемы целесообразно начать с преобразования звезды сопротивлений  $R_1$ ,  $X_{C1}$ ,  $X_{C2}$  в эквивалентный треугольник, вершины которого будут располагаться в узлах 1, 2, 4, а стороны имеют сопротивления:

$$\underline{Z}'_{14} = R_1 - jX_{C2} + \frac{R_1 \cdot (-jX_{C2})}{-jX_{C1}} = 10 - j50 + \frac{10 \cdot (-j50)}{-j40} = 54,83e^{-j65,77^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{12} = R_1 - jX_{C1} + \frac{R_1 \cdot (-jX_{C1})}{-jX_{C2}} = 10 - j40 + \frac{10 \cdot (-j40)}{-j50} = 43,86e^{-j65,77^\circ} \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_{24} &= -jX_{C1} - jX_{C2} + \frac{-jX_{C1} \cdot (-jX_{C2})}{R_1} = -j40 - j50 + \frac{-j50 \cdot (-j40)}{10} = \\ &= 219,32e^{-j155,77^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

После преобразования схема замещения принимает вид, показанный на рис. 2.5.2.

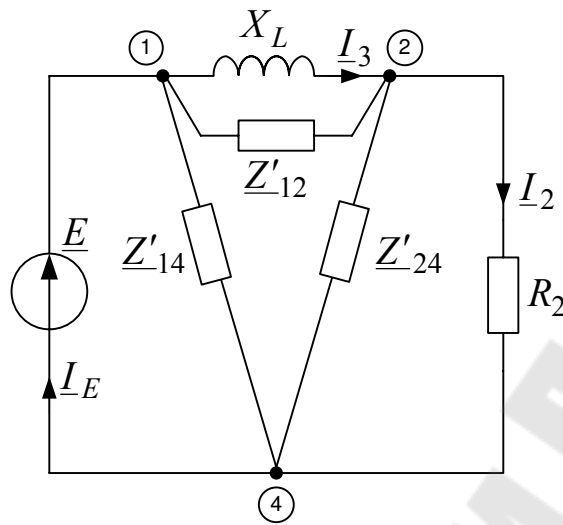


Рис. 2.5.2

Найдем сопротивления между узловых участков этой схемы:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{jX_L \cdot \underline{Z}'_{12}}{jX_L + \underline{Z}'_{12}} = \frac{j30 \cdot 43,86e^{j65,77^\circ}}{j30 + 43,86e^{j65,77^\circ}} = 63,91e^{j53,28^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{24} = \frac{R_2 \cdot \underline{Z}'_{24}}{R_2 + \underline{Z}'_{24}} = \frac{20 \cdot 219,32e^{-j155,77^\circ}}{20 + 219,32e^{-j155,77^\circ}} = 21,79e^{-j2,34^\circ} \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление схемы относительно зажимов источника:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}'_{14} \cdot \underline{Z}_{124}}{\underline{Z}'_{14} + \underline{Z}_{124}},$$

где

$$\underline{Z}_{124} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{24} = 63,91e^{j53,28^\circ} + 21,79e^{-j2,34^\circ} = 78,31e^{j40^\circ} \text{ Ом}.$$

Имеем:

$$\underline{Z} = \frac{54,83e^{-j65,77^\circ} \cdot 78,31e^{j40^\circ}}{54,83e^{-j65,77^\circ} + 78,31e^{j40^\circ}} = 52,052e^{-j26,01^\circ} \text{ Ом}.$$

Рассчитываем токи:

$$\underline{I}_E = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{100e^{j0^\circ}}{52,1e^{-j26,01^\circ}} = 1,92e^{j26,01^\circ} = 1,73 + j0,84 \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_E \cdot \frac{\underline{Z}'_{14}}{\underline{Z}'_{14} + \underline{Z}_{124}} \cdot \frac{\underline{Z}'_{12}}{\underline{Z}'_{12} + jX_L}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_E \cdot \frac{\underline{Z}'_{14}}{\underline{Z}'_{14} + \underline{Z}_{124}} \cdot \frac{\underline{Z}'_{24}}{R_2 + \underline{Z}'_{24}}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\begin{aligned} \underline{I}_3 &= 1,92e^{j26,01^\circ} \cdot \frac{54,8e^{-j65,77^\circ}}{54,8e^{-j65,77^\circ} + 78,3e^{j40^\circ}} \cdot \frac{43,9e^{-j65,77^\circ}}{43,9e^{-j65,77^\circ} + j30} = \\ &= 2,72e^{-j76,72^\circ} = 0,62 - j2,65 \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= 1,92e^{-j26,01^\circ} \cdot \frac{54,8e^{-j65,77^\circ}}{54,8e^{-j65,77^\circ} + 78,3e^{j40^\circ}} \cdot \frac{219,3e^{-j155,77^\circ}}{20 + 219,3e^{-j155,77^\circ}} = \\ &= 1,39e^{-j42,34^\circ} = 1,03 - j0,94 \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_E - \underline{I}_3 = 1,73 + j0,84 - 0,625 + j2,65 = 3,66e^{j72,48^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = 2,72e^{-j76,72^\circ} - 1,39e^{-j42,34^\circ} = 1,76e^{-j103,29^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_1 + \underline{I}_4 = 3,66e^{-j72,48^\circ} + 1,76e^{-j103,29^\circ} = 2,33e^{-j49,77^\circ} \text{ A}.$$

Составляем баланс мощностей:

$$\tilde{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}_E^* = 100e^{j0^\circ} \cdot 1,92e^{-j26,01^\circ} = (173 - j84,2) \text{ ВА};$$

$$P_{\text{ист}} = \text{Re}\tilde{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}_E^* = 173 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{ист}} = \text{Im}\tilde{S} = -84,2 \text{ ВАр};$$

$$P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 3,66^2 \cdot 10 + 1,39^2 \cdot 20 = 173 \text{ Вт};$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{пр}} &= I_3^2 X_L + I_4^2 (-X_{C_1}) + I_5^2 (-X_{C_2}) = \\ &= 2,72^2 \cdot 30 + 1,76^2 \cdot (-40) + 2,33^2 \cdot (-50) = -84,2 \text{ ВАр}; \\ 173 \text{ Вт} &= 173 \text{ Вт}; \quad -84,2 \text{ ВАр} = -84,2 \text{ ВАр}, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } P_{\text{ист}} = P_{\text{пр}}; \quad Q_{\text{ист}} = Q_{\text{пр}}.$$

2.6. Определить показания амперметра в схеме (рис. 2.6.1), если  $U = 120$  В;  $R_1 = 15$  Ом;  $R_2 = 30$  Ом;  $X_1 = 25$  Ом;  $X_2 = 10$  Ом.

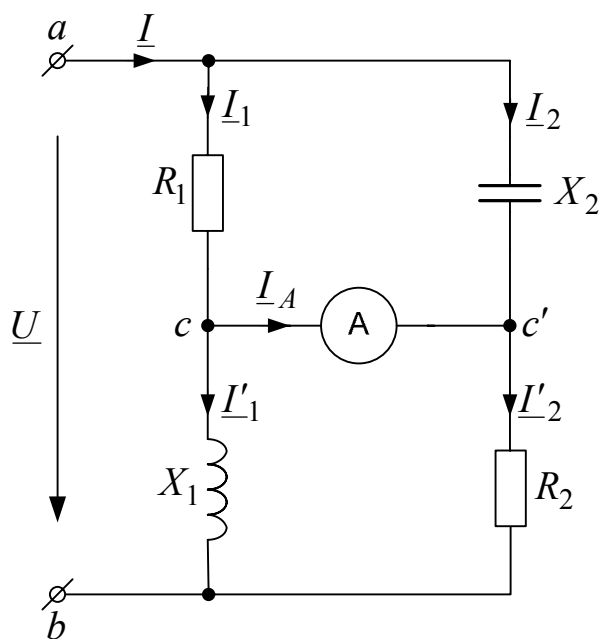


Рис. 2.6.1

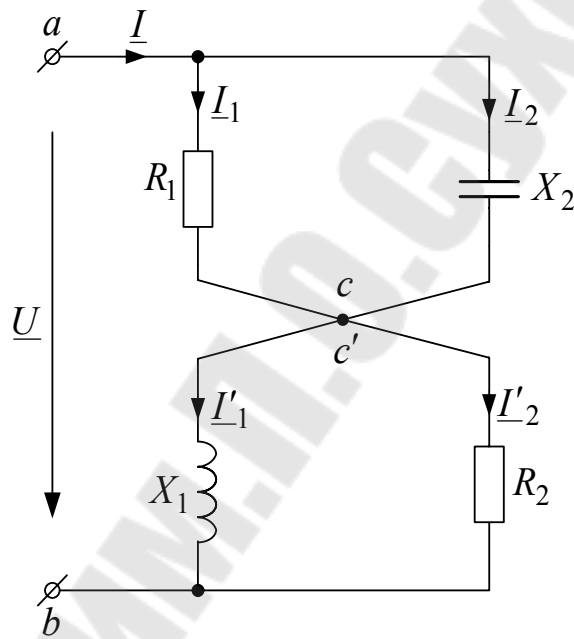


Рис. 2.6.2

*Решение*

Поскольку амперметр идеальный ( $Z_A = 0$ ), участок  $cc'$  является короткозамкнутым. Эквивалентная схема представлена на рис. 2.6.2. Рассчитаем общее сопротивление такой схемы:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{cb};$$

$$\underline{Z}_{ac} = \frac{R_1 \cdot (-jX_2)}{R_1 - jX_2} = \frac{15 \cdot (-j10)}{15 - j10} = 8,3e^{-j56,31^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{cb} = \frac{R_2 \cdot (jX_1)}{R_2 + jX_1} = \frac{30 \cdot j25}{30 + j25} = 19,2e^{j50,19^\circ} \text{ Ом}.$$

Следовательно,

$$\underline{Z} = 8,3e^{-j56,31^\circ} + 19,2e^{j50,19^\circ} = 18,6e^{j24,83^\circ} \text{ Ом}.$$

Поскольку в условии задачи нет особых указаний о начальной фазе входного напряжения, мы принимаем  $\underline{U} = 120e^{j0^\circ}$  В. Тогда

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120e^{j0^\circ}}{18,6e^{j24,83^\circ}} = 6,4e^{-j24,83^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \frac{-jX_2}{R_1 - jX_2} = 6,4e^{-j24,83^\circ} \frac{-j10}{15 - j10} = 3,6e^{-j81,13^\circ} = (0,55 - j3,52) \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I} \frac{R_1}{R_1 - jX_2} = \underline{I} - \underline{I}_1 = 6,4e^{-j24,83^\circ} - 3,6e^{-j81,13^\circ} = (5,29 + j0,82) \text{ A};$$

$$\underline{I}'_1 = \underline{I} \frac{R_2}{R_2 + jX_1} = 6,4e^{-j24,83^\circ} \frac{-j30}{30 - j25} = 4,9e^{-j75,02^\circ} = (1,27 - j4,78) \text{ A};$$

$$\underline{I}'_2 = \underline{I} \frac{jX_1}{R_2 + jX_1} = \underline{I} - \underline{I}'_1 = (-0,72 + j1,26) = 1,45e^{j119,74^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 - \underline{I}'_1 = \underline{I}'_2 - \underline{I}_2 = (-6,01 + j0,44) = 6,02e^{j175,81^\circ} \text{ A}.$$

Следовательно, показание амперметра  $I_A = 6,02 \text{ A}$ .

**2.7.** В схеме (рис. 2.7.1) заданы  $e_1(t) = 80 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В}$ ;  $e_2(t) = 120 \cos(\omega t - 60^\circ) \text{ В}$ ,  $R_1 = R_3 = 40 \text{ Ом}$ ;  $X_1 = X_2 = X_3 = 50 \text{ Ом}$ . Найти все токи.

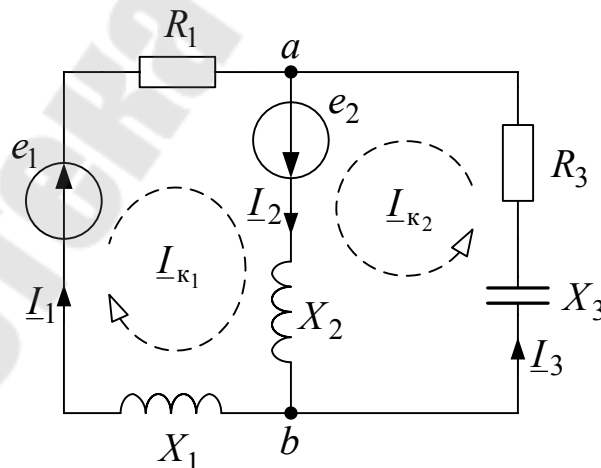


Рис. 2.7.1

### Решение

Для расчета токов в символическом (комплексном) виде необходимо перейти от мгновенных значений ЭДС к комплексам их действующих значений. При таком переходе следует учесть, что ЭДС  $e_2$  задана не синусоидой (как обычно), а косинусоидой, и вначале необходимо заменить ЭДС  $e_2$  эквивалентной синусоидой:

$$e_2(t) = 120 \cos(\omega t - 60^\circ) = 120 \sin(\omega t - 60^\circ + 90^\circ) = 120 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В.}$$

После этого переходим к комплексам действующих значений ЭДС:

$$\underline{E}_1 = \frac{80}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} = 56,6 e^{j60^\circ} = (28,3 + j49) \text{ В;}$$

$$\underline{E}_2 = \frac{120}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = 84,9 e^{j30^\circ} = (73,5 + j42,5) \text{ В.}$$

Расчет заданной схемы можно произвести различными способами.

#### 1 способ (метод контурных токов)

Перед началом расчета произвольно выбираем условно положительные направления истинных ( $I_1, I_2, I_3$ ) и контурных ( $I_{к1}, I_{к2}$ ) токов; например, так, как показано на рис. 2.7.1. После этого записываем для контурных токов уравнения второго закона Кирхгофа:

$$\begin{cases} (R_1 + jX_1 + jX_2) \underline{I}_{к1} + jX_2 \underline{I}_{к2} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2; \\ jX_2 \underline{I}_{к1} + (R_3 + jX_2 - jX_3) \underline{I}_{к2} = \underline{E}_2. \end{cases}$$

Подставляя числовые данные, получаем:

$$\begin{cases} (40 + j50 + j50) \underline{I}_{к1} + j50 \underline{I}_{к2} = 56,6 e^{j60^\circ} + 84,9 e^{j30^\circ}; \\ j50 \underline{I}_{к1} + (40 + j50 - j50) \underline{I}_{к2} = 84,9 e^{j30^\circ}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим контурные токи:

$$\underline{I}_{к1} = 1,08 e^{-j44,3^\circ} = (0,77 - j0,75) \text{ А; } \underline{I}_{к2} = 0,9 e^{j6,1^\circ} = (0,89 + j0,095) \text{ А.}$$

Истинные токи выражаются алгебраическими суммами соответствующих контурных токов:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{к1}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{к1} + \underline{I}_{к2} = 1,66 - j0,66 = 1,79 e^{-j21,6^\circ} \text{ А; } \underline{I}_3 = \underline{I}_{к2}.$$

## 2 способ (метод узловых потенциалов)

В схеме два узла, поэтому расчет проводим методом двух узлов, определяя междуузловое напряжение:

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\frac{\underline{E}_1}{R_1 + jX_1} - \frac{\underline{E}_2}{jX_2}}{\frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{jX_2} + \frac{1}{R_3 - jX_3}} = \frac{\frac{28,3 + j49}{40 + j50} - \frac{73,5 + j42,5}{j50}}{\frac{1}{40 + j50} + \frac{1}{j50} + \frac{1}{40 - j50}} =$$
$$= -40,4 + j40,7 = 57,4e^{j134,4^\circ} \text{ В.}$$

Искомые токи определяем по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_{ab}}{R_1 + jX_1} = \frac{56,6e^{j60^\circ} - 57,4e^{-j134,4^\circ}}{40 + j50} = 1,08e^{-j44,46^\circ} = (0,77 - j0,75) \text{ А;}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 + \underline{U}_{ab}}{jX_2} = \frac{84,9e^{j30^\circ} + 57,4e^{-j134,4^\circ}}{j50} = 1,79e^{-j21,59^\circ} = (1,66 - j0,66) \text{ А;}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{-\underline{U}_{ab}}{R_3 - jX_3} = \frac{-57,4e^{-j134,4^\circ}}{40 - j50} = 0,89e^{-j6,16^\circ} = (0,89 + j0,096) \text{ А.}$$

## 3 способ (метод наложения)

Заданная схема (рис. 2.7.1) содержит два источника питания. Рассмотрим схему, в которой действует только источник  $e_1$ , а источник  $e_2$  заменен короткозамкнутым участком (рис. 2.7.2). В такой схеме протекают токи:

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + jX_1 + \frac{jX_2(R_3 - jX_3)}{R_3 + j(X_2 - X_3)}} = 0,4e^{j15,5^\circ} = (0,38 + j0,11) \text{ А;}$$

$$\underline{I}'_2 = \underline{I}'_1 \frac{R_3 - jX_3}{R_3 + j(X_2 - X_3)} = 0,64e^{-j35,6^\circ} = (0,52 - j0,37) \text{ А;}$$

$$\underline{I}'_3 = \underline{I}'_1 \frac{-jX_2}{R_3 + j(X_2 - X_3)} = \underline{I}'_1 - \underline{I}'_2 = 0,5e^{-j74,5^\circ} = (0,14 - j0,48) \text{ А.}$$



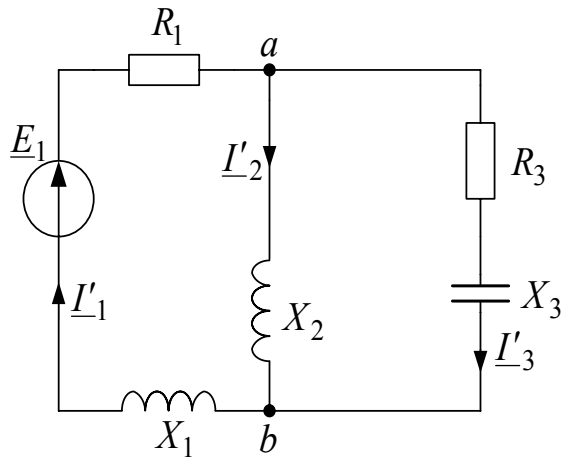


Рис. 2.7.2

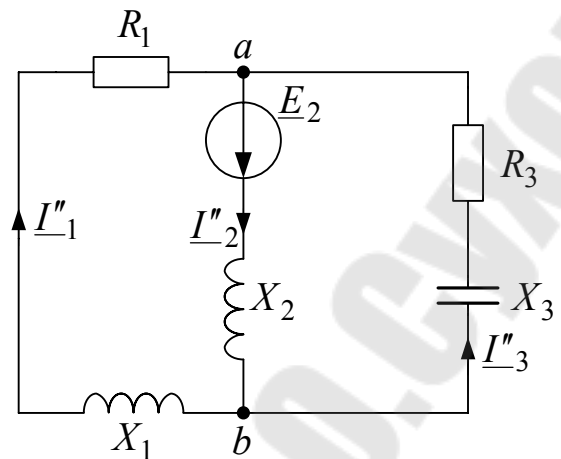


Рис. 2.7.3

Теперь рассмотрим схему, в которой короткозамкнутым участком заменен источник ЭДС  $e_1$  (рис. 2.7.3). В ней протекают токи:

$$\underline{I''_2} = \frac{\underline{E}_2}{jX_2 + \frac{(R_1 + jX_1)(R_3 - jX_3)}{R_3 + R_1 + j(X_1 - X_3)}} = 1,19e^{-j14,3^\circ} = (1,15 - j0,29) \text{ A};$$

$$\underline{I''_1} = \underline{I''_2} \frac{R_3 - jX_3}{R_3 + R_1 + j(X_1 - X_3)} = 0,95e^{-j65,6^\circ} = (0,39 - j0,87) \text{ A};$$

$$\underline{I''_3} = \underline{I''_2} \frac{R_1 + jX_1}{R_3 + R_1 + j(X_1 - X_3)} = \underline{I''_2} - \underline{I''_1} = 0,95e^{-j37^\circ} = (0,76 - j0,57) \text{ A}.$$

Истинные токи схемы выражаются алгебраическими суммами соответствующих частичных токов:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1 = (0,77 - j0,76) \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2 = (1,67 - j0,66) \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}'_3 - \underline{I}''_3 = (0,9 + j0,09) \text{ A}.$$

Для проверки составим баланс мощностей:  $\tilde{S} = I_1^* \underline{E}_1 + I_2^* \underline{E}_2$ . Подставляя числовые данные, получим:

$$\tilde{S} = 1,08e^{j44,62^\circ} \cdot 56,6e^{j60^\circ} + 1,8e^{j21,5^\circ} \cdot 84,9e^{j30^\circ} = (78,8 + j178) \text{ ВА};$$

$$P_{\text{ист}} = \text{Re} \tilde{S} = 78,8 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{ист}} = \text{Im} \tilde{S} = 178 \text{ ВАр};$$

$$P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_3^2 R_3 = 1,081^2 \cdot 40 + 0,896^2 \cdot 40 = 78,851 \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{пр}} = I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 + I_3^2 (-X_3) = 1,08^2 \cdot 50 + 1,78^2 \cdot 50 + 0,89^2 \cdot (-50) = 178,3 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{пр}}, \text{ или } 78,8 = 78,8 \text{ Вт}; \quad Q_{\text{ист}} = Q_{\text{пр}}, \text{ или } 178,3 = 178,3 \text{ ВАр}.$$

**2.8.** В схеме (рис. 2.8.1) найти ток на участке 1–1', если  $R_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 25 \text{ Ом}$ ;  $X_1 = 18 \text{ Ом}$ ;  $X_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $e(t) = 180 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ В}$ ;  $i_J(t) = 5 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ А}$ .

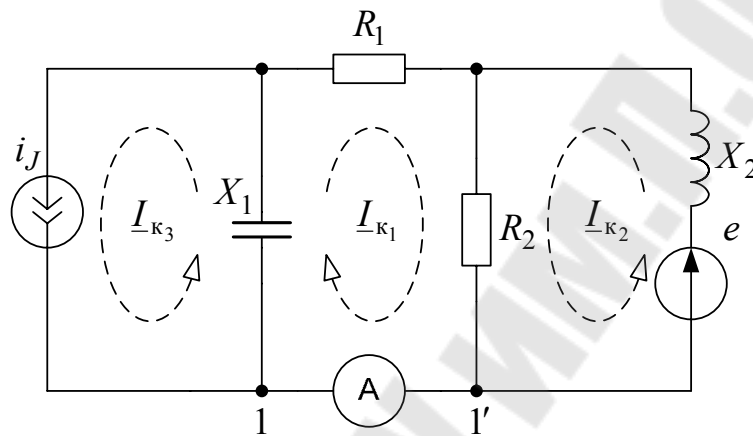


Рис. 2.8.1

### Решение

Поскольку в задаче требуется рассчитать ток только в одной ветви, для расчета используем метод эквивалентного генератора. Схема холостого хода показана на рис. 2.8.2.

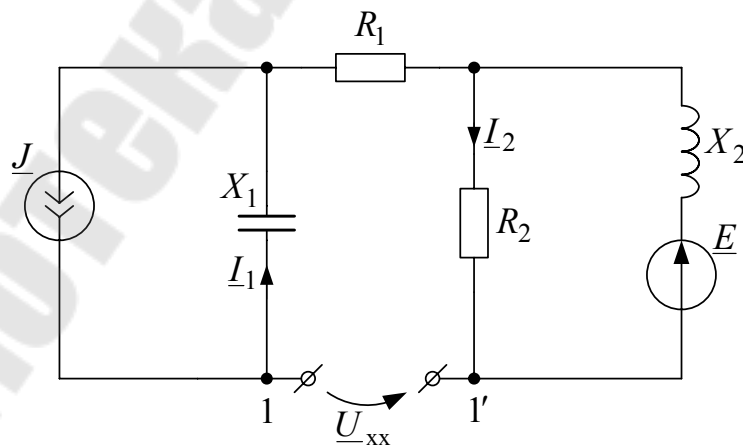


Рис. 2.8.2

В схеме холостого хода протекают токи:

$$\underline{I}_1 = \underline{J} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} = 3,54 e^{-j45^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{R_2 + jX_2} = \frac{\frac{180}{\sqrt{2}} e^{j120^\circ}}{25 + j10} = 4,73 e^{j98,2^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение холостого хода:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\text{xx}} &= -jX_1 \underline{I}_1 + R_2 \underline{I}_2 = \\ &= -j18 \cdot 3,54 e^{-j45^\circ} + 25 \cdot 4,73 e^{j98,2^\circ} = 94,95 e^{j130,5^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Чтобы рассчитать внутреннее сопротивление эквивалентного генератора, необходимо в схеме холостого хода изъять ветви, содержащие источники тока, и заменить источники ЭДС короткозамкнутыми участками. В нашем случае после такого преобразования получится схема, показанная на рис. 2.8.3.

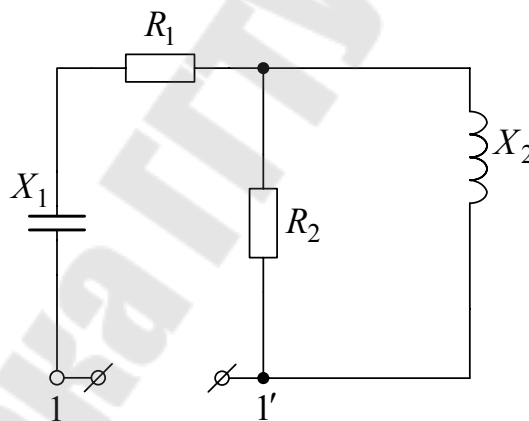


Рис. 2.8.3

Входное сопротивление такой схемы (внутреннее сопротивление эквивалентного генератора):

$$\underline{Z}_{\text{вн}} = \underline{Z}_{11'} = -jX_1 + R_1 + \frac{R_2(jX_2)}{R_2 + jX_2} = 20,7 e^{-j26,55^\circ} \text{ Ом}.$$

Искомый ток:

$$\underline{I}_{11'} = \frac{\underline{U}_{\text{xx}}}{\underline{Z}_{\text{вн}} + \underline{Z}_{11'}} = \frac{\underline{U}_{\text{xx}}}{\underline{Z}_{\text{вн}} + 0} = 4,59 e^{j157,56^\circ} \text{ А}.$$

2.9. В схеме (рис. 2.9.1) имеет место резонанс. Определить  $R$  и  $X_C$ , если  $P_W = 64$  Вт;  $U = 4$  В;  $X_L = 2$  Ом.

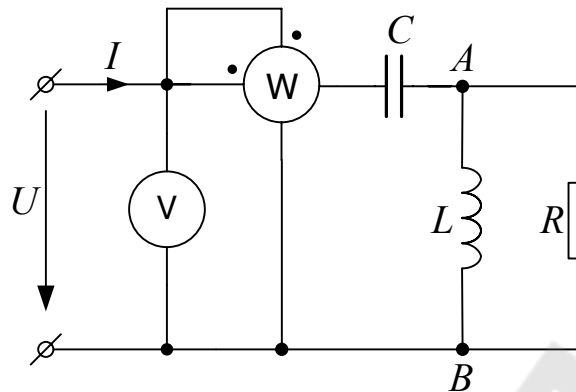


Рис. 2.9.1

*Решение*

В общем случае показание ваттметра

$$P_W = UI \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол сдвига фаз между напряжением и током двухполюсника, активную мощность которого измеряет ваттметр. В заданной схеме имеет место резонанс, следовательно,  $\cos \varphi = 1$ . Тогда

$$I = \frac{P_W}{U} = 16 \text{ А.}$$

Параллельное соединение ветвей на участке  $AB$  можно заменить эквивалентным участком с последовательным соединением элементов. Эквивалентная схема, получаемая при таком преобразовании, показана на рис. 2.9.2.

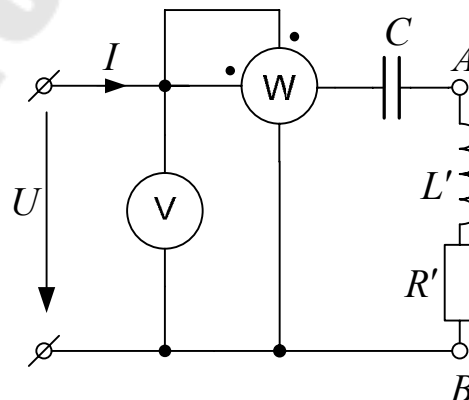


Рис. 2.9.2

Чтобы рассчитать параметры эквивалентной схемы, найдем комплексное сопротивление участка  $AB$  на схеме рис. 2.9.1:

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{R \cdot jX_L}{(R + jX_L)} \cdot \frac{(R - jX_L)}{(R - jX_L)} = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} + j \frac{X_L \cdot R^2}{R^2 + X_L^2}.$$

С другой стороны, для схемы рис. 2.9.2:

$$\underline{Z}_{AB} = R' + jX_{L'}.$$

Сопоставляя два равноценных выражения для  $\underline{Z}_{AB}$ , получаем:

$$R' = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2}; \quad X_{L'} = \frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2}.$$

В схеме рис. 2.9.2 резонанс возможен при

$$X_C = X_{L'}.$$

При этом

$$P_W = I^2 R'; \quad U = R'I,$$

откуда

$$R' = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{P_W} = \frac{4^2}{64} = 0,25 \text{ Ом.}$$

Следовательно,

$$\frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} = 0,25.$$

Из последнего выражения получаем квадратное уравнение для неизвестного  $R$ :

$$0,25R^2 - 4R + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет 2 корня:

$$R_{(1)} = 15,75 \text{ Ом}; \quad R_{(2)} = 0,25 \text{ Ом.}$$

Так как оба эти корня положительны, задача имеет 2 решения:

$$X_{C_{(1)}} = \frac{X_L \cdot R_{(1)}^2}{X_L^2 + R_{(1)}^2} = 1,97 \text{ Ом}; \quad X_{C_{(2)}} = \frac{X_L \cdot R_{(2)}^2}{X_L^2 + R_{(2)}^2} = 0,031 \text{ Ом.}$$

**2.10.** Найти мгновенное значение  $i(t)$  и показание амперметра при резонансе в схеме рис. 2.10.1, если  $u(t) = 120 \cos(\omega t - 45^\circ)$ , В;  $R = 20$  Ом;  $L = 35$  мГн;  $C = 45$  мкФ.

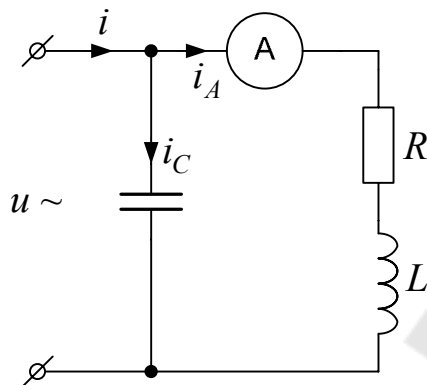


Рис. 2.10.1

*Решение*

Эквивалентная синусоида входного напряжения выражается равенством

$$u(t) = 120 \sin(\omega t - 45^\circ + 90) = 120 \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ В.}$$

В заданной схеме резонанс достигается при условии

$$B_C = B_{RL},$$

где  $B_C = \omega C$  – реактивная проводимость левой ветви;  $B_{RL}$  – реактивная проводимость правой ветви. Величину  $B_{RL}$  определяем из параллельной схемы замещения  $RL$ -ветви (см. задачу 2.9):

$$B_{RL} = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Возвращаясь с учетом этого к условию резонанса, имеем уравнение

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Решая его, находим резонансную частоту:  $\omega = \omega_0 = 555$  рад/с.

Полная проводимость схемы при резонансе определяется ее активной проводимостью, которая в нашем случае совпадает с активной проводимостью  $RL$ -ветви:

$$G = G_{RL} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0,0257 \text{ См.}$$

Тогда действующее значение тока неразветвленной части схемы:

$$\underline{I} = G\underline{U} = 0,0257 \frac{120}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 2,18\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение этого тока:

$$i(t) = 2,18\sqrt{2} \sin(\omega_0 t + 45^\circ) = 3,1 \sin(555t + 45^\circ), \text{ А.}$$

Показание амперметра:

$$\underline{I}_A = \underline{I} \frac{-jX_C}{R + j(X_L - X_C)} = 3,04 e^{j0,8^\circ} \text{ А; } I_A = 3,04 \text{ А.}$$

**2.11.** Электродвигатель запитан промышленным однофазным напряжением ( $U = 220 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ ) и развивает мощность  $P = 1,76 \text{ кВт}$  при коэффициенте мощности  $\cos \varphi = 0,4$ . Определить емкость, повышающую коэффициент мощности этого двигателя до  $\cos \varphi' = 0,8$ .

*Решение*

Электродвигатель представляет собой активно-индуктивную нагрузку, поэтому схема замещения и ее векторная диаграмма будут иметь соответственно вид рис. 2.11.1 и 2.11.2.

Мощность двигателя:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Ток двигателя

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{1760}{220 \cdot 0,4} = 20 \text{ А}$$

имеет активную составляющую

$$I_a = I \cos \varphi = 20 \cdot 0,4 = 8 \text{ А,}$$

которая не изменяется при параллельном подключении емкости, тогда как общий ток при этом подключении уменьшается до значения

$$I' = \frac{I_a}{\cos \varphi'} = \frac{8}{0,8} = 10 \text{ А}$$

за счет уменьшения реактивной составляющей тока двигателя от значения

$$I_p = I \sin \varphi = 20 \cdot 0,91 = 18,3 \text{ А}$$

до значения

$$I'_p = I' \sin \varphi' = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ А.}$$

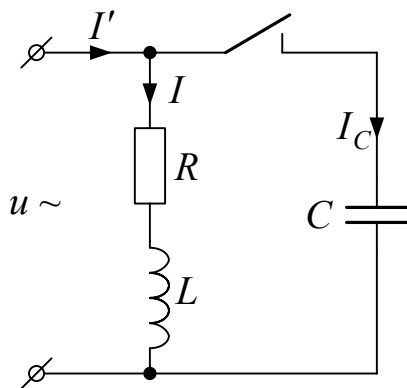


Рис. 2.11.1

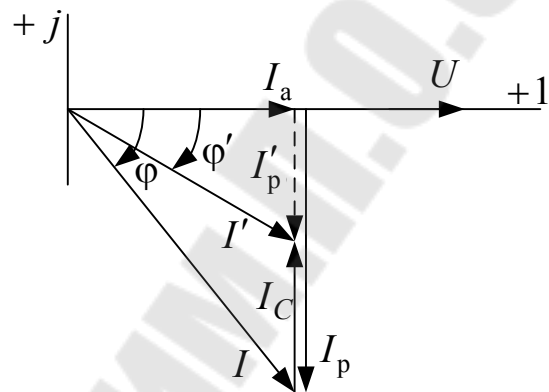


Рис. 2.11.2

Величина убыли реактивной составляющей равна току, протекающему через параллельно подключенную емкость:

$$I_p - I'_p = I_C = U\omega C.$$

Отсюда

$$C = \frac{I_p - I'_p}{U\omega} = \frac{18,3 - 6}{220 \cdot 314} = 178 \text{ мкФ.}$$

**2.12.** Определить все токи в схеме рис. 2.12.1, если  $U = 100 \text{ В}$ ;  $R_1 = R_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_1 = \omega L_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $\omega M = 20 \text{ Ом}$ .

*Решение*

**1 способ (метод уравнений Кирхгофа)**

Уравнение законов Кирхгофа для заданной схемы имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \\ \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \underline{I}_2 \cdot j\omega M = \underline{U}; \\ \underline{I}_1 \cdot j\omega M + \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2) = 0. \end{cases}$$



Подставляя во второе и третье уравнения числовые данные условия, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \underline{I}_1(30 + j40) + \underline{I}_2 \cdot j20 = 100; \\ \underline{I}_1 \cdot j20 + \underline{I}_2(30 + j40) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\underline{I}_1 = 2,07e^{-j44^\circ} = (1,49 - j1,44) \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = 0,83e^{j172,87^\circ} = (0,82 + j0,103) \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 1,49 - j1,44 + 0,82 - j0,103 = 2,78e^{j33,7^\circ} = (2,31 - j1,543) \text{ А}.$$

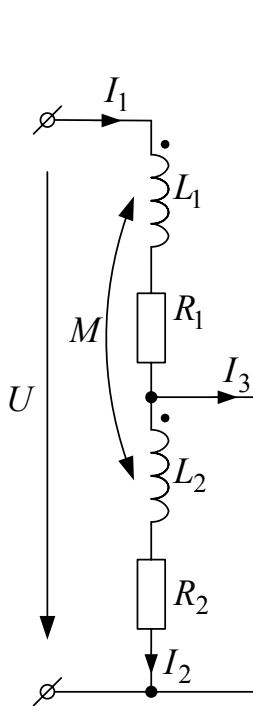


Рис. 2.12.1

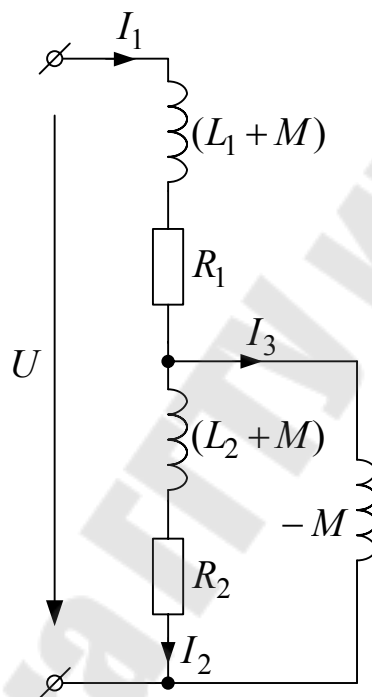


Рис. 2.12.2

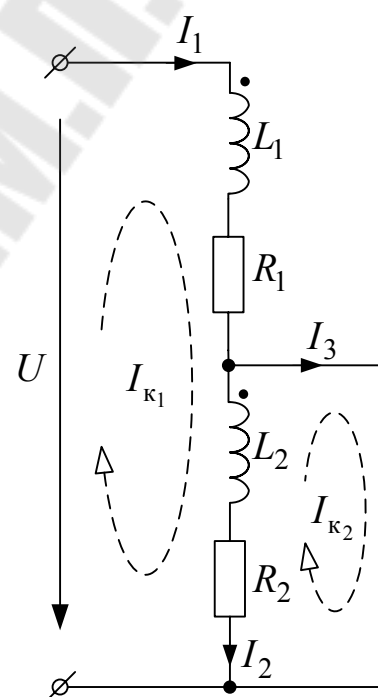


Рис. 2.12.3

## 2 способ («развязывание»)

После развязывания схема принимает вид, показанный на рис. 2.12.2. Входное сопротивление такой схемы:

$$\underline{Z} = R_1 + j\omega(L_1 + M) + \frac{(-j\omega M) \cdot [R_2 + j\omega(L_2 + M)]}{R_2 + j\omega L_2} =$$

$$= 30 + j60 + \frac{(30 + j60)(-j20)}{30 + j40} = 48,37e^{j44^\circ} \text{ Ом}.$$

Тогда по закону Ома

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{48,37e^{j44^\circ}} = 2,07e^{-j44^\circ} \text{ А.}$$

Токи разветвленной части схемы:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{-j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} = 2,07e^{-j44^\circ} \frac{20e^{-j90^\circ}}{50e^{j53,13^\circ}} = 0,828e^{j172,87^\circ} \text{ А;}$$
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{R_2 + j\omega(L_2 + M)}{R_2 + j\omega L_2} = 2,07e^{-j44^\circ} \frac{30 + j60}{30 + j40} = 2,78e^{-j33,7^\circ} \text{ А.}$$

### 3 способ (метод контурных токов)

Заданная схема содержит 2 независимых контура. Обходя их по часовой стрелке (см. рис. 2.12.3), получим 2 уравнения для контурных токов:

$$\begin{cases} \underline{I}_{\text{к1}}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)) - \underline{I}_{\text{к2}}(R_2 + j\omega(L_2 + M)) = \underline{U}; \\ \underline{I}_{\text{к2}}(R_1 + j\omega L_2) - \underline{I}_{\text{к1}}(R_2 + j\omega(L_2 + M)) = 0. \end{cases}$$

Подставляя числовые данные условия, получим:

$$\begin{cases} 134,16e^{j63,43^\circ} \underline{I}_{\text{к1}} - 67,1e^{j63,43^\circ} \underline{I}_{\text{к2}} = 100; \\ -67,1e^{j63,43^\circ} \underline{I}_{\text{к1}} + 50e^{j53,13^\circ} \underline{I}_{\text{к2}} = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{\text{к1}} = 2,07e^{-j44^\circ} \text{ А; } \underline{I}_3 = \underline{I}_{\text{к2}} = 2,77e^{-j37,7^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{\text{к1}} - \underline{I}_{\text{к2}} = 0,825e^{-j172,9^\circ} \text{ А.}$$

## ГЛАВА 3 ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### Вводные положения

Всякая периодическая функция  $f(t)$  с периодом  $T$  может быть разложена в тригонометрический ряд. Это разложение можно записать в двух формах:

$$f(t) = \frac{a_{(0)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{(n)} \cos n\omega_1 t + b_{(n)} \sin n\omega_1 t); \quad (3.1)$$

$$f(t) = \frac{a_{(0)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{(n)} \sin(n\omega_1 t + \psi_{(n)}), \quad (3.2)$$

где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  – частота основной (первой) гармоники. Коэффициенты ряда (3.1) выражаются равенствами:

$$a_{(0)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; \quad a_{(n)} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_1 t dt; \quad b_{(n)} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_1 t dt. \quad (3.3)$$

Коэффициенты ряда (3.2) определяют по формулам:

$$c_{(n)} = \sqrt{a_{(n)}^2 + b_{(n)}^2}; \quad \psi_{(n)} = \operatorname{arctg} \frac{a_{(n)}}{b_{(n)}}.$$

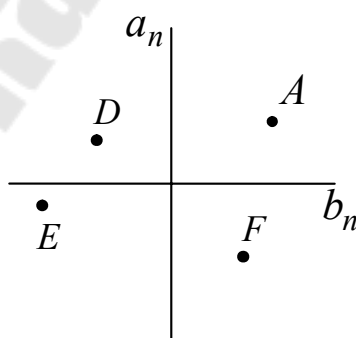


Рис. 3.1

При определении угла  $\psi_{(n)}$  следует установить, в какой четверти координатной плоскости находится этот угол (рис. 3.1). Так, если  $a_{(n)}$  и  $b_{(n)}$  положительны (точка  $A$ ), то угол  $\psi_{(n)}$  лежит в первой четверти;

если  $a_{(n)} > 0$ , а  $b_{(n)} < 0$  (точка  $D$ ), то  $\psi_{(n)}$  – во второй четверти; если  $a_{(n)}$  и  $b_{(n)}$  отрицательны (точка  $E$ ), то  $\psi_{(n)}$  – в третьей четверти; если же  $a_{(n)} < 0$ , а  $b_{(n)} > 0$  (точка  $F$ ), то угол  $\psi_{(n)}$  лежит в четвертой четверти.

При использовании второй формы разложения (формула (3.2)) амплитуды гармоник  $c_{(n)}$  не зависят от выбора начала отсчета: при сдвиге начала отсчета вдоль оси времени  $t$  на  $\tilde{t}$  секунд амплитуды  $c_{(n)}$  сохраняются, а фазы  $\psi_{(n)}$  получают приращение  $\pm \omega_n \tilde{t}$ .

Наиболее часто встречающиеся на практике Фурье-разложения приведены в табл. 3.1.

Действующее значение периодической величины:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}.$$

Действующие значения периодических величин, например, токов, не зависят от начальных фаз их гармонических составляющих и определяются по действующим значениям гармоник:

$$I = \sqrt{I_{(0)}^2 + \frac{I_{(1)m}^2}{2} + \frac{I_{(2)m}^2}{2} + \dots} = \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2 + \dots}.$$

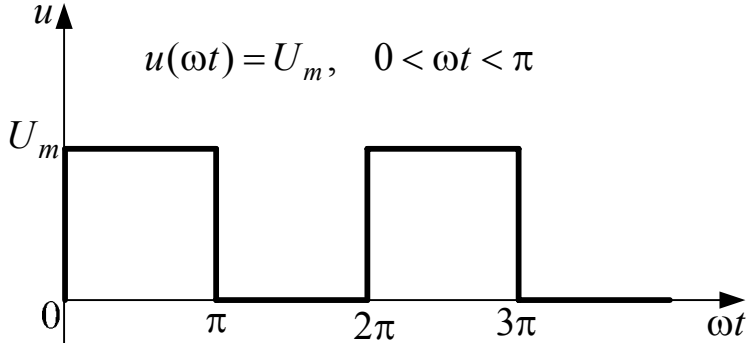
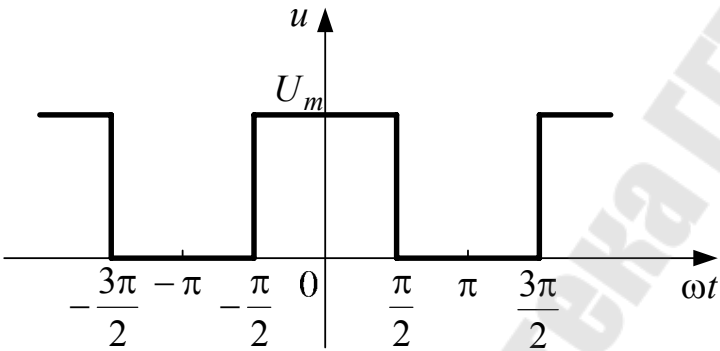
Если источник периодического несинусоидального напряжения подключен к какой-либо электрической схеме, то расчет токов в такой схеме проводится на основе метода наложения. Гармонические составляющие токов и напряжений находят по отдельности для каждой из гармоник питающего напряжения с помощью обычных приемов расчета цепей постоянного и синусоидального тока. При этом для  $k$ -й гармоники индуктивное и емкостное сопротивление соответственно равны:

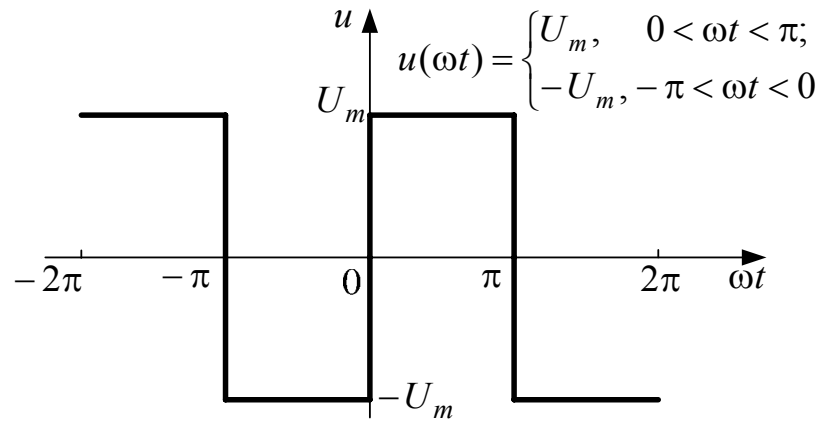
$$X_{L(k)} = k\omega_1 L; \quad X_{C(k)} = \frac{1}{k\omega_1 C}.$$

Активная ( $P$ ) и реактивная ( $Q$ ) мощность несинусоидальной схемы:

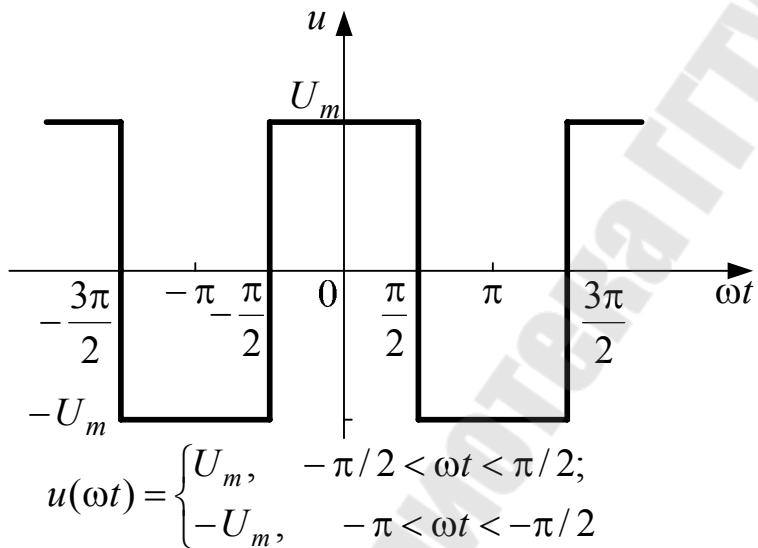
$$P = \sum_{n=0}^{\infty} U_{(n)} I_{(n)} \cos \varphi_{(n)}; \quad Q = \sum_{n=0}^{\infty} U_{(n)} I_{(n)} \sin \varphi_{(n)}.$$

## Наиболее часто встречающиеся на практике Фурье-разложения

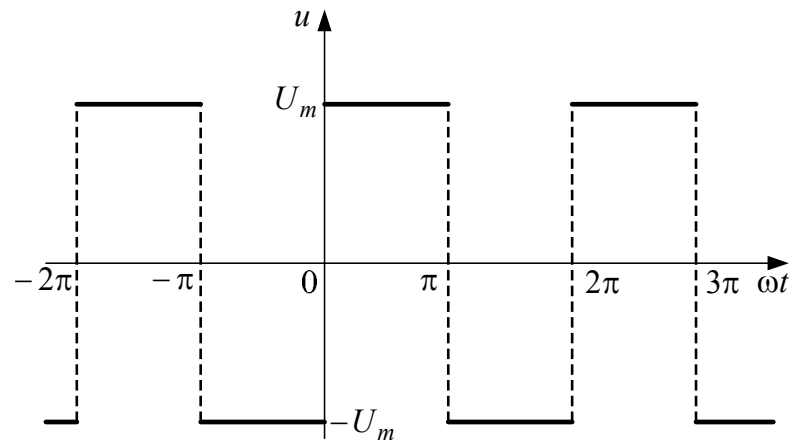
 <p><math>u(\omega t) = U_m, \quad 0 &lt; \omega t &lt; \pi</math></p>	$u(\omega t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$
 <p><math>u(\omega t) = U_m, \quad -\pi/2 &lt; \omega t &lt; \pi/2</math></p>	$u(\omega t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \left( \cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} + \dots \right)$



$$u(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$

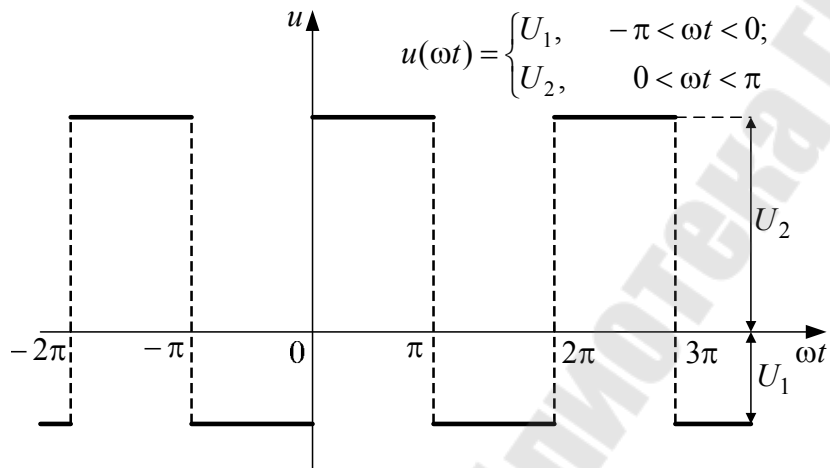


$$u(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi} \left( \cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} - \dots \right)$$



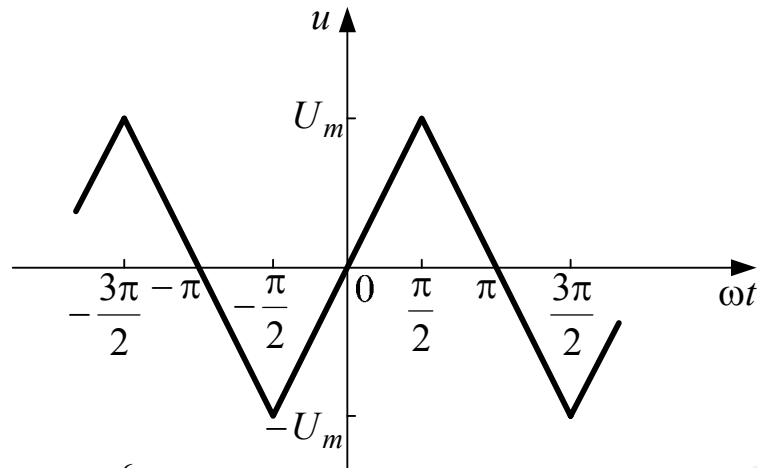
$$u(\omega t) = \begin{cases} -U_m, & -\pi < \omega t < 0; \\ U_m, & 0 < \omega t < \pi, U_m > 0 \end{cases}$$

$$u(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$



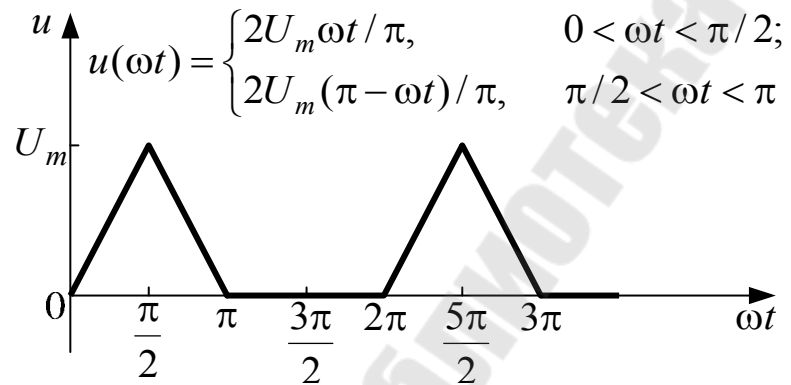
$$u(\omega t) = \begin{cases} U_1, & -\pi < \omega t < 0; \\ U_2, & 0 < \omega t < \pi \end{cases}$$

$$u(\omega t) = \frac{U_1 + U_2}{2} - 2 \frac{U_1 - U_2}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$



$$u(\omega t) = \begin{cases} U_m \omega t / \pi, & -\pi/2 < \omega t < \pi/2; \\ U_m \omega t (2\pi - \omega t) / \pi, & -\pi/2 < \omega t < \pi; \\ -2U_m \omega t (\pi + \omega t) / \pi, & -\pi/2 < \omega t < -\pi/2 \end{cases}$$

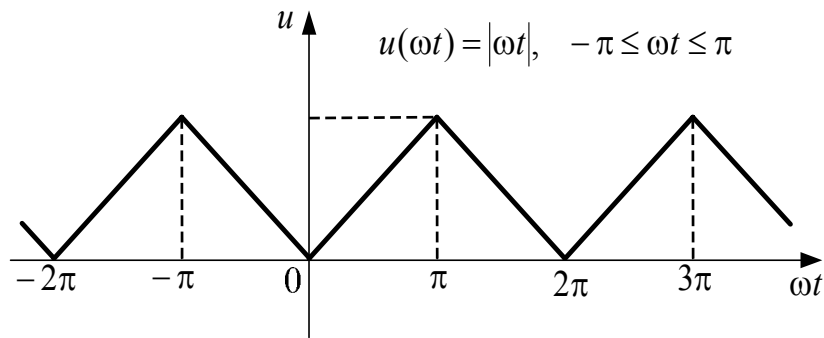
$$u(\omega t) = \frac{8U_m}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{\sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\omega t}{25} + \dots \right)$$



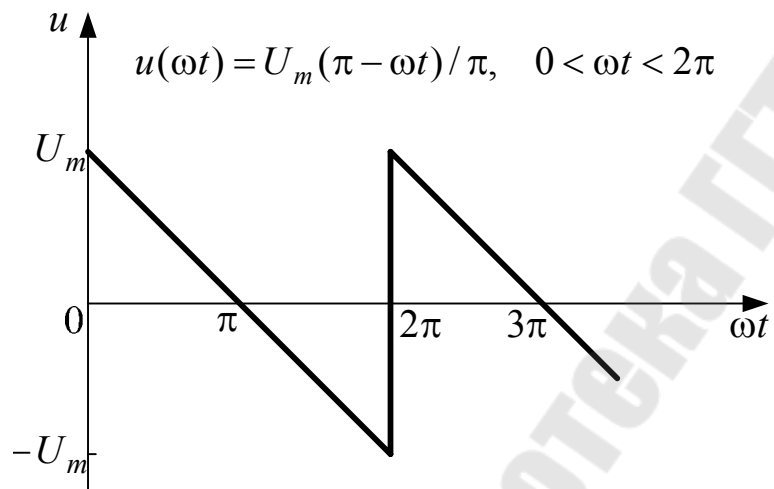
$$u(\omega t) = \begin{cases} 2U_m \omega t / \pi, & 0 < \omega t < \pi/2; \\ 2U_m (\pi - \omega t) / \pi, & \pi/2 < \omega t < \pi \end{cases}$$

$$u(\omega t) = \frac{U_m}{4} + \frac{4U_m}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{9} + \dots \right)$$

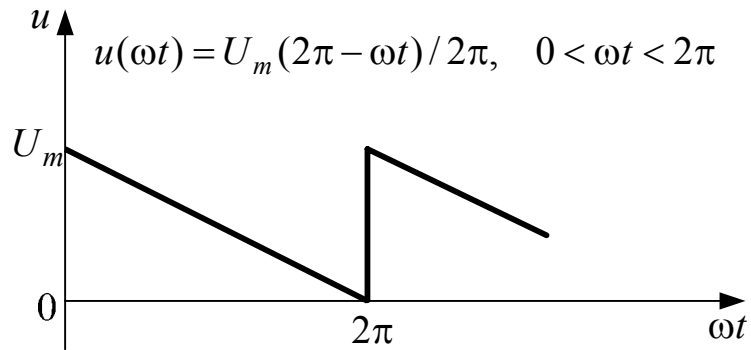




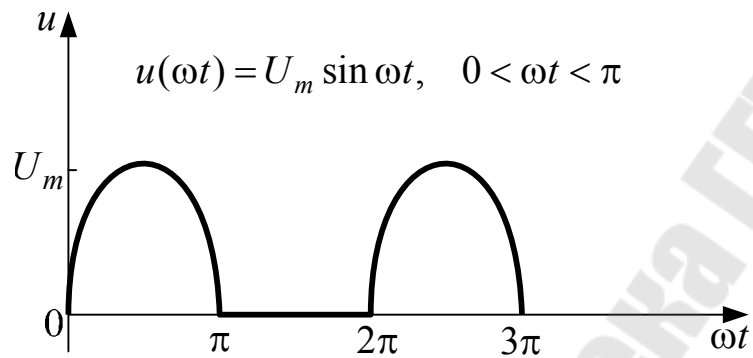
$$u(\omega t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$



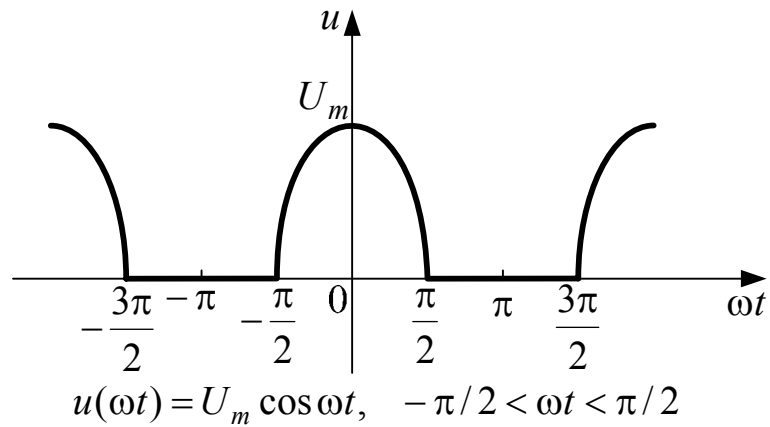
$$u(\omega t) = \frac{2U_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right)$$



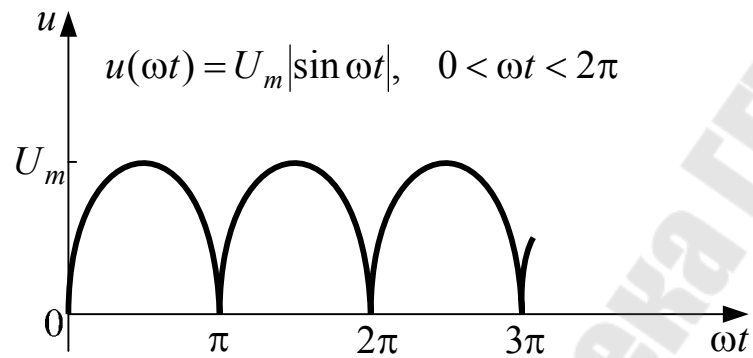
$$u(\omega t) = \frac{U_m}{4} + \frac{4U_m}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{9} + \dots \right)$$



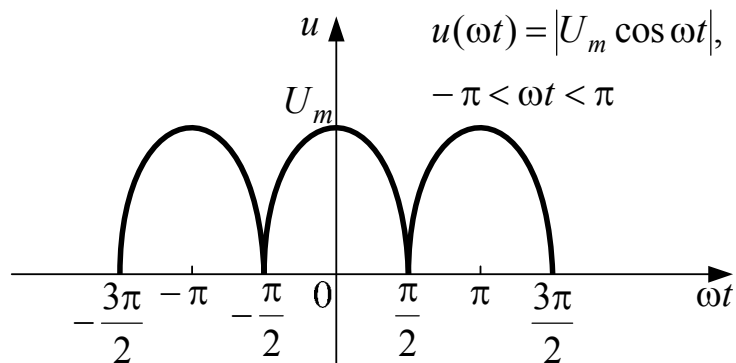
$$u(\omega t) = \frac{U_m}{\pi} + 2U_m \left( \frac{\sin \omega t}{4} - \frac{\cos 2\omega t}{3\pi} - \frac{\cos 4\omega t}{15\pi} - \dots \right)$$



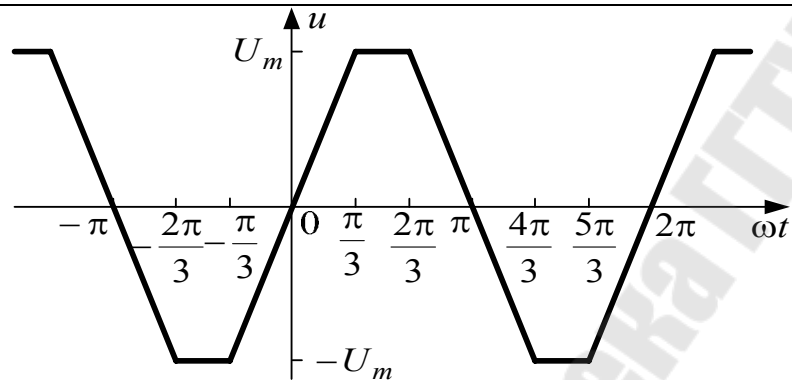
$$u(\omega t) = \frac{U_m}{\pi} + 2U_m \left( \frac{\cos \omega t}{4} + \frac{\cos 2\omega t}{3\pi} + \frac{\cos 4\omega t}{15\pi} + \dots \right)$$



$$u(\omega t) = \frac{U_m}{\pi} + 2U_m \left( \frac{\sin \omega t}{4} - \frac{\cos 2\omega t}{3\pi} - \frac{\cos 4\omega t}{15\pi} - \dots \right)$$



$$u(\omega t) = \frac{2U_m}{\pi} + \frac{4U_m}{\pi} \left( \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 4\omega t}{15} - \frac{\cos 6\omega t}{35} + \dots \right)$$



$$u(\omega t) = \begin{cases} 3U_m \omega t / \pi, & -\pi/3 \leq \omega t \leq \pi/3; \\ U_m, & \pi/3 \leq \omega t \leq 2\pi/3; \\ -U_m, & -2\pi/3 \leq \omega t \leq -\pi/3; \\ 3U_m (\pi - \omega t) / \pi, & 2\pi/3 \leq \omega t \leq \pi; \\ -3U_m (\pi + \omega t) / \pi, & -\pi \leq \omega t \leq -2\pi/3 \end{cases}$$

$$u(\omega t) = \frac{6U_m \sqrt{3}}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{\sin 5\omega t}{25} + \frac{\sin 7\omega t}{49} - \dots \right)$$

### Примеры решения задач

**3.1.** Получить разложение в ряд Фурье импульсов напряжения постоянной амплитуды  $U_m = 10$  В длительностью  $\tau = 0,2$  мс с периодом повторения  $T = 1$  мс.

*Решение*

Заданное напряжение можно выразить следующим образом:

$$u(t) = f_1(t) = U_m, \quad 0 < t < \tau;$$

$$u(t) = f_2(t) = 0, \quad \tau < t < T.$$

Область интегрирования содержит два участка. С помощью формул (3.3) находим коэффициенты ряда Фурье:

$$\frac{a_{(0)}}{2} = \left[ \int_0^{\tau} f_1(t) dt + \int_{\tau}^T f_2(t) dt \right] = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} U_m dt = U_m \frac{\tau}{T} = 10 \frac{0,2}{1} = 2;$$

$$\begin{aligned} a_{(n)} &= \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\tau} f_1(t) \cos n\omega_1 t dt + \int_{\tau}^T f_2(t) \cos n\omega_1 t dt \right] = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\tau} U_m \cos n\omega_1 t dt = \frac{2U_m}{n\omega_1 T} \sin n\omega_1 \tau = \frac{U_m}{\pi n} \sin n\omega_1 \tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{(n)} &= \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\tau} f_1(t) \sin n\omega_1 t dt + \int_{\tau}^T f_2(t) \sin n\omega_1 t dt \right] = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\tau} U_m \sin n\omega_1 t dt = -\frac{2U_m}{n\omega_1 T} [\cos n\omega_1 t] = \frac{U_m}{\pi n} (1 - \cos n\omega_1 \tau); \end{aligned}$$

$$U_{m(n)} = \sqrt{a_{(n)}^2 + b_{(n)}^2} = \frac{U_m}{\pi n} \sqrt{\sin^2 n\omega_1 \tau + (1 - \cos n\omega_1 \tau)^2} = \frac{2U_m}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 \tau}{2};$$

$$\operatorname{tg} \psi_{(n)} = \frac{a_{(n)}}{b_{(n)}} = \frac{\sin n\omega_1 \tau}{1 - \cos n\omega_1 \tau} = \operatorname{ctg} \frac{n\omega_1 \tau}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{n\omega_1 \tau}{2} \right);$$

$$\psi_{(n)} = \frac{\pi}{2} - n\omega_1 \frac{\tau}{2}.$$

Вычисляем коэффициенты второй формы ряда Фурье и начальные фазы гармоник. При этом учитываем, что

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1 \cdot 10^{-3}} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_1 \tau = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} = 0,4 \text{ рад.}$$

Для удобства результаты расчетов сведены в табл. 3.2 (расчеты проведены для  $n$  от 1 до 10; аналогичные расчеты для  $n = 11-15$  следует проделать самостоятельно).

Искомый ряд:

$$u(t) = [2 + 3,74 \sin(\omega_1 t + 0,3\pi) + 3,03 \sin(2\omega_1 t + 0,1\pi) + \\ + 2,02 \sin(3\omega_1 t - 0,1\pi) + 0,935 \sin(4\omega_1 t - 0,3\pi) - 0,624 \times \\ \times \sin(6\omega_1 t - 0,7\pi) - 0,866 \sin(7\omega_1 t - 0,9\pi) - \\ - 0,757 \sin(8\omega_1 t - 1,1\pi) - 0,416 \sin(9\omega_1 t - 1,3\pi) + \dots] \text{ В.}$$

Учитывая, что

$$-\sin(n\omega_1 t - \psi_{(n)}) = \sin(n\omega_1 t - \psi_{(n)} \pm \pi),$$

окончательно получим:

$$u(t) = [2 + 3,74 \sin(\omega_1 t + 0,3\pi) + 3,03 \sin(2\omega_1 t + 0,1\pi) + \\ + 2,02 \sin(3\omega_1 t - 0,1\pi) + 0,935 \sin(4\omega_1 t - 0,3\pi) + \\ + 0,624 \sin(6\omega_1 t + 0,3\pi) + 0,866 \sin(7\omega_1 t + 0,1\pi) + \\ + 0,757 \sin(8\omega_1 t - 0,1\pi) + 0,416 \sin(9\omega_1 t - 0,3\pi) + \dots] \text{ В.}$$

Таблица 3.2

## Сводка результатов расчета к решению задачи 3.1

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n\omega_1 = \omega_{(n)}$	0	$2\pi \cdot 10^3$	$4\pi \cdot 10^3$	$6\pi \cdot 10^3$	$8\pi \cdot 10^3$	$10\pi \cdot 10^3$	$12\pi \cdot 10^3$	$14\pi \cdot 10^3$	$16\pi \cdot 10^3$	$18\pi \cdot 10^3$	$20\pi \cdot 10^3$
$\omega_n \tau / 2 = \omega_n \cdot 10^{-4}$	0	$0,2\pi$	$0,4\pi$	$0,6\pi$	$0,8\pi$	$\pi$	$1,2\pi$	$1,4\pi$	$1,6\pi$	$1,8\pi$	$2\pi$
$\sin \frac{n\omega_1 \tau}{2}$	0	0,588	0,951	0,951	0,588	0	-0,588	-0,951	-0,951	-0,588	0
$U_{m(n)}$	2	3,74	3,03	2,02	0,935	0	-0,624	-0,866	-0,757	-0,416	0
$\Psi_{(n)}$	-	$0,3\pi$	$0,1\pi$	$-0,1\pi$	$-0,3\pi$	-	$-0,1\pi$	$-0,9\pi$	$-1,1\pi$	$-1,3\pi$	-

**3.2.** Записать три первые гармоники разложения периодического несинусоидального напряжения, развертка которого показана на рис. 3.2.1.

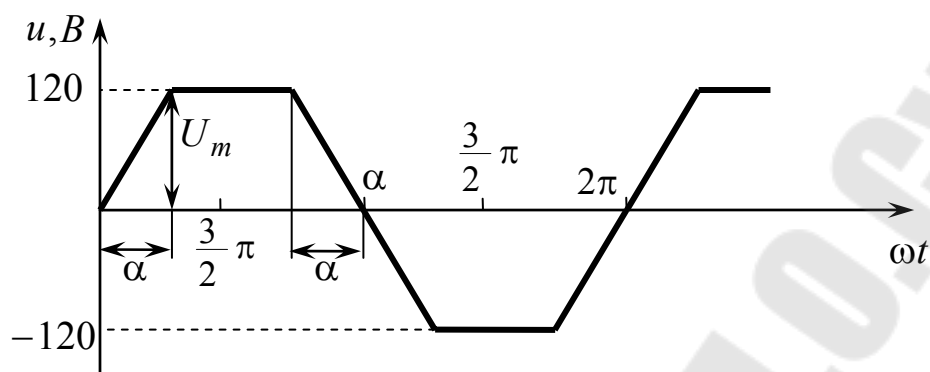


Рис. 3.2.1

*Решение*

Для заданной периодической функции имеется табличное разложение в ряд Фурье:

$$u(t) = \frac{4U_m}{\alpha\pi} \left( \sin \alpha \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right).$$

В нашем случае  $U_m = 120$  В,  $\alpha = \pi/4$  рад. Следовательно,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{4 \cdot 120 \cdot 4}{\pi \cdot \pi} \left( \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi}{4} \cdot \sin 5\omega t \right) = \\ &= 137,6 \sin \omega t + 15,3 \sin 3\omega t - 5,5 \sin 5\omega t = 137,6 \sin \omega t + 15,3 \sin 3\omega t + \\ &\quad + 5,5 \sin(5\omega t - 180^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

**3.3.** Записать ряд Фурье для функции  $u_2(t)$ , представленной на рис. 3.3.1.

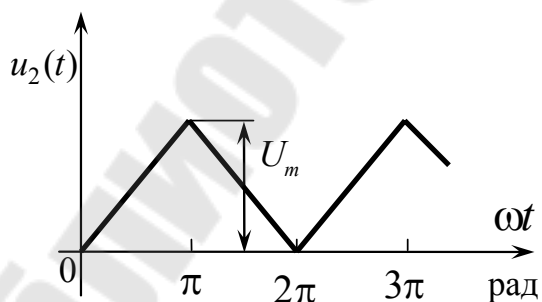


Рис. 3.3.1

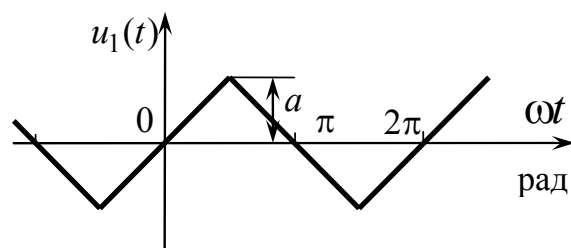


Рис. 3.3.2



*Решение*

Известно табличное разложение функции

$$u_1(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

(см. рис. 3.3.2). Сместим  $u_1(t)$  на четверть периода вправо, что соответствует уменьшению  $t$  на величину  $T/4$  или  $\omega t$  на величину  $\omega T/4 = 2\pi/4 = \pi/2$ . Получим функцию:

$$f_1'(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left[ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(3\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{25} \sin\left(5\omega t - \frac{5\pi}{2}\right) + \dots \right].$$

С учетом того, что

$$\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \omega t; \quad \sin\left(3\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos 3\omega t;$$

$$\sin\left(5\omega t - \frac{5\pi}{2}\right) = -\cos 5\omega t,$$

получим:

$$f_1'(t) = \frac{8a}{\pi^2} \left( -\cos \omega t - \frac{1}{9} \cos 3\omega t - \frac{1}{25} \cos 5\omega t - \dots \right).$$

В завершение заменим амплитуду  $\alpha$  на  $\frac{U_m}{2}$  и поднимем функцию на величину ее постоянной составляющей. Искомое разложение имеет вид:

$$u_2(t) = \frac{U_m}{2} - \frac{4U_m}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

**3.4.** Определить мгновенное значение тока  $i(t)$  в схеме рис. 3.4.1, если  $u(t) = 75 + 106\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) - 50\sqrt{2} \sin(2\omega t - 45^\circ)$ , а элементы схемы имеют сопротивления  $\omega L = \frac{1}{\omega C} = 100$  Ом,  $R = 150$  Ом.

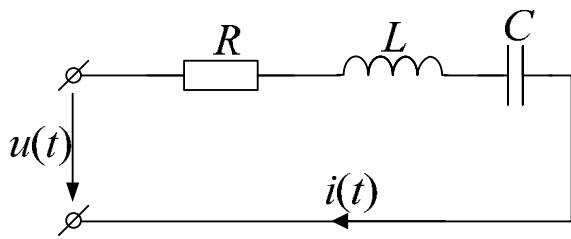


Рис. 3.4.1

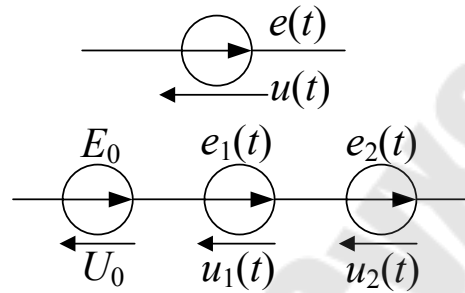


Рис. 3.4.2

### Решение

Расчет линейной схемы с несинусоидальными источниками ведем по принципу наложения. Каждое слагаемое суммы

$$u(t) = u_{(0)} + u_{(1)}(t) + u_{(2)}(t) + \dots$$

представляется отдельным источником (рис. 3.4.2). Сопротивления элементов схемы для каждой гармонической составляющей определяются частотой соответствующего источника:

$$X_{L(k)} = k\omega_1 L; \quad X_{C(k)} = \frac{1}{k\omega_1 C}.$$

При этом активное сопротивление  $R$  от частоты не зависит.

Ток схемы не содержит постоянной составляющей ( $I_{(0)} = 0$ ), т.к. в схеме есть конденсатор ( $X_{C(0)} = \infty$ ).

*Расчет первой гармоники:*

$$\underline{U}_{m(1)} = 106 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \text{ В}; \quad X_{L(1)} = \omega L = 100 \text{ Ом}; \quad X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(1)} = R + j(X_{L(1)} - X_{C(1)}) = 150 + j(100 - 100) = 150 \text{ Ом}.$$

Для первой гармоники наблюдается резонанс напряжений. При этом

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{106 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}}{150} = 1,0 \cdot e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

*Расчет второй гармоники:*

$$\underline{U}_{m(2)} = -50 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = 50 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ} \text{ В};$$

$$X_{L(2)} = 2\omega L = 200 \text{ Ом. } X_{C(2)} = \frac{1}{2\omega C} = 50 \text{ Ом;}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(2)} &= R + j(X_{L(2)} - X_{C(2)}) = 150 + j(200 - 50) + 150 + j150 = \\ &= 300\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \text{ Ом;} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_{m(2)} = \frac{U_{m(2)}}{\underline{Z}_{(2)}} = \frac{50\sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ}}{300\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}} = 0,166e^{j90^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение искомого тока:

$$i(t) = I_{(0)} + i_{(1)}(t) + i_{(2)}(t) = 0 + 1 \sin(\omega t + 45^\circ) + 0,166 \sin(\omega t + 90^\circ), \text{ А.}$$

**3.5.** В схеме рис. 3.5.1  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $u(t) = U_{(0)} + U_{m(1)} \sin \omega_1 t + U_{m(3)} \sin(3\omega_1 t + \psi_{(3)})$ , где  $U_{(0)} = 30 \text{ В}$ ;  $U_{m(1)} = 100 \text{ В}$ ;  $U_{m(3)} = 40 \text{ В}$ ;  $\psi_{(3)} = 20^\circ$ . Реактивные элементы цепи на основной частоте имеют сопротивления  $\omega_1 L = 12 \text{ Ом}$  и  $1/(\omega_1 C) = 30 \text{ Ом}$ . Записать выражение мгновенного значения тока неразветвленного участка схемы. Определить действующее значение каждого тока. Вычислить мощность, потребляемую в схеме.

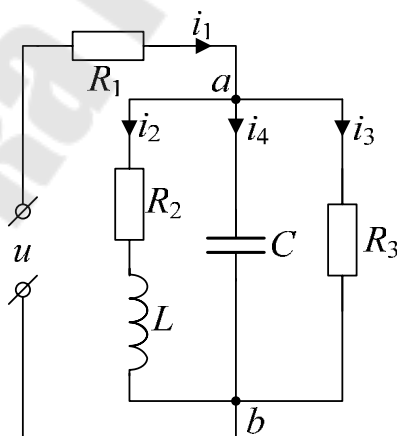


Рис. 3.5.1

*Решение*

*Расчет постоянной составляющей:*

Эквивалентное сопротивление схемы и постоянные составляющие ее токов:

$$R_{\text{ЭК}(0)} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6 + \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 10 \text{ Ом},$$

$$I_{1(0)} = U_0 / R_{\text{ЭК}(0)} = 30 / 10 = 3 \text{ А};$$

$$I_{2(0)} = I_{1(0)} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3 \cdot \frac{20}{5 + 20} = 2,4 \text{ А};$$

$$I_{3(0)} = I_{1(0)} - I_{2(0)} = 3 - 2,4 = 0,6 \text{ А}; \quad I_{4(0)} = 0.$$

*Расчет первой гармоники:*

Определим комплексное сопротивление трех параллельных ветвей:

$$\begin{aligned} 1/\underline{Z}_{ab(1)} &= 1/\underline{Z}_{2(1)} + 1/\underline{Z}_{3(1)} + 1/\underline{Z}_{4(1)} = \\ &= 1/(5 + j12) + 1/20 + 1/(-j30) = (79,6 - j37,7) \cdot 10^{-3} \text{ См}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\underline{Z}_{ab(1)} = \frac{1}{(79,6 - j37,7) \cdot 10^{-3}} = 11,4e^{j25^\circ 20'} = (10,25 + j4,83) \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление всей схемы:

$$\underline{Z}_{\text{ЭК}(1)} = R_1 + \underline{Z}_{ab(1)} = 16,25 + j4,83 = 17e^{j16^\circ 30'} \text{ Ом}.$$

Комплексы амплитуд тока неразветвленной части схемы, межузлового напряжения и токов параллельных ветвей находим по закону Ома:

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{U_{m(1)}}{\underline{Z}_{\text{ЭК}(1)}} = 100/17e^{j16^\circ 30'} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{abm(1)} = \underline{I}_{1m(1)} \underline{Z}_{ab(1)} = 5,88e^{-j16^\circ 30'} \cdot 11,4e^{j25^\circ 20'} = 67e^{j8^\circ 50'} \text{ В};$$

$$\underline{I}_{2m(1)} = \underline{U}_{abm(1)} / \underline{Z}_{2(1)} = 67e^{j8^\circ 50'} / (5 + j12) = 5,15e^{-j58^\circ 30'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{3m(1)} = \underline{U}_{abm(1)} / \underline{Z}_{3(1)} = 67e^{j8^\circ 50'} / 20 = 3,35e^{j8^\circ 50'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{4m(1)} = \underline{U}_{abm(1)} / \underline{Z}_{4(1)} = 67e^{j8^\circ 50'} / (-j30) = 2,23e^{j98^\circ 50'} \text{ A.}$$

Расчет для третьей гармоники проводится аналогично:

$$\underline{Z}_{1(3)} = 6 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{2(3)} = R_2 + j3\omega_1 L = 5 + j36 = 36,5e^{j82^\circ 10'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = 20 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{4(3)} = -j1/(3\omega_1 C) = -j1/3 \cdot 30 = -j10 \text{ Ом};$$

$$1/\underline{Z}_{ab(3)} = 1/(5 + j36) + 1/20 + 1/(-j10) = (53,77 + j72,8) \cdot 10^{-3} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{ab(3)} = 6,56 - j8,9 = 11,05e^{-j53^\circ 35'} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{\text{эк}(3)} = \underline{Z}_{1(3)} + \underline{Z}_{ab(3)} = 12,56 - j8,9 = 15,35e^{-j35^\circ 5'} \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{1m(3)} = 40e^{j20^\circ} / 15,35e^{-j35^\circ 5'} = 2,6e^{j55^\circ 5'} \text{ A};$$

$$\underline{U}_{abm(3)} = 2,6e^{j55^\circ 5'} \cdot 11,05e^{-j53^\circ 35'} = 28,7e^{j1^\circ 30'} \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{2m(3)} = \underline{U}_{abm(3)} / \underline{Z}_{2(3)} = 28,7e^{j1^\circ 30'} / 36,5e^{j82^\circ 10'} = 0,79e^{-j80^\circ 40'} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{3m(3)} = \underline{U}_{abm(3)} / \underline{Z}_{3(3)} = 28,7e^{j1^\circ 30'} / 20 = 1,44e^{j1^\circ 30'} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{4m(3)} = \underline{U}_{abm(3)} / \underline{Z}_{4(3)} = 28,7e^{j1^\circ 30'} / 10e^{-j90^\circ} = 2,87e^{j91^\circ 30'} \text{ A.}$$

Ток неразветвленной части схемы:

$$i(t) = [3 + 5,88\sin(\omega_1 t - 16^\circ 30') + 2,6\sin(3\omega_1 t + 55^\circ 5')], \text{ A.}$$

Действующие значения токов:

$$I_{(1)} = \sqrt{3^2 + \frac{5,88^2 + 2,6^2}{2}} = 5,45 \text{ A}; \quad I_{(2)} = \sqrt{2,4^2 + \frac{5,15^2 + 0,79^2}{2}} = 4,4 \text{ A};$$

$$I_{(3)} = \sqrt{0,6^2 + \frac{3,52^2 + 1,44^2}{2}} = 2,64 \text{ A}; \quad I_{(4)} = \sqrt{\frac{2,32^2 + 2,87^2}{2}} = 2,57 \text{ A.}$$

Мощность, расходуемая в схеме:

$$P = 30 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 5,88 \cos 16^\circ 30' + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2,6 \cos 33^\circ 5' = 415 \text{ Вт.}$$

Проверка:

$$P = I_{(1)}^2 R_1 + I_{(2)}^2 R_2 + I_{(3)}^2 R_3 = 5,45^2 \cdot 6 + 4,4^2 \cdot 5 + 2,64^2 \cdot 20 = \\ = 178 + 97 + 140 = 415 \text{ Вт.}$$

**3.6.** Рассчитать мгновенные значения токов  $i_1$  и  $i_3$  (рис. 3.6.1), активную мощность  $P$  и коэффициент мощности  $\cos \varphi$ , если на первой гармонике  $X_L = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 25 \text{ Ом}$ ,  $R = 20 \text{ Ом}$ ,  $i_2 = 10 \sin \omega t + 5 \sin 5\omega t \text{ А}$ .

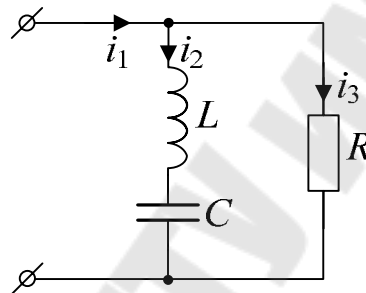


Рис. 3.6.1

Решение

Первая гармоника:

$$\underline{I}_{2m(1)} = 10 \text{ А}; \quad \underline{Z}_{2(1)} = +j5 - j25 = -j20 = 20e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{U}_{2m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} \cdot \underline{Z}_{2m(1)} = 10 \cdot 20e^{-j90^\circ} = 200e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_{3m(1)} = \frac{\underline{U}_{2m(1)}}{R} = \frac{200e^{-j90^\circ}}{20} = 10e^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{1m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} + \underline{I}_{3m(1)} = 10 - j10 = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ А.}$$

Пятая гармоника:

$$\underline{I}_{2m(5)} = 5 \text{ А}; \quad \underline{Z}_{2(5)} = j25 - j5 = j20 = 20e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{U}_{2m(5)} = \underline{I}_{2m(5)} \cdot \underline{Z}_{2m(5)} = 5 \cdot 20 e^{j90^\circ} = 100 e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_{3m(5)} = \frac{100 e^{j90^\circ}}{20} = 5 e^{j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{1m(5)} = \underline{I}_{2m(5)} + \underline{I}_{3m(5)} = 5 + j5 = 5\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Искомые величины:

$$i_1 = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ) + 5\sqrt{2} \sin(5\omega t + 45^\circ) \text{ А};$$

$$i_3 = 10 \sin(\omega t - 90^\circ) + 5 \sin(5\omega t + 90^\circ) \text{ А}.$$

Активная мощность выделяется только в сопротивлении  $R$ , поэтому

$$P = U_{23(1)} I_{1(1)} \cos \varphi_{(1)} + U_{23(5)} I_{1(5)} \cos \varphi_{(5)}$$

либо

$$P = P_{R(1)} + P_{R(5)} = U_{23(1)} I_{3(1)} \cos \varphi_{3(1)} + U_{23(5)} I_{3(5)} \cos \varphi_{3(5)}.$$

Имеем:

$$P = P_R = I_{3(1)}^2 R + I_{3(5)}^2 R = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 20 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 20 = 1000 + 250 = 1250 \text{ Вт}.$$

Рассчитаем полную мощность  $S = U_2 \cdot I_1$ :

$$U_2 = \sqrt{\left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2} = 158 \text{ В}; \quad I_1 = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,2 \text{ А};$$

$$S = U_2 \cdot I_1 = 158 \cdot 11,2 = 1770 \text{ ВА}.$$

Следовательно, коэффициент мощности  $\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1250}{1770} = 0,706$ .

**3.7.** Для схемы рис. 3.7.1 определить мгновенные значения токов в ветвях, если  $e(t) = 20 \sin(2\omega t - 90^\circ)$  В;  $j(t) = 10 + 10 \sin(\omega t + 60^\circ)$ , А;

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2 \text{ Ом}; \quad R_1 = R_2 = 4 \text{ Ом}.$$

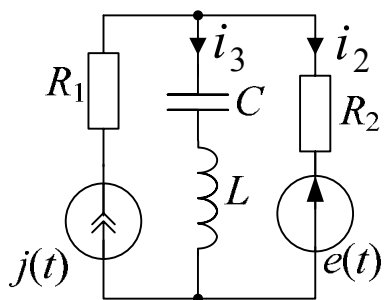


Рис. 3.7.1

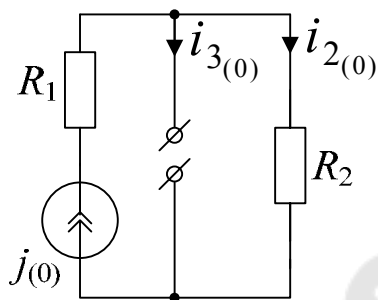


Рис. 3.7.2

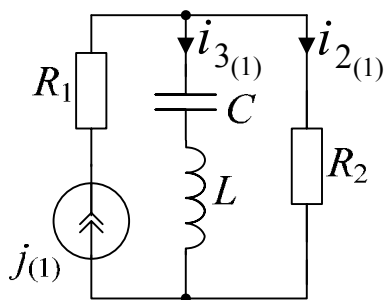


Рис. 3.7.3

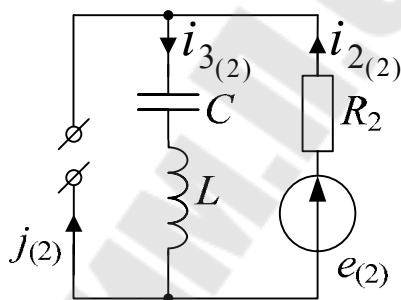


Рис. 3.7.4

### Решение

По условию, источник тока содержит нулевую и первую гармоники, а источник ЭДС – только вторую гармонику. С учетом этого токораспределение заданной схемы найдем путем наложения трех режимов, соответствующих нулевой (рис. 3.7.2), первой (рис. 3.7.3) и второй (рис. 3.7.4) гармоникам.

Для постоянных составляющих имеем:  $I_{2(0)} = j_{(0)} = 10 \text{ А}$ ,  $I_{3(0)} = 0$ . Для расчета первой и второй гармоник вначале определим комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_{1(1)} = \underline{Z}_{2(1)} = R_1 = R_2 = 40 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{3(1)} = j\omega L - \frac{j}{j\omega C} = j2 - j2 = 0;$$

$$\underline{Z}_{2(2)} = 4 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_{3(2)} = j2\omega L - j\frac{1}{2\omega C} = j4 - j1 = j3 \text{ Ом}.$$

Следовательно,

$$\underline{I}_{2(1)} = 0, \quad \underline{I}_{3(1)} = \underline{J}_{(1)} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} \text{ А},$$



$$\underline{J}_{1(2)} = 0; \quad \underline{I}_{2(2)} = \underline{I}_{3(2)} = \frac{\underline{E}_{(2)}}{\underline{Z}_{2(2)} + \underline{Z}_{3(2)}} = \frac{\left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)e^{-j90^\circ}}{4 + j3} = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-j127^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенные значения токов в ветвях без источника тока:

$$i_2 = I_{2(0)} + i_{2(1)} - i_{2(2)} = 10 - 4 \sin(2\omega t - 127^\circ), \text{ А;}$$

$$i_3 = I_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(2)} = 10 \sin(\omega t + 60^\circ) + 4 \sin(2\omega t - 127^\circ), \text{ А.}$$

Действующие значения токов:

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + \left(\frac{I_{1m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2} = 12,24 \text{ А;}$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + \left(\frac{I_{2m(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 10,39 \text{ А;}$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(0)}^2 + \left(\frac{I_{3m(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7,615 \text{ А.}$$

**3.8.** Определить показания электромагнитных приборов в схеме рис. 3.8.1, если  $u(t) = 4 + 5\sqrt{2} \sin \omega t - 3\sqrt{2} \sin 2\omega t$ , В;  $R = 5$  Ом, на первой гармонике  $X_{L_2} = X_{C_2} = 2$  Ом;  $X_{C_3} = 6$  Ом.

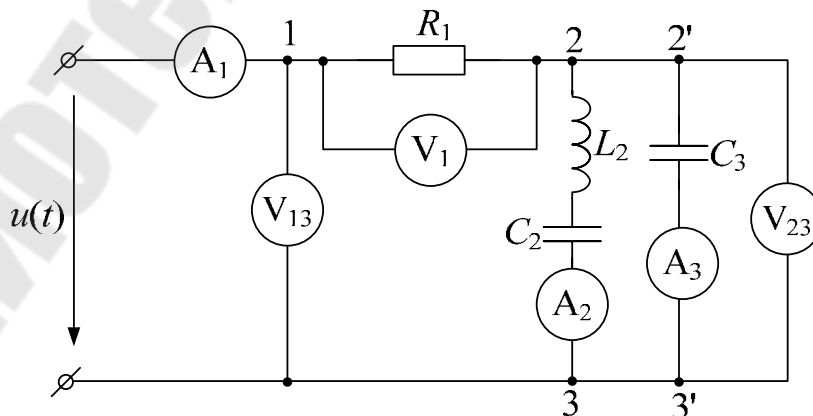


Рис. 3.8.1

*Решение*

Так как постоянный ток через емкость не протекает, то

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = I_{3(0)} = 0; \quad U_{1(0)} = 0; \quad U_{13(0)} = U_{23(0)} = 4 \text{ В.}$$

*Расчет первой гармоники:*

В ветви 2–3 резонанс напряжений:

$$X_{2(1)} = X_{L2(1)} - X_{C2(1)} = 0.$$

Следовательно, ветвь 2'–3' закорочена:

$$I_{3(1)} = 0; \quad I_{1(1)} = I_{2(1)} = \frac{U_{(1)}}{R_1} = \frac{5}{5} = 1 \text{ А};$$

$$U_{23(1)} = 0; \quad U_{13(1)} = U_{(1)} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5 \text{ В.}$$

*Расчет второй гармоники:*

$$X_{2(2)} = X_{L2(2)} - X_{C2(2)} = 4 - 1 = 3 \text{ Ом}; \quad X_{3(2)} = X_{C3(2)} = \frac{6}{2} = 3 \text{ Ом.}$$

В параллельных ветвях резонанс токов:

$$\underline{Z}_{23(2)} = \infty; \quad I_{1(2)} = 0; \quad U_{12(2)} = 0; \quad U_{23(2)} = U_{(2)} = 3 \text{ В};$$

$$\underline{I}_{2(2)} = \frac{U_{23(2)}}{X_{2(2)}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ А}; \quad \underline{I}_{3(2)} = \frac{U_{23(2)}}{X_{3(2)}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ А.}$$

Показания приборов:

$$I_{A_1} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(2)}^2} = 1 \text{ А};$$

$$I_{A_2} = \sqrt{I_{2(0)}^2 + I_{2(1)}^2 + I_{2(2)}^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ А};$$

$$I_{A_3} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \text{ А};$$

$$U_{V_1} = \sqrt{U_{1(0)}^2 + U_{1(1)}^2 + U_{1(2)}^2} = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5 \text{ В};$$

$$U_{V_{23}} = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5 \text{ В}; \quad U = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = 7,07 \text{ В}.$$

**3.9.** Схема рис. 3.9.1 подключена к источнику питания с напряжением  $u(t) = 20 + 80 \sin 500t + 30 \sin(2 \cdot 500t - 45^\circ)$ , В. Элементы схемы имеют параметры  $R = 20$  Ом,  $L_1 = 40$  мГн,  $L_2 = 20$  мГн,  $C_1 = 100$  мкФ,  $C_2 = 50$  мкФ. Определить ток  $i(t)$ .

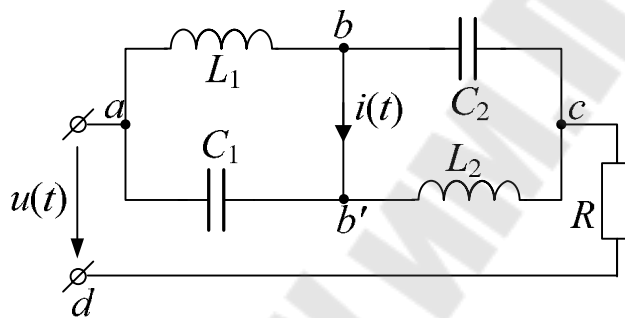


Рис. 3.9.1

*Решение*

Напряжение источника задано в виде усеченного ряда Фурье, содержащего постоянную составляющую ( $U_{(0)} = 20$  В), первую ( $u_{(1)} = 80 \sin 500t$  В) и вторую ( $u_{(2)} = 30 \sin(2 \cdot 500t - 45^\circ)$ , В) гармоники. Поэтому ток  $i(t)$  можно представить в виде  $i(t) = I_{(0)} + i_{(1)} + i_{(2)}$ .

Постоянная составляющая  $I_{(0)}$  течет по пути  $a - b - b' - c - d$  и равна

$$I_{(0)} = \frac{U_{(0)}}{R} = \frac{20}{20} = 1 \text{ А}.$$

На частоте первой гармоники ( $\omega = 500$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ )

$$X_{L1(1)} = \omega L_1 = 500 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом};$$

$$X_{C1(1)} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{500 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом},$$

т. е. контур  $L_1 C_1$  настроен в резонанс. Его общее сопротивление на этой частоте бесконечно велико, напряжение первой гармоники  $u_{(1)}$  будет приложено к зажимам этого контура. При этом ток на участке  $bb'$  будет иметь комплексную амплитуду

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{U_{m(1)}}{jX_{L1(1)}} = \frac{80}{j20} = 4e^{-j90^\circ} \text{ А}$$

и мгновенное значение

$$i_{(1)} = 4 \sin(500t - 90^\circ), \text{ А.}$$

На частоте второй гармоники ( $\omega = \omega_{(2)} = 2 \cdot 500 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ ):

$$X_{L2(2)} = 2\omega L_2 = 2 \cdot 500 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом};$$

$$X_{C2(2)} = \frac{1}{2\omega C_2} = \frac{1}{2 \cdot 500 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом},$$

т. е. контур  $L_2 C_2$  настроен в резонанс. Его общее сопротивление бесконечно велико и напряжение второй гармоники  $U_{(2)}$  приложено к зажимам этого контура. Ток на участке  $bb'$  будет иметь комплексную амплитуду

$$\underline{I}_{m(2)} = \frac{U_{m(2)}}{jX_{L2(2)}} = \frac{30e^{-j45^\circ}}{j20} = 1,5e^{-j135^\circ} \text{ А}$$

и мгновенное значение

$$i_{(2)} = 1,5 \sin(2 \cdot 500t - 135^\circ), \text{ А.}$$

В итоге

$$i(t) = I_{(0)} + i_{(1)} + i_{(2)} = 1 + 4 \sin(500t - 90^\circ) + 1,5 \sin(2 \cdot 500t - 135^\circ), \text{ А.}$$

**3.10.** В схеме рис. 3.10.1  $R = 100 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $u(t) = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 30 \sin 5\omega t$ , В. Рассчитать значения  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L_2$ , при которых в резисторе  $R$  будет проте-

каты лишь ток третьей гармоники, причем его величина должна быть наибольшей. Определить мгновенное значение этого тока.

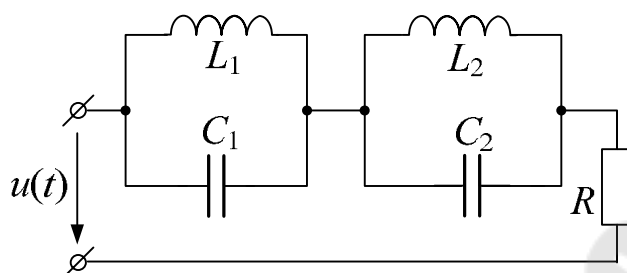


Рис. 3.10.1

### Решение

Для того, чтобы в резисторе  $R$  отсутствовали токи первой и пятой гармоник, оба параллельных контура ( $L_1C_1$  и  $L_2C_2$ ) должны быть настроены в резонанс токов на соответствующих частотах. Кроме того, ток третьей гармоники в резисторе  $R$  будет наибольшим, если реактивное сопротивление схемы на частоте  $3\omega$  будет равно 0, т. е. при резонансе напряжений. Рассмотрим два решения.

1. Контур  $L_1C_1$  настроен в резонанс на частоте  $\omega$ , а контур  $L_2C_2$  – на частоте  $5\omega$ .

Из условия резонанса токов следует:

$$\frac{1}{L_1C_1} = \omega^2; \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{L_2C_2} = 25\omega^2. \quad (3.5)$$

Из условия резонанса напряжений следует:

$$\frac{\frac{3 \cdot \omega L_1}{3\omega C_1}}{3\omega L_1 - \frac{1}{3\omega C_1}} + \frac{\frac{3 \cdot \omega L_2}{3\omega C_2}}{3\omega L_2 - \frac{1}{3\omega C_2}} = 0$$

или после преобразований:

$$\frac{L_2}{9\omega^2 L_1 C_1 - 1} + \frac{L_2}{9\omega^2 L_1 C_2} = 0. \quad (3.6)$$

Решая совместно уравнения (3.4)–(3.6), нетрудно получить:

$$C_1 \approx 0,253 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \quad C_2 \approx 0,127 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \quad L_2 = 0,008 \text{ Гн.}$$

2. Контур  $L_1C_1$  настроен в резонанс на частоте  $5\omega$ , а контур  $L_2C_2$  – на частоте  $\omega$ . В этом случае условие (3.6) не изменится, а вместо равенств (3.4) и (3.5) будем иметь:

$$\frac{1}{L_1C_1} = 25\omega^2; \quad \frac{1}{L_2C_2} = \omega^2. \quad (3.7)$$

Решая совместно уравнения (3.6) и (3.7), получим:

$$C_1 \approx 0,01 \cdot 10 \text{ Ф}; \quad C_2 \approx 0,02 \cdot 10 \text{ Ф}; \quad L_2 = 1,25 \text{ Гн.}$$

Для обоих решений общее сопротивление контуров  $L_1C_1$  и  $L_2C_2$  равно нулю. Следовательно, мгновенное значение тока в резисторе

$$i = \frac{u_{(3)}}{R} = \frac{50 \sin 3\omega t}{100} = 0,5 \sin 3\omega t, \text{ А.}$$

**3.11.** В схеме рис. 3.11.1  $L_1 = 2,5$  Гн. На вход схемы подано напряжение  $u(t) = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t$ , В;  $\omega = 314$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ . Рассчитать значения емкостей  $C_1$  и  $C_2$ , при которых напряжение на сопротивлении  $R_H$  не зависит от значения  $R_H$  и равно  $U_H = 100 \sin \omega t$ , В.

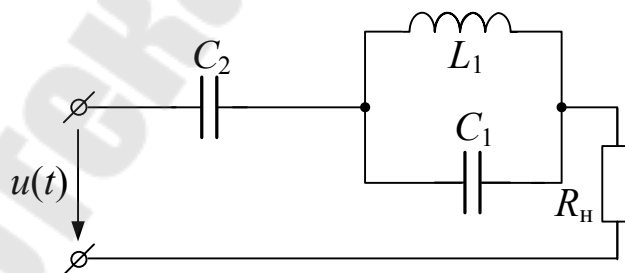


Рис. 3.11.1

*Решение*

Напряжение  $U_H$  не будет содержать третьей гармоники в том случае, когда параллельный контур  $L_1C_1$  настроен в резонанс, т. е. при условии

$$3\omega C_1 = \frac{1}{3\omega L_1},$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{9\omega^2 L_1} = \frac{1}{9 \cdot 3,14^2 \cdot 2,5} \approx 0,45 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Вместе с тем, напряжение  $U_n$  равно первой гармонике напряжения источника тогда, когда сопротивление схемы является чисто активным, т. е. при резонансе напряжений. Из условия резонанса напряжений на первой гармонике следует, что

$$\frac{\frac{L_1}{C_1}}{\frac{1}{\omega C_1} - \omega L_1} - \frac{1}{\omega C_2} = 0,$$

откуда

$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_1} - C_1 = \frac{1}{3,14^2 \cdot 2,5} - 0,45 \cdot 10^{-6} \approx 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

**3.12.** Написать выражения мгновенных значений тока  $i$  и напряжения  $u_{ab}$  на участке  $ab$  схемы (рис. 3.12.1), если на вход схемы подано напряжение  $u = 120 + 200 \sin \omega_1 t + 50 \sin(3\omega_1 t + 30^\circ)$  В,  $R_1 = 30$  Ом,  $L = 60$  мГн,  $R = 18$  Ом, а частота основной гармоники  $f_1 = 50$  Гц. Определить показания приборов, если  $A_1$  и  $V_1$  – приборы магнитоэлектрической системы,  $A_2$  и  $V_2$  – приборы индукционной системы,  $A_3$  и  $V_3$  – приборы электромагнитной системы. Вычислить активную мощность, расходуемую в схеме.

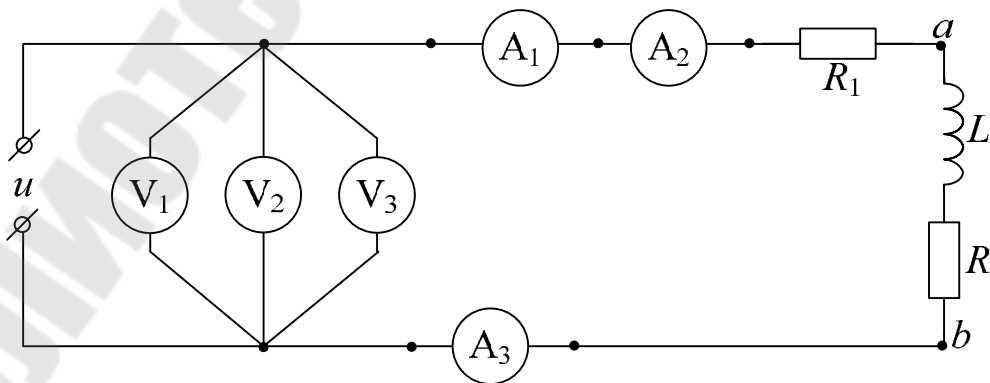


Рис. 3.12.1

*Решение*

Постоянные составляющие тока и напряжения на участке  $ab$ :

$$I_{(0)} = U_{(0)} / (R_1 + R) = 120 / (30 + 18) = 2,5 \text{ А}; U_{ab(0)} = R_1 I_{(0)} = 45 \text{ В.}$$

*Расчет первой гармоники:*

$$I_{m(1)} = U_{m(1)} / \underline{Z}_{(1)} = 200 / (18 + 30 + j314 \cdot 0,06) = 3,88e^{-j21^\circ 25'}, \text{ А,}$$

$$\underline{U}_{abm(1)} = \underline{I}_{m(1)} \underline{Z}_{ab(1)} = \underline{I}_{m(1)} (R_1 + j\omega L_1) =$$

$$= 3,88e^{-j21^\circ 25'} (30 + j314 \cdot 0,06) = 101e^{j24^\circ 55'}, \text{ В.}$$

*Расчет третьей гармоники:*

$$\underline{I}_{m(3)} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{R + R_1 + j3\omega_1 L_1};$$

$$\underline{U}_{abm(3)} = \underline{I}_{m(3)} \underline{Z}_{(3)} = \underline{I}_{m(3)} (R_1 + j3\omega_1 L_1).$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$\underline{I}_{m(3)} = \frac{50e^{j30^\circ}}{18 + 30 + j3 \cdot 314 \cdot 0,06} = 0,674e^{-j19^\circ 40'} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{abm(3)} = 0,674e^{-j19^\circ 40'} \cdot (30 + j3 \cdot 314 \cdot 0,06) = 40e^{j52^\circ 40'} \text{ В.}$$

Искомые мгновенные значения:

$$i = [2,5 + 3,88 \sin(\omega_1 t - 21^\circ 25') + 0,674 \sin(3\omega_1 t - 19^\circ 40')], \text{ А};$$

$$u_{ab} = [45 + 101 \sin(\omega_1 t + 24^\circ 55') + 40 \sin(3\omega_1 t + 52^\circ 40')], \text{ В.}$$

Найдем показания приборов.

Приборы магнитоэлектрической системы показывают постоянную составляющую, поэтому амперметр  $A_1$  покажет

$$I = I_{(0)} = 2,5 \text{ А,}$$



вольтметр  $V_1$  покажет

$$U = U_{(0)} = 120 \text{ В.}$$

Приборы индукционной системы показывают действующее значение переменной составляющей, поэтому амперметр  $A_2$  покажет

$$I = \sqrt{\frac{3,88^2}{2} + \frac{0,674^2}{2}} = 2,78 \text{ А,}$$

вольтметр  $V_2$  покажет

$$U = \sqrt{\frac{200^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 146 \text{ В.}$$

Приборы электромагнитной системы показывают действующее значение тока и напряжения, поэтому амперметр  $A_3$  покажет

$$I = \sqrt{2,5^2 + \frac{3,88^2}{2} + \frac{0,674^2}{2}} = 3,74 \text{ А,}$$

вольтметр  $V_3$  покажет

$$U = \sqrt{120^2 + \frac{200^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 189 \text{ В.}$$

Мощность, расходуемая в схеме:

$$\begin{aligned} P &= U_{(0)} I_{(0)} + U_{(1)} I_{(1)} \cos \varphi_{(1)} + U_{(3)} I_{(3)} \cos \varphi_{(3)} = \\ &= 120 \cdot 2,5 + \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3,88}{\sqrt{2}} \cos 21^\circ 25' + \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,674}{\sqrt{2}} \cos 49^\circ 40' = 670 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

## Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Цепи постоянного тока.....	4
Вводные положения.....	4
Примеры решения задач.....	8
Глава 2. Цепи синусоидального тока.....	39
Вводные положения.....	39
Примеры решения задач.....	42
Глава 3. Цепи несинусоидального тока.....	67
Вводные положения .....	67
Примеры решения задач.....	77

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Грачев Станислав Анатольевич  
Соленков Виталий Владимирович  
Шабловский Ярослав Олегович**

## **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**Практикум**

**по курсу «Теория линейных электрических цепей»  
для студентов электротехнических специальностей**

**В трех частях**

**Часть 1**

**Электрические цепи постоянного, однофазного  
синусоидального и несинусоидального тока**

**Электронный аналог печатного издания**

Редактор *Н. В. Гладкова*  
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 07.07.08.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 4,65.

Изд. № 107.

E-mail: [ic@gstu.gomel.by](mailto:ic@gstu.gomel.by)

<http://www.gstu.gomel.by>

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Издательский центр учреждения образования  
«Гомельский государственный технический университет  
имени П. О. Сухого».

ЛИ № 02330/0131916 от 30.04.2004 г.

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.