УДК 548.24

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЯТНЕ ЛОКАЛЬНОГО ТЕРМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

**О.М. ОСТРИКОВ, С.А. НАГЕЛЬ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Республика Беларусь*

Главным недостатком методов лазерной и электроэрозионной обработок являются избыточные термические напряжения, которые создаются в обрабатываемом материале [1]. При высоком уровне этих напряжений возможно неблагоприятное, с практической точки зрения, зарождение микротрещин. Поэтому изучение напряженного состояния в областях локального термического воздействия имеет важное практическое значение.

Целью данной работы явилось моделирование на основании принципа электростатических аналогий напряженного состояния в областях лазерного или электроэрозионного воздействий.

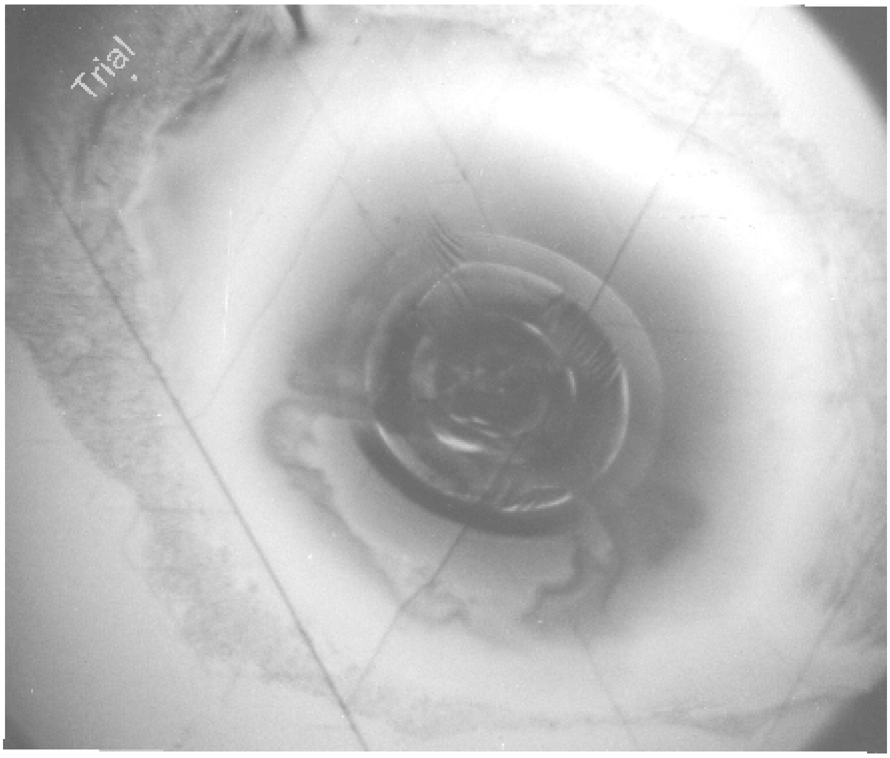
На рис. 1 представлены фотоснимки морфологии поверхности (111) монокристаллического кремния в области лазерного (рис. 1, *а*) и электроэрозионного (рис. 1, *б*) воздействий. У пятна лазерного воздействия (при плотности излучения порядка $10^5$ Дж/м$^2$) часто возникает сетка следов пирамидального скольжения (рис. 1, *а*), которая в случае электроэрозионной обработки при плотности тока 100 А/мм$^2$, как правило, отсутствует (рис. 1, *б*). При активном развитии пирамидального скольжения при избыточной плотности дислокаций, движущихся вдоль направления сдвига, возможно зарождение трещин по дислокационному механизму [2].

Представим область локального термического воздействия в виде шарового сегмента, усеченного плоскостью *XOY*, совпадающей с поверхностью кристалла. Вид этого пятна в плоскости *XOZ* представлен на рис. 2, *а*. Пусть след этого пятна в плоскости *XOY* будет иметь вид окружности радиусом *L* (рис. 2, *б*). Для учета поверхностных эффектов необходим расчет сил изображения, которые находятся путем определения вклада такого же, как на рис. 2, сегмента, но зеркально симметрично расположенного по отношению к поверхности, то есть к плоскости *XOY*. Форма такой области, состоящей из двух зеркально симметричных элементов, может быть получена пересечением двух шаров (рис. 3) радиусом *R*, задаваемых уравнениями

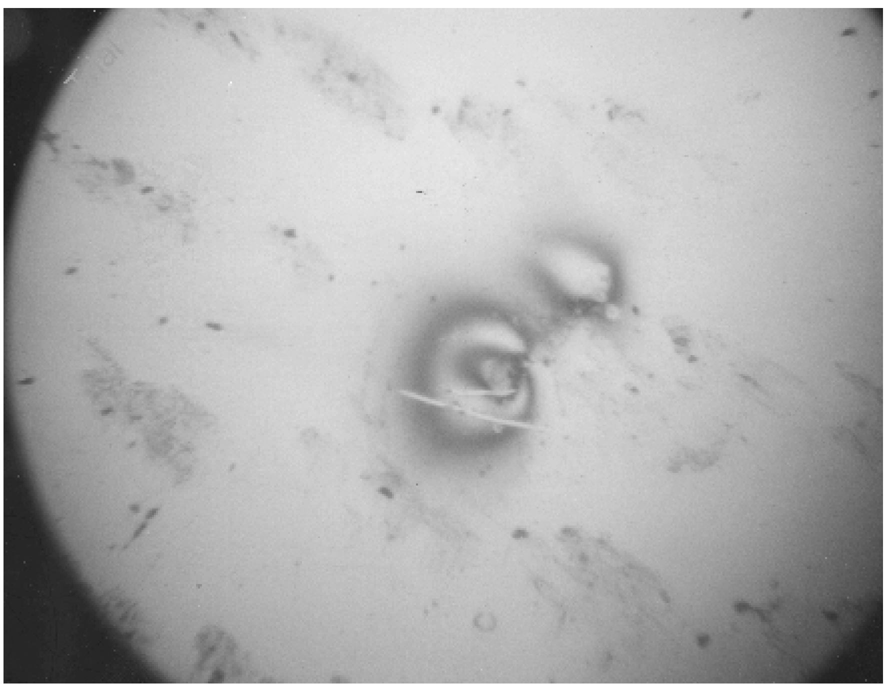
$$x^2 + y^2 + (z + R - H)^2 = R^2; \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + (z + H - R)^2 = R^2, \quad (2)$$

где *H* – глубина термического воздействия.




*а*)



*б*)

*Рис. 1*

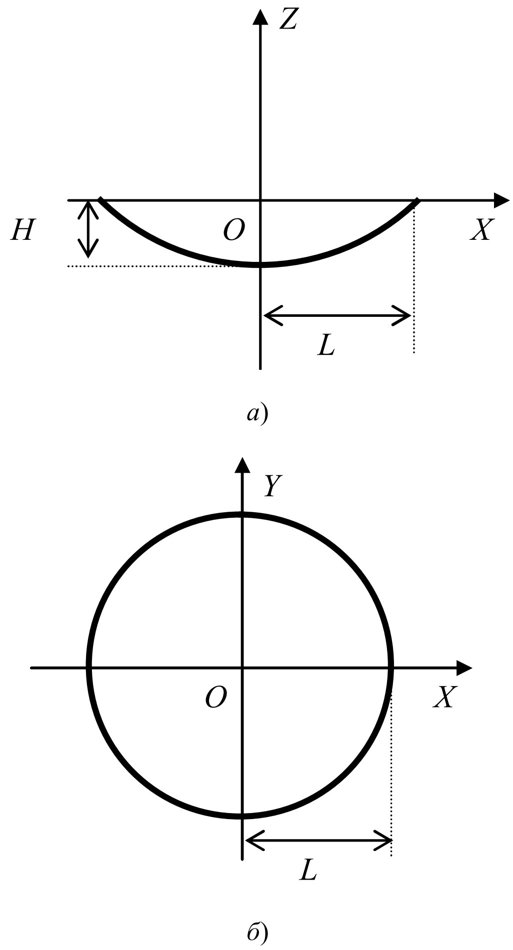



*Рис. 2*. Схематическое изображение области локального термического воздействия: *а* – в плоскости *XOZ*; *б* – в плоскости *XOY*. Плоскость *XOY* совпадает с поверхностью кристалла

Очевидно, что проекция области пересечения рассматриваемых шаров на плоскость *XOY* ($z = 0$) может быть описана уравнением

$$x^2 + y^2 = L^2. \tag{3}$$

Из (3) и (1) или (2) следует необходимая для будущих расчетов связь $R$ с $H$ и $L$:

$$R = \frac{L^2 + H^2}{2H}, \tag{4}$$

при этом в (1) и (2) полагалось $z = 0$.

В общем виде потенциал $\varphi(\vec{r})$ электростатического поля, создаваемого зарядом, распределенным с плотностью $\sigma(\vec{r})$ по поверхности $S'$, – границы области локального термического воздействия и симметричной ей относительно плоскости *XOY* области (рис. 4), может быть представлен в виде [3], [4]

$$\varphi(\vec{r}) = k \iint\limits_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} dS', \tag{5}$$

где $k$ – постоянная; $\vec{r}$ и ($\vec{r}$ – $\vec{r}'$) – радиус-векторы, определяемые по схеме, представленной на рис. 4.

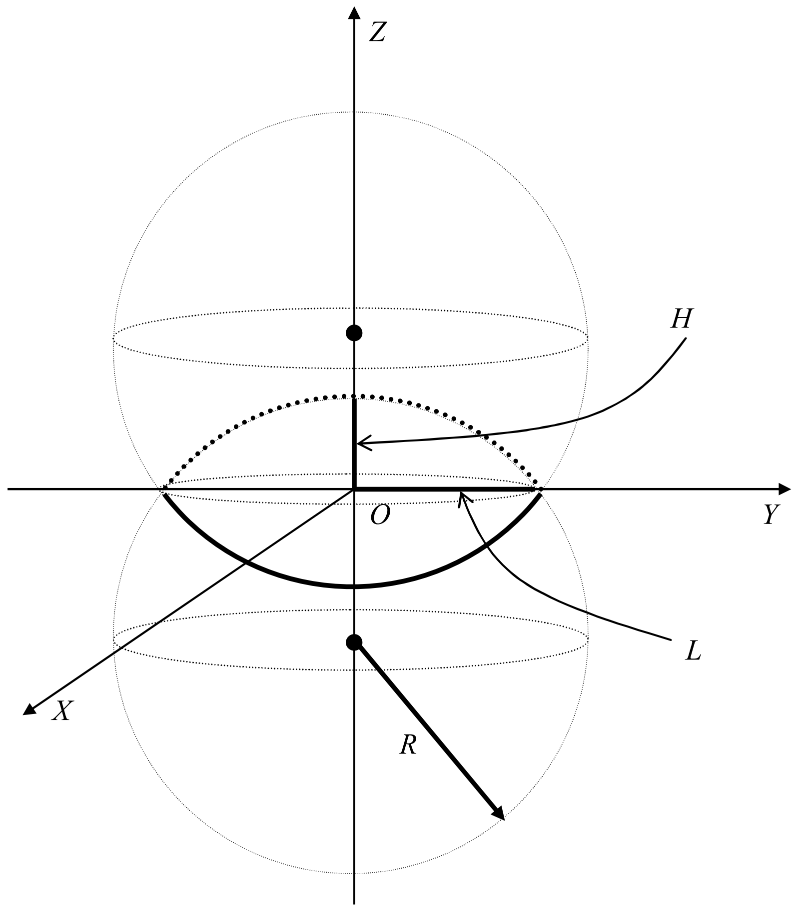



*Рис. 3*. Схема получения области локального термического воздействия
и области изображения пересечением двух шаров

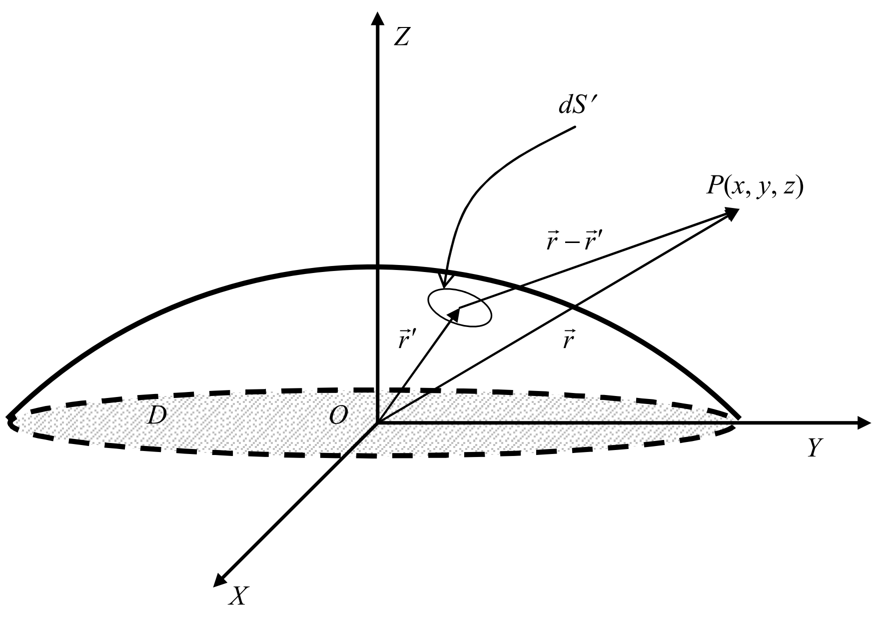



*Рис. 4*. Схема для расчета потенциала электрического поля для одной
из поверхностей области локального термического воздействия

Ввиду симметричности решаемой задачи относительно плоскости *XOY*, рассмотрим вначале потенциал изображения, создаваемый заряженной поверхностью, находящейся в положительной по отношению к оси $z$ области пространства (см. рис. 4). Данный потенциал имеет вид:

$$\varphi_1(x,y,z)=k\iint_D \frac{\sigma(x',y',z')\sqrt{1+\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2}\,dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=$$

$$=k\iint_D \frac{\sigma(x',y',z')\sqrt{1+\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2}\,dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z-(H-R)-\sqrt{R^2-x'^2-y'^2}\right)^2}}, \qquad (6)$$

где осуществлен переход от интегрирования в (5) по области $S'$ к интегрированию в области $D$ [5], описываемой уравнением (3). Учитывая (1), не трудно показать, что в (6)

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2=\frac{4x'^2}{R^2-x'^2-y'^2}; \qquad (7)$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2=\frac{4y'^2}{R^2-x'^2-y'^2}. \qquad (8)$$

Тогда (6) примет вид

$$\varphi_1(x,y,z)=k\iint_D \frac{\sigma(x',y',z')\sqrt{1+\frac{4\left(x'^2+y'^2\right)}{R^2-x'^2-y'^2}}\,dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\left(z-(H-R)-\sqrt{R^2-x'^2-y'^2}\right)^2}}. \qquad (9)$$

В данной работе рассмотрим случай, когда

$$\sigma(x',y',z')=\mathrm{const}=\sigma_0. \qquad (10)$$

Это означает, что принимается допущение о том, что потенциал поля упругих напряжений в области локального термического воздействия будет иметь такой же вид, как и потенциал электростатического поля заряда, равномерно распределенного по поверхности $S'$.

Переходя к полярным координатам

$$x'=\rho\cos\varphi,\ y'=\rho\sin\varphi,\ dx'dy'=\rho d\rho d\varphi, \qquad (11)$$

для области изображения получим

$$\varphi_1(x,y,z)=k\sigma_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^L \frac{\sqrt{1+\frac{4\rho^2}{R^2-\rho^2}}\,\rho d\rho}{\sqrt{(x-\rho\cos\varphi)^2+(y-\rho\sin\varphi)^2+\left(z-(H-R)-\sqrt{R^2-\rho^2}\right)^2}}. \qquad (12)$$

Аналогично, используя (2), для другой поверхности, являющейся границей области термического воздействия, получим

$$\varphi_2(x,y,z) = k\sigma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L \frac{\sqrt{1+\dfrac{4\rho^2}{R^2-\rho^2}}\rho d\rho}{\sqrt{(x-\rho\cos\varphi)^2+(y-\rho\sin\varphi)^2+\left(z-(R-H)+\sqrt{R^2-\rho^2}\right)^2}}. \quad (13)$$

Очевидно, что потенциал $\varphi(x,y,z)$, создаваемый зарядом на границе области термического воздействия с учетом потенциала изображения, находится из соотношения

$$\varphi(x,y,z<0) = \varphi_2(x,y,z) - \varphi_1(x,y,z). \quad (14)$$

Переход к задачам теории упругости осуществляется сопоставлением электростатическому потенциалу $\varphi$ упругого смещения $\vec{u}$ [6]. При этом при отсутствии вихревых полей связь между $\vec{u}$ и $\varphi$ находится из соотношения

$$\vec{u} = grad\varphi. \quad (15)$$

Отсюда получим

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}, \quad (16)$$

где

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x};\ u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y};\ u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (17)$$

а $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – ортонормированный базис, единичные векторы которого направлены вдоль осей декартовой системы координат.

Компоненты тензора деформации находятся из выражений

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \text{ при } i = j; \quad (18)$$

$$\gamma_{ij} = 2u_{ij}, \text{ при } i \neq j. \quad (19)$$

Не трудно показать, что из (17), (18) и (19) следует

$$u_{xx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\ u_{yy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\ u_{zz} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}; \quad (20)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y};\ \gamma_{xz} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z};\ \gamma_{yz}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}. \quad (21)$$

Данные выражения получены с использованием потенциала $\varphi(x,y,z)$ без учета $k$ (см. (12), (13)). Физические уравнения теории упругости, связывающие напряжения и деформации для линейно-упругих изотропных тел, к которым отнесем подвергнутый термическому воздействию материал, имеют вид [7]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2\mu u_{xx} + \lambda(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \\ \sigma_{yy} = 2\mu u_{yy} + \lambda(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \\ \sigma_{zz} = 2\mu u_{zz} + \lambda(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \\ \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy};\ \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz};\ \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \end{cases} \quad (22)$$

где $\mu$ – модуль сдвига; $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$ – параметр Ляме (здесь $\nu$ – коэффициент Пуассона).

Результаты компьютерных расчетов представлены на рис. 5. Установлено, что нормальные компоненты тензора напряжений равны друг другу, т. е. $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$; а для сдвиговых компонент выполняются условия: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Нормальные напряжения максимальны вдоль оси $OZ$ (рис. 5а), а сдвиговые напряжения в этой области минимальны (рис. 5б, в, г). Нормальные напряжения в области локального термического воздействия имеют один знак, а сдвиговые – знакопеременны.

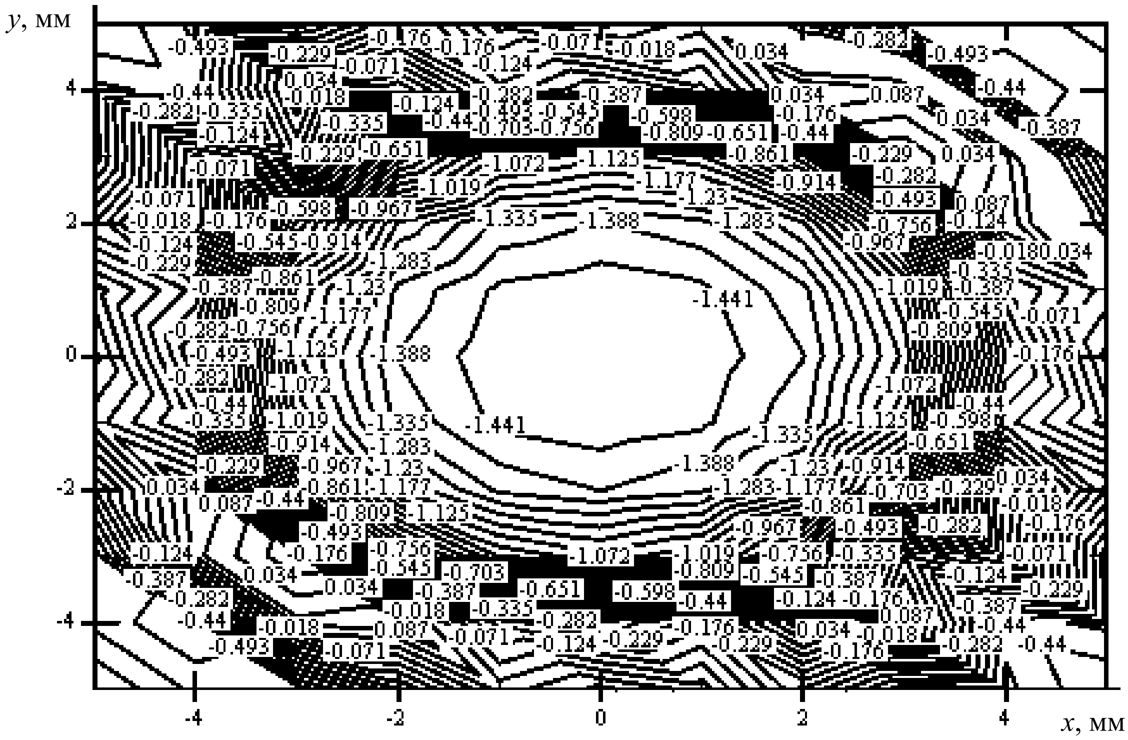



*Рис. 5а*

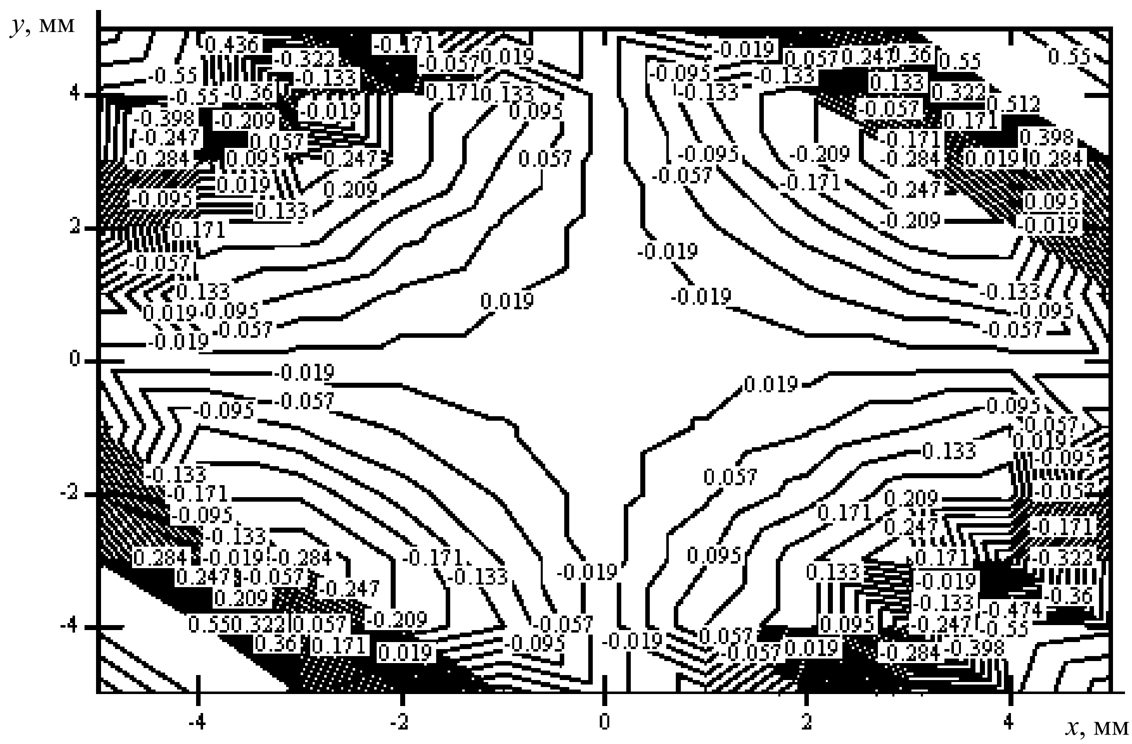


*Рис. 5б*

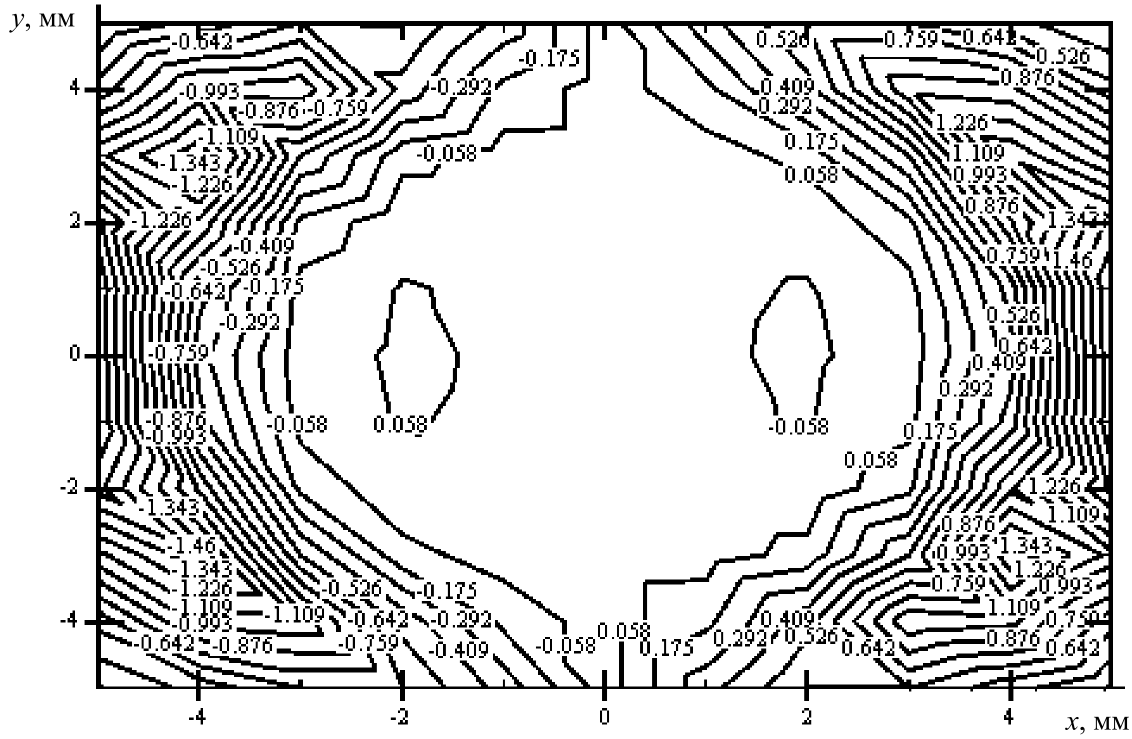



*Рис. 5в*

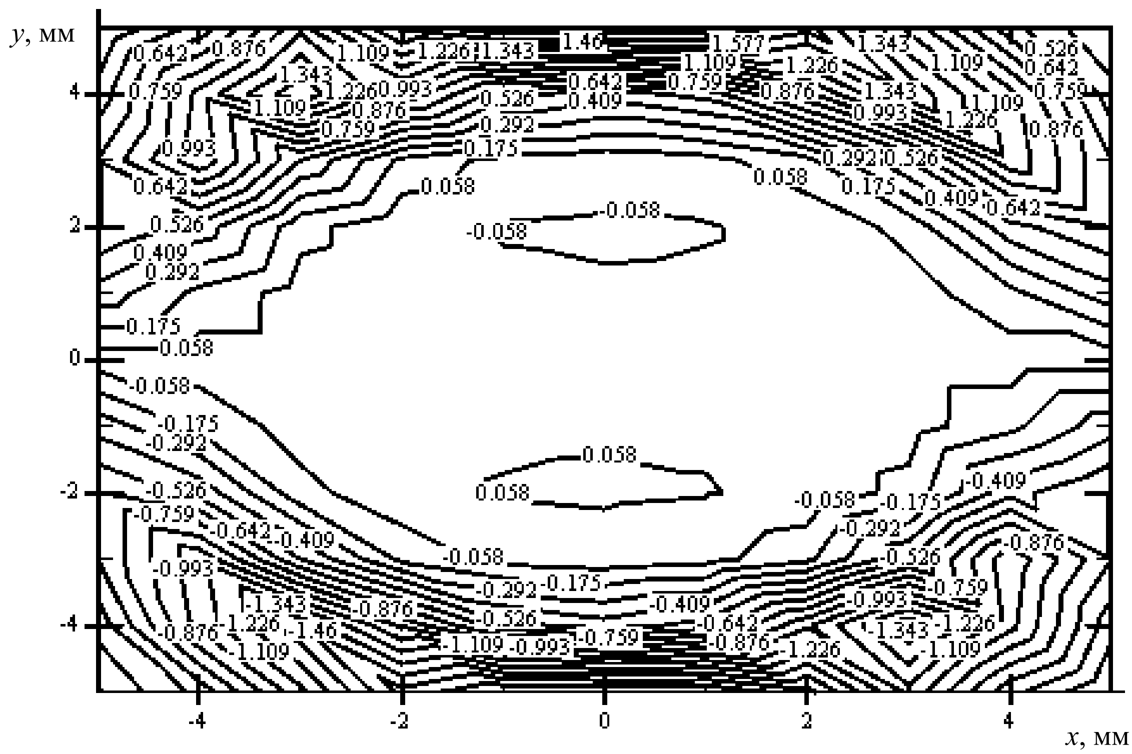



*Рис. 5г*

Нормальные напряжения способствуют процессам переползания дислокаций и диффузии вакансий и легирующего компонента [6]. Поэтому в центре пятна лазерного воздействия должна наблюдаться максимальная концентрация примесей. Сдвиговые напряжения активизируют процессы зарождения и развития дислокаций [6]. Так как величина этих напряжений велика и вдали от области локального термического воздействия (см. рис. 5б, в, г), то дислокационные сдвиги могут проходить и в соседних областях по отношению к очагу термического воздействия. Это, в частности, показано на рис. 1*а*.

В проведенных расчетах диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0$ и диэлектрический коэффициент среды $\varepsilon$ учитывались, исходя из следующего соотношения, являющегося критерием подобия

$$kq = \frac{m_1}{m} k_1 b\,, \tag{23}$$

где $q$ – заряд; $b$ – вектор Бюргерса; $m$ и $m_1$ – масштабные факторы; $k = 1/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0)$; $k_1 = \mu/[2\pi(1 - \nu)]$.

Таким образом, с использованием принципа электростатических аналогий рассчитаны поля напряжений в области локального термического воздействия с учетом влияния на конфигурацию этих напряжений поверхности. Показано, что нормальные напряжения максимальны в центральной части области термического воздействия, а сдвиговые – в соседних областях.

**Литература**


1. Попилов Л. Я. Справочник по электрическим и ультразвуковым методам обработки материалов / Л. Я. Попилов. – Л. : Машиностроение, 1977. – 544 с.
2. Владимиров В. И. Физическая природа разрушения металлов / В. И. Владимиров. – М., 1984.
3. Иродов И. Е. Основы электромагнетизма / И. Е. Иродов. – М. : Высш. шк., 1983. – 280 с.
4. Терлецкий Я. П. Электродинамика / Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков. – М. : Высш. шк., 1990. – 352 с.
5. Рябушко А. П. Индивидуальные задания по высшей математике: Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко [и др.]. – Мн. : Выш. шк., 2004. – 368 с.
6. Хирт Дж. Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.
7. Александров А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 400 с.


*Получено 21.06.2005 г.*