УДК 62-83:621.313.333

УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ «ОДНОФАЗНЫЙ АСИНХРОННЫЙ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЬ – ПРУЖИНА»

В.И. ЛУКОВНИКОВ, Г.И. СЕЛИВЕРСТОВ, А.В. ТУРЕНКОВА

Введение

В ряде областей науки, техники и производства, где используется колебательное движение рабочего органа машины, очень перспективным оказывается применение автоколебательных режимов работы электродвигателей. Это, например, испытательные стенды пружинных подвесок и других упругих элементов, дисбалансные вибраторы, станки-качалки, аппараты спортивной вибростимуляции, игрушки, рекламные качающиеся устройства и т. д. [1–3].

Цель работы

Цель работы заключается в анализе уравнения движения электромеханической системы «однофазный асинхронный двигатель – пружина» на предмет нахождения условий возникновения в ней незатухающих периодических колебаний и определения основных зависимостей выбора АД с целью поддержания устойчивых автоколебаний при известных параметрах нагрузки.

Метод решения

В первых работах по исследованию системы «однофазный асинхронный электродвигатель – пружина» устойчивость предельных циклов автоколебаний определялась по периодическим решениям уравнения движения.

Поскольку приближённые периодические решения находились методами Галёркина-Бубнова [1], Ван-дер-Поля (Van der Pol) [3] и методом компенсации, предложенным авторами [2], то результаты получались близкими, но различными и справедливыми для частных случаев.

В данной работе будет исследована указанная автоколебательная система по критерию Льенара [4], что позволит определить условие устойчивости автоколебаний независимо от метода поиска периодического решения.

Такой подход обусловлен тем, что уравнение исследуемой системы может быть сведено к виду уравнений, рассмотренных Льенаром.

Действительно, согласно [2], уравнение движения рассматриваемой системы может быть записано в относительных переменных в виде

$$\ddot{\varphi} + \mu(\dot{\varphi}) + \varphi = 0, \quad (1)$$

где $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ – относительные угловые координаты положения вала АД, её первая (скорость), и вторая (ускорение) производные по относительному времени τ; $\mu(\dot{\varphi}) = \mu_C(\dot{\varphi}) - \mu_{ЭМ}(\dot{\varphi})$ – силовая функция.

Слагаемые $\ddot{\varphi}$ и φ описывают в относительных переменных консервативную пару «момент инерции – упругость», функции $\mu_C(\dot{\varphi})$ и $\mu_{ЭМ}(\dot{\varphi})$ определяют диссипативные силы нагрузки и электромагнитные силы подпитки от АД.

Ограничиваясь нагрузкой жидкостным (демпфирование) и сухим трением, запишем:

$$\mu_C = m_1\dot{\varphi} + m_2 \,\mathrm{Sign}(\dot{\varphi}). \quad (2)$$

Механическую характеристику однофазного АД аппроксимируем по Сюмеку (Sumec) [5] кубической параболой

$$\mu_3 = m_3\left(\dot{\varphi} - \alpha \cdot \dot{\varphi}^3\right). \tag{3}$$

С учётом (2) и (3) получим для рассматриваемого случая выражение силовой функции:

$$\mu\left(\dot{\varphi}\right) = \left(m_1 - m_3\right)\dot{\varphi} + m_2 \operatorname{Sign}\left(\dot{\varphi}\right) + am_3\dot{\varphi}^3. \tag{4}$$

С целью приведения уравнения (1) к виду уравнения, рассмотренному Льенаром, продифференцируем его по относительному времени τ и получим

$$\dddot{\varphi} + \frac{\partial\mu\left(\dot{\varphi}\right)}{\partial\dot{\varphi}} \cdot \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = 0.$$

Заменяя $\dot{\varphi} = x$, запишем это уравнение в классической по Льенару форме:

$$\ddot{x} + f(x) \cdot \dot{x} + g\left(x\right) = 0, \tag{5}$$

где $f\left(x\right) = \left.\dfrac{\partial\mu\left(\dot{\varphi}\right)}{\partial\dot{\varphi}}\right|_{\dot{\varphi}=x}$ – функция, определяющая поведение автоколебательной системы, а $g\left(x\right) = x$ – функция упругости.

С целью получения аналитических соотношений, удобных для исследования, аппроксимируем $\operatorname{Sign}\left(\dot{\varphi}\right)$ зависимостью $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\left(b \cdot \dot{\varphi}\right)$, имея в виду, что $b \to \infty$ для достижения идеальной аппроксимации.

Тогда с учётом замены переменных

$$f(x) = \left(m_1 - m_2\right) + \frac{m_2 \cdot b}{1 + b^2 x^2} + 3am_3 x^2,$$

$$g\left(x\right) = x. \tag{6}$$

В соответствии с критерием Льенара должны быть выполнены следующие условия:

1. Функция $f(x)$ должна быть чётной, а $g(x)$ – нечётной. По уравнениям (6) видно, что это условие выполняется.

2. Функция $f(x)$ в точке $x = 0$ должна быть меньше нуля. По уравнению (6) получим, что

$$f\left(0\right) = \left(m_1 - m_3\right) + m_2 b^2.$$

Отсюда получим, что это условие выполняется, когда

$$m_1 + m_2 \cdot b - m_3 < 0. \tag{7}$$

3. Третье условие $g\left(x\right) \cdot x = x^2 > 0$ выполняется для всех $x \neq 0$.

4. По четвёртому условию требуется, чтобы интеграл $F\left(x\right)\int_0^x dx \to \infty$ при $x \to \infty$.

В соответствии с уравнением (6) получим:

$$F(x) = \int_0^x \left[\left(m_1 - m_3\right) + \frac{m_2 b}{1 + bx^2} + 3am_3 x^2\right]dx = \left(m_1 - m_3\right)x + m_2 \cdot \operatorname{arctg}\left(bx\right) + am_3 x^3,$$

откуда видно, что и это условие выполняется.

5. По пятому условию интеграл *F(x)* должен иметь нуль в точке $x_0 > 0$ и монотонно возрастать при $x > x_0$. Уравнение третьей степени

$$F(x) = am_3 \cdot x^3 + (m_1 - m_3) \cdot x + m_2 \operatorname{arctg}(bx) = 0$$

будет иметь положительный корень x_0 только при знакопеременных коэффициентах. Это возможно только для $m_3 > m_1$, что явно следует и из неравенства (7).

При $x > x_0 > 0$ функция *F(x)* будет монотонно возрастать из-за положительного коэффициента при неизвестной высшей степени $(am_3 > 0)$.

Найдём аналитическое выражение для величин m_1, m_2, m_3, входящих в условие устойчивости (7), через параметры электросети, асинхронного электродвигателя, пружины и нагрузки.

С этой целью запишем уравнение движения системы в абсолютных величинах в следующем виде:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + H \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi + M_{\text{ТР}} \operatorname{Sign}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = M_{\text{ЭМ}}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

где J, H, C, $M_{\text{тр}}$ – момент инерции колеблющихся частей системы, коэффициенты демпфирования нагрузки, коэффициент жёсткости пружины и момент сухого трения; $M_{\text{ЭМ}}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ – механическая характеристика однофазного электродвигателя; t – абсолютное время; φ – угловая координата колебаний ротора.

Вводя относительное время $\tau = \omega_0 \cdot t$, где $\omega_0 = \sqrt{C/J}$ – собственная частота автоколебаний системы, и аппроксимируя механическую характеристику по Сюмеку [5].

$$M_{\text{ЭМ}}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} M_{\text{КР.1Ф}} \left[\frac{1}{\omega_1}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{\omega_3}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3\right],$$

где $M_{\text{КР.1Ф}}$, ω_1 – критический момент и синхронная скорость однофазного асинхронного электродвигателя.

После преобразований запишем уравнение движения в относительных переменных:

$$\ddot{\varphi} + \frac{H}{\sqrt{J \cdot C}}\dot{\varphi} + \frac{M_{\text{ТР}}}{C}\operatorname{Sign}\dot{\varphi} + \varphi = \frac{3\sqrt{3}M_{\text{КР.1Ф}}}{2\omega_1\sqrt{J \cdot C}}\left(\dot{\varphi} - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\dot{\varphi}^3\right). \qquad (8)$$

Сравнивая (1, 2, 3) и (8), найдём, что

$$m_1 = \frac{H}{\sqrt{J \cdot C}},\ m_2 = \frac{M_{\text{ТР}}}{C},\ m_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2\omega_1\sqrt{C \cdot J}} M_{\text{КР.1Ф}}.$$

Тогда условие устойчивости автоколебаний согласно [7] можно представить следующим образом:

$$M_{\text{КР.1Ф}} > \frac{2\omega_1}{3\sqrt{3}}\left(H + \frac{M_{\text{ТР}} \cdot b}{\omega_0}\right). \qquad (9)$$

В качестве однофазного асинхронного электродвигателя целесообразно использовать серийный трёхфазный электродвигатель, статорные обмотки которого пересоединены для подключения к однофазной сети [6].

В этом случае согласно [3] критический момент однофазного АД можно найти по соотношению

$$M_{\text{КР.1Ф}} = \frac{4}{9}\left[1 - \frac{2S_{\text{КР}}\left(1+\alpha S_{\text{КР}}\right)\left(2-S_{\text{КР}}\right)}{S_{\text{КР}}^2 + \left(2-S_{\text{КР}}\right)^2 + 2\alpha S_{\text{КР}}{}^2\left(2-S_{\text{КР}}\right)}\right] = \frac{4}{9}M_{\text{КР}}\sigma\left(S_{\text{КР}}\right), \qquad (10)$$

где $M_{\text{КР}}$, $S_{\text{КР}}$ – критические момент и скольжение трёхфазного АД по паспортным данным; $\sigma(S_{\text{КР}})$ – коэффициент, зависящий от критического скольжения; $\alpha = \dfrac{r_1}{r_2'\left(1 + x_1/x_m\right)}$ – относительное активное сопротивление статорной цепи АД; r_1, r_2', x_1, x_2', x_m – параметры Т-образной схемы замещения АД.

Подставляя (10) в (9), получим условие устойчивости в другом виде:

$$M_{\text{КР}} > \frac{\sqrt{3}\omega_1}{2\sigma\left(S_{KP}\right)}\left(H + \frac{M_{\text{ТР}} \cdot b}{\omega_0}\right). \qquad (11)$$

Из теории электрических машин известно, что

$$M_{\text{КР}} = \frac{3pU_1^2}{2\omega_1\left(1 + x_1/x_m\right)\left\{r_1 + \sqrt{r_1^2 + \left[x_1 + x_2\left(1 + x_1/x_m\right)\right]^2}\right\}}, \qquad (12)$$

где U_1 – напряжение на фазной обмотке статора; p – число пар полюсов АД.

Объединяя (11) и (12), можно получить ещё одно уравнение связи параметров АД, сети и нагрузки при устойчивых автоколебаниях.

Заключение

Итак, анализ показал, что общим условием устойчивости автоколебаний системы «однофазный асинхронный электродвигатель – пружина», когда механическая характеристика двигателя достаточно точно аппроксимируется по Сюмеку, статическая характеристика пружины линейна, нагрузкой является сухое и жидкостное трение будет выполнение одного из условий (7), (9), (11) или (11) совместно с (12).

Этот результат подтверждается совпадением его в частных случаях, рассмотренных в [1–3].

Литература

1. Луковников В. И. Исследование автоколебательного движения однофазного асинхронного электродвигателя с линейной пружиной на валу / В. И. Луковников, Л. В. Веппер // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2001. – № 2. – С. 33–42.
2. Луковников В. И. Анализ электромеханической автоколебательной системы «асинхронный электродвигатель – упругий элемент» / В. И. Луковников, Ю. А. Рудченко // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2003. – № 1. – С. 61–66.
3. Веппер Л. В. Автоколебательный режим однофазного асинхронного электродвигателя: Автореф. дис ... канд. техн. наук / Л. В. Веппер. – Гомель : УО «ГГТУ им. П. О. Сухого», 2001. – 18 с.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Госиздат ТТЛ, 1958. – 628 с.
5. Sumec I. K. Der einphasige Induktions motor // Archivb der Math und Physik. – 1905. – Bd 8. – S. 306.
6. Пат. № 4958 (Республика Беларусь) Автоколебательный электропривод / Луковников В. И., Тодарев В. В.; опубл. в 2003 г.

Получено 07.10.2005 г.