Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

РЯДЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по курсу «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2007

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.6я73
Р98

Рекомендовано научно-методическим советом
заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 6 от 16.06.2007 г.*)

Авторы-составители: *В. И. Гойко*, *С. П. Курлович*, *В. Г. Тепляков*

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. «Физика» ГГТУ им. П. О. Сухого *П. А. Хило*

Р98 **Ряды**. Дифференциальные уравнения : метод. указания по курсу «Высшая математика» для студентов экон. специальностей заоч. формы обучения / авт.-сост.: В. И. Гойко, С. П. Курлович, В. Г. Тепляков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2007. – 33 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

Методические указания содержат краткие сведения по теории и задачи по всем основным разделам данного курса. В каждом разделе приведены теоретические сведения и формулы, примеры с подробным решением.

Для студентов экономических специальностей заочной формы обучения.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.6я73

РАЗДЕЛ 1. РЯДЫ

§1.1 Основные понятия теории числовых рядов

Пусть $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n, \ldots$ - бесконечная последовательность чисел.

Определение. Выражение:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

называется ***числовым рядом***, а элементы последовательности $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n, \ldots$ - ***членами ряда***. Для обозначения ряда (1) применяют сокращенную запись $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Сумма первых n членов ряда (1) называется ***n-ой частичной суммой ряда*** и обозначается $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. (2)

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***сходящимся***, если последовательность его частичных сумм $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n, \ldots$ имеет конечный предел $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. s - называется ***суммой ряда***.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***расходящимся***, если последовательность его частичных сумм не имеет предела.

Пример1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \ .$$

Решение.

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Ряд сходится, его сумма равна 1.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + ... + n + ... \ .$$

Решение.

$$s_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \infty .$$

Ряд расходится.

§1.2 Необходимый признак сходимости ряда

Для того чтобы ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходился, необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Пример 1. Ряд $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + ... + \frac{2^{n-1}+1}{2^n} + ...$ расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^n} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Замечание. Признак является необходимым, но не достаточным. Существуют ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но которые, тем не менее, расходятся, например, ***гармонический*** ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... \ .$$

§1.3 Признаки сравнения знакоположительных рядов

1. Первый признак сравнения

Пусть члены знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \ , \tag{3}$$

начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов ряда:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots , \qquad (4)$$

то есть $u_n \le v_n$.

Тогда из сходимости ряда (4) следует сходимость ряда (3), а из расходимости ряда (3) следует расходимость ряда (4).

2. Второй признак сравнения

Пусть

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots ,$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots ,$$ – два ряда. Если можно указать такие константы *P* и *t*, что начиная с некоторого номера *N* для всех n выполняется $P \le \dfrac{u_n}{v_n} \le t$. Тогда поведение рядов одинаково, то есть оба сходятся или оба расходятся.

<u>Следствие.</u> Если $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = c > 0$, c – константа, то ряды (3) и (4) ведут себя одинаково.

<u>Замечание</u>. Для применения указанных признаков сравнения необходимо знать поведение одного из рядов. В качестве “пробных” используют следующие ряды:

Ряд Дирихле $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p} + \ldots .$

При $p > 1$ сходится,

$p \le 1$ расходится, при $p = 1$ получаем гармонический ряд.

Бесконечная геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots .$$

При $|q| < 1$ сходится,

$|q| \ge 1$ расходится.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots .$$

<u>Решение.</u>

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, который расходится.

Т.к. для всех $n \ge 2$ выполняется $\ln n < n$, следовательно $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$, то на основании первого признака сравнения из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ вытекает расходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на сходимость ряд

$$(e^{\frac{1}{1}}-1)+(e^{\frac{1}{2}}-1)+\ldots+(e^{\frac{1}{n}}-1)+\ldots .$$

<u>Решение.</u>

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

Для этого найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}\cdot e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1.$$

Т.к. предел константа, то поведение рядов одинаково и исследуемый ряд расходится.

§1.4 Признак сходимости Даламбера

Если для ряда $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ с положительными членами, для всех *n* начиная с некоторого номера *N*, выполняется $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q<1$, то ряд сходится. Если же для всех *n* начиная с некоторого номера *N*, выполняется $\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1$, то ряд расходится.

<u>Следствие.</u> Если для ряда $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ выполняется $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ и $q<1$, то ряд сходится, если $q>1$, то ряд расходится. Если же $q=1$, то данный признак ответа не дает и следует применить другой признак.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{3\cdot 1!}+\frac{2^2}{3^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{n^n}{3^n\cdot n!}+\ldots .$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n!}{3^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\cdot e<1.$$

Ряд сходится.

§1.5 Признак сходимости Коши

Если для ряда $u_1+u_2+...+u_n+...$ с положительными членами, для всех n начиная с некоторого номера N выполняется: $\sqrt[n]{u_n}\le q<1$, то ряд сходится, если $\sqrt[n]{u_n}>1$, то ряд расходится.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ ряд расходится. Если же $q=1$, то данный признак ответа не дает и следует применить другой признак.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n+... \ .$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$ Ряд сходится.

§1.6 Интегральный признак сходимости Коши- Маклорена

Пусть члены ряда $u_1+u_2+...+u_n+...$ положительны и не возрастают $u_1\ge u_2\ge...\ge u_n\ge...$. Пусть $f(x)$– функция, которая определена для всех вещественных $x\ge 1$, непрерывна и не возрастает, при этом:

$$f(1)=u_1,\ \ f(2)=u_2,\ \dots,\ \ f(n)=u_n,\ \dots\ .$$

Тогда, для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы сходился (существовал) несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx .$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+... .$$

Решение.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)=1.$$

Интеграл сходится, и, по интегральному признаку, данный ряд сходится.

§1.7 Знакопеременные ряды

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***знакопеременным***, если среди его членов есть как положительные так и отрицательные.

Пусть имеется знакопеременный ряд

$$u_1+u_2+...+u_n+... . \tag{5}$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей

$$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+... . \tag{6}$$

Ряд (5) называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится и ряд (6).

Ряд (5) называется ***условно сходящимся***, если ряд (5) сходится, а ряд (6) расходится.

Теорема. Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение. Знакопеременный ряд называется ***знакочередующимся***, если соседние члены ряда имеют различные знаки.

Признак Лейбница. Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда $u_1-u_2+u_3-...+(-1)^{n+1}u_n+...$ (7)

образуют монотонно невозрастающую последовательность

$$u_1\ge u_2\ge ...\ge u_n\ge ...$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (7) сходится и его сумма не превосходит первого члена.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots.$$

Решение.

Т.к. $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$, то ряд сходится, причем условно (т.к. ряд, составленный из модулей есть расходящийся гармонический ряд).

§1.8 Функциональные и степенные ряды

Определение. Выражение вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots. \tag{8}$$

называется ***функциональным рядом*** относительно переменной *x*.

Определение. Совокупность всех значений переменной x, для которых ряд (8) сходится, называется ***областью сходимости функционального ряда*** (8).

Определение. ***Степенным рядом*** называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots. \tag{9}$$

Числа c_n называются ***коэффициентами степенного ряда***.

Для степенного ряда справедлива

теорема Абеля. Если степенной ряд сходится в точке $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится в точке $x = x'$, то он расходится при всех $|x| > |x'|$.

Следствие. Областью сходимости степенного ряда является интервал $(-R, R)$.

Замечание. Областью сходимости ***степенного ряда общего вида*** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ является интервал $(a-R, a+R)$.

Для нахождения области сходимости степенного ряда удобно пользоваться признаком Даламбера.

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}.$$

Решение.

Воспользуемся признаком Даламбера, исследуя ряд сразу на абсолютную сходимость $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q < 1$, $u_n = \frac{(x-1)^n}{n+1}$, $u_{n+1} = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)+1}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{n+2}}{\frac{(x-1)^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)(n+1)}{n+2}\right| = |x-1| < 1.$$

Отсюда находим область абсолютной сходимости ряда $0 < x < 2$. Далее исследуем степенной ряд в конечных точках интервала($q = 1$). При

$$x = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots .$$

Данный числовой ряд по признаку Лейбница $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ и $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ сходится, а ряд из модулей $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится.

Следовательно, в точке $x = 0$ ряд условно сходится. При

$$x = 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$ гармонический ряд, расходится. Вне отрезка $[0,2]$, ряд расходится($q > 1$).

§1.9 Ряды Тейлора и Маклорена

<u>**Определение**</u>. Разложением в ***ряд Тейлора*** в окрестности точки *a* бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ называется представление ее в виде общего степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, коэффициенты которого определяются как $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. В области сходимости общего степенного ряда ряд сходится к функции $f(x)$, то есть его можно записать $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Если положить *a* равным нулю, то получим ***ряд Маклорена*** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$.

<u>**Пример 1.**</u> Разложить функцию $f(x) = e^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 1$.

<u>**Решение.**</u>

Для разложения найдем коэффициенты $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ в точке $a = 1$.

$$c_0 = \frac{f^{(0)}(1)}{0!} = e,\ c_1 = \frac{f^{(1)}(1)}{1!} = e,\ c_2 = \frac{f^{(2)}(1)}{2!} = \frac{e}{2}, \ldots, c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{e}{n!}, \ldots,$$

тогда разложение примет вид

$$e^x = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{e}{(n-1)!}(x-1)^{(n-1)} + \ldots .$$

Используя ряд Маклорена, аналогично получаются стандартные разложения для основных элементарных функций:

1. $f(x) = e^x$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Область абсолютной сходимости $x \in (-\infty, \infty)$.

2. $f(x) = \sin(x)$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Область абсолютной сходимости $x \in (-\infty, \infty)$.

3. $f(x) = \cos(x)$,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^{(2n-2)}}{(2n-2)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}.$$

Область абсолютной сходимости $x \in (-\infty, \infty)$.

4. $f(x) = \ln(1+x)$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Область абсолютной сходимости $x \in (-1, 1)$.

5. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ - биноминальный ряд,

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots.$$

Область абсолютной сходимости $x \in (-1, 1)$.

6. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$,

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Область абсолютной сходимости $x \in (-1, 1)$.

7. $f(x) = \arcsin(x)$,

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n) \cdot (2n+1)}.$$

Область абсолютной сходимости $x \in (-1, 1)$.

8. $f(x) = arctg(x)$,

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Область абсолютной сходимости $x \in (-1, 1)$.

С помощью основных стандартных разложений можно раскладывать функцию в ряд Тейлора без нахождения производных.

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 1$.

Решение.

Представим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в виде $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = (1+(x-1))^{-1}$.

Далее, используя стандартный биноминальный ряд функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ при $\alpha=-1$, записываем разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $a=1$.

$$\frac{1}{x}=+1+(-1)(x-1)+\frac{(-1)(-1-1)}{2!}(x-1)^2+$$
$$+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}(x-1)^3+\ldots=$$
$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}+\ldots .$$

§1.10 Приближенные вычисления с использованием стандартных степенных рядов

Используя стандартные степенные ряды, можно производить приближенные вычисления корней, тригонометрических функций, логарифмов, не берущихся определенных интегралов. При этом, погрешность оценивается на основании теоремы Лейбница или используя явное выражение для остатка из формулы Тейлора.

Пример 1. Вычислить $\ln 1.1$ с точностью 0.0001.

Решение.

Воспользуемся разложением $\ln(1+x)$ в ряд:

$$\ln 1.1=\ln(1+\frac{1}{10})=\frac{1}{10}-\frac{(\frac{1}{10})^2}{2}+\frac{(\frac{1}{10})^3}{3}-\frac{(\frac{1}{10})^4}{4}+\ldots ,$$

или

$$\ln 1.1=\ln(1+\frac{1}{10})=\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}-\frac{1}{40000}+\ldots .$$

Далее на основании признака Лейбница о том, что сумма знакочередующегося ряда не превосходит первого члена, отбрасываем ряд

$$-\frac{1}{40000}+\frac{1}{500000}-\frac{1}{6000000}+\ldots,$$

т.к. его сумма не превосходит $\frac{1}{40000}$, а это обеспечивает требуемую точность 0.0001. Поэтому

$$\ln 1.1\simeq\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}=0.1230.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ с точностью 0.001.

Решение.

Воспользуемся разложением $\sin(x)$ в ряд:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right]dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots\right]\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots .$$

Для обеспечения заданной точности достаточно трех членов ряда, т.к.

$$\frac{1}{7\cdot 7!} < 0.001.$$

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx \simeq 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = 0.946.$$

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§2.1 Основные понятия дифференциальных уравнений

<u>Определение</u>. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

или

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

<u>Определение</u>. ***Порядком дифференциального уравнения*** называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение (1).

<u>Определение</u>. Всякая функция $y(x)$, обращающая уравнение (1) в тождество, называется ***решением или интегралом*** дифференциального уравнения.

Пример 1. Проверить, что функция $y = x^2 + x$ является решением дифференциального уравнения $y'x - x^2 - y = 0$.

Решение.

Найдем первую производную $y' = 2x + 1$ и подставим в уравнение

$$y'x - x^2 - y = 0,$$
$$(2x+1)x - x^2 - (x^2 + x) = 0,$$
$$0 \equiv 0.$$

Замечание. Функция $y = x^2 + cx$, где c - произвольная константа также является решением дифференциального уравнения $y'x - x^2 - y = 0$.

Определение. ***Общим решением*** дифференциального уравнения (1) называется такое его решение $y(x, c_1, ..., c_n)$, которое содержит столько независимых произвольных постоянных $c_1, ..., c_n$, каков порядок уравнения. Константы $c_1, ..., c_n$ определяются из ***начальных условий***, то есть при $x = x_0$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_{01}, \\ y'(x_0) = y_{02}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}, \end{cases}$$

где $y_{01}, y_{02}, \ldots y_{0n}$ - некоторые заданные числа.

Определение. Всякое решение, которое получается из общего путем подстановки вместо произвольных постоянных $c_1, ..., c_n$, конкретных числовых значений найденных из начальных условий, называется ***частным решением.***

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, это значит найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

§2.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\,\varphi_1(y)dx + f_2(x)\,\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (2)$$

называется дифференциальным уравнением с ***разделяющимися переменными***.
Уравнение решается методом разделения переменных, для этого делим уравнение (2) на $f_2(x)\,\varphi_1(y) \neq 0$, получим:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0,$$

где переменные x и y разделены. Интегрируя, получим общее решение этого уравнения:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = c.$$

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x}{y}$, удовлетворяющее начальным условиям, при $x = 0$, $y = 0$.

Решение.
Найдем общее решение дифференциального уравнения. Для этого разделим переменные цепочкой преобразований:

$$y' = \frac{x}{y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$$

$$y\,dy = x\,dx.$$

Далее интегрируем и получаем общее решение дифференциального уравнения:

$$\int y\,dy = \int x\,dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

В силу произвольности константы C ответ можно записать:

$$y^2 = x^2 + C.$$

Далее определим C из начальных условий, при $x = 0$, $y = 0$:

$$0 = 0 + C.$$

Отсюда $C = 0$. Частное решение дифференциального уравнения примет вид $y = \pm x$.

§2.3 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция $f(x,y)$ называется ***однородной функцией n-го измерения*** относительно переменных x,y, если для любого числа $k \neq 0$ имеет место равенство $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$.

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ (3) называется ***однородным*** относительно x,y, если функция $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения, то есть $f(kx,ky) = f(x,y)$.

Решается однородное уравнение подстановкой $u = \frac{y}{x}$, отсюда $y = ux$, а $y' = u'x + u$. Подставим в однородное уравнение, получим

$$u'x + u = f\left(x,ux\right).$$

Используя свойство однородности функции $f(x,y)$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}x + u = f(1,u).$$

Разделив переменные, находим

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

После интегрирования, учитывая подстановку $u = y/x$, находим общее решение дифференциального уравнения.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x+y}{x}.$$

Решение.

Функция $f(x,y) = \frac{x+y}{x}$ является однородной функцией нулевого измерения т.к. $f(kx,ky) = \frac{kx+ky}{kx} = \frac{x+y}{x} = f(x,y)$.

Выполняем подстановку $u = \frac{y}{x}$, отсюда $y = ux$, а $y' = u'x + u$.

Уравнение $y' = \frac{x+y}{x}$ запишется $u'x + u = \frac{x+ux}{x}$. Упрощая, получим $\frac{du}{dx}x = 1$. Разделяя переменные и интегрируя, придем к выражению:

$$\int du = \int \frac{dx}{x},$$

$$u = \ln|x| + C .$$

Возвращаясь к старой переменной y, окончательно получим общее решение $y = x\ln|x| + xC$.

Замечание. К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} . \qquad (5)$$

Если $c = c_1 = 0$, то (5), очевидно, однородное уравнение.

Пусть c и $c_1 \neq 0$. Заменой переменных:

$$x = \bar{x} + h,$$

$$y = \bar{y} + k,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}},$$

где h и k находим из решения системы:

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0, \end{cases}$$

сводим (5) к однородному

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{a\bar{x} + b\bar{y}}{a_1\bar{x} + b_1\bar{y}}.$$

§2.4 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение вида:

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (6)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - непрерывные функции, называется ***линейным дифференциальным уравнением*** первого порядка.

Решение уравнения (6) ищем в виде $y = u(x) \cdot v(x)$.

Отсюда находим

$\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ и подставляем в (6).

Тогда получим:

$$u\frac{d\upsilon}{dx}+\upsilon\frac{du}{dx}+P(x)u\upsilon=Q(x),$$
$$u\left(\frac{d\upsilon}{dx}+P(x)\upsilon\right)+\upsilon\frac{du}{dx}=Q(x). \tag{7}$$
Выберем функцию $\upsilon(x)$ такой, чтобы
$$\frac{d\upsilon}{dx}+P(x)\upsilon=0.$$
Решаем уравнение для $\upsilon(x)$:
$$\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-P(x)dx,$$
$$\ln|\upsilon|-\ln|c_1|=-\int P(x)dx,$$
$$\upsilon=c_1e^{-\int P(x)dx}.$$
Выберем $c_1=1$. Т.к. для υ достаточно найти частное решение:
$$\upsilon=e^{-\int P(x)dx}.$$
Подставив найденное выражение для υ в (7), получим:
$$\upsilon\frac{du}{dx}=Q(x),$$
$$du=\frac{Q(x)dx}{\upsilon(x)},$$
$$u=\int\frac{Q(x)dx}{\upsilon(x)}+c,$$
$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int\frac{Q(x)dx}{\upsilon(x)}+c\right].$$
Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x.$$
Решение.
Делаем подстановку
$$y=u\upsilon,\quad \frac{dy}{dx}=u\frac{d\upsilon}{dx}+\upsilon\frac{du}{dx},$$
$$u\frac{d\upsilon}{dx}+\frac{du}{dx}\upsilon-\frac{1}{x}u\upsilon=x,$$
$$u\left(\frac{d\upsilon}{dx}-\frac{1}{x}\upsilon\right)+\upsilon\frac{du}{dx}=x.$$
Отсюда находим решение для $\upsilon(x)$:

$$\frac{d\upsilon}{dx}-\frac{1}{x}\upsilon=0,\qquad \frac{d\upsilon}{dx}=\frac{\upsilon}{x},$$
$$\frac{d\upsilon}{\upsilon}=\frac{dx}{x},\qquad \ln|\upsilon|=\ln|x|,$$
$$\upsilon=x.$$

Тогда, для $u(x)$ получим:

$$x\frac{du}{dx}=x,\qquad \frac{du}{dx}=1,\qquad du=dx,\qquad u=x+c.$$

Окончательно, общее решение дифференциального уравнения примет вид:

$$y=(x+c)x.$$

§2.5 Уравнение Бернулли

<u>**Определение**</u>. Дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\ ,\tag{8}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - непрерывные функции от x, $n\neq 1, n\neq 0$, называется ***уравнением Бернулли.***

Решаем уравнение Бернулли сведением его к линейному уравнению заменой: $z=y^{-n+1}$, $\quad \frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$.

После подстановки в уравнение Бернулли получим уравнение

$\frac{dz}{dx}+(-n+1)P(x)z=(-n+1)Q(x)$, которое является линейным уравнение относительно переменной z (см.§2.4).

<u>**Замечание**</u>. Решение уравнения Бернулли можно искать сразу в виде произведения двух неизвестных функций $y=u(x)\cdot\upsilon(x)$, как в §2.4.

<u>**Пример 1.**</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{x}{2y}.$$

<u>**Решение.**</u> Т.к. $n=-1$, делаем подстановку $z=y^2$, тогда $\frac{dz}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$, откуда $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}\frac{dz}{dx}$. Исходное уравнение сводится к линейному дифференциальному уравнению $\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=x$, которое решено в §2.4.

§2.6 Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение вида:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\ , \tag{9}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывные, дифференцируемые функции, для которых выполняется условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}\ , \tag{10}$$

называется уравнением в ***полных дифференциалах***.

Решается уравнение в полных дифференциалах нахождением такой функции $u(x,y)$, полный дифференциал которой совпадает с видом дифференциального уравнения (9), то есть:

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Отсюда следуют два уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y). \tag{11}$$

Интегрируя первое из уравнений (11), находим

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y).$$

Функцию $\varphi(y)$ доопределяем из второго уравнения (11) (см. пример) и окончательно находим $u(x,y)$. Учитывая, что $du(x,y) = 0$ выписываем общее решение уравнения в полных дифференциалах в виде $u(x,y) = c$.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0.$$

Решение.

Т.к. выполняется условие:

$$\frac{\partial\left(3x^2 + 6xy^2\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(6x^2y + 4y^3\right)}{\partial x} = 12xy\,,$$

то данное уравнение - это уравнение в полных дифференциалах.

$$u(x,y) = \int \left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \varphi(y) =$$
$$= x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя $u(x,y)$ по y, получим:

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$ (по условию). Отсюда:

$$\varphi'(y) = 4y^3,$$
$$\varphi(y) = y^4 + c_0.$$

$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$ есть общее решение дифференциального уравнения.

§2.7 Интегрирующий множитель

Пусть дифференциальное уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$. Иногда можно подобрать такую функцию $\mu(x,y)$, после умножения на которую, уравнение $\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ становится уравнением в полных дифференциалах, то есть $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$. Функция $\mu(x,y)$ называется ***интегрирующим множителем***.

В некоторых случаях интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ можно определить из условия:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Преобразуем это условие в удобную форму, раскрыв произведение:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x},$$
$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Делим обе части уравнения на μ, и вносим μ под знак дифференциала:

$$\frac{M}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{N}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

$$M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}.$$

Допустим, что μ зависит только от y. Тогда интегрирующий множитель $\mu(y)$ находится из уравнения:

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Это уравнение, возможно решить, если

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}\ \text{не зависит от } x.$$

Аналогично рассуждая, получим уравнение для интегрирующего множителя $\mu(x)$

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{-\dfrac{\partial N}{\partial x}+\dfrac{\partial M}{\partial y}}{N},$$ если его правая часть не зависит от y.

<u>Пример 1.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\left(y+xy^2\right)dx-xdy=0.$$

<u>Решение.</u>

$M=y+xy^2,\quad N=-x,\quad \dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$. Значит, данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Проверяем по формуле:

$\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\dfrac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\dfrac{2}{y}$, результат не зависит от x. Тогда для $\mu(y)$:

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=-\frac{2}{y},\quad \ln|\mu|=-2\ln|y|,\quad \mu=\frac{1}{y^2}.$$

Умножаем обе части исходного дифференциального уравнения на интегрирующий множитель $\dfrac{1}{y^2}$. Получаем уравнение:

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0,$$

которое является уравнением в полных дифференциалах, т.к.

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{y}+x\right)}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\quad \frac{\partial\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}.$$

Далее решаем его, аналогично предыдущему примеру.

§2.8 Некоторые виды уравнений второго порядка приводящие-ся к уравнениям первого порядка.

Определение. ***Дифференциальное уравнения второго порядка*** имеет вид:

$$y''=f\left(x,y,y'\right).$$

В общем случае дифференциальное уравнение $y''=f\left(x,y,y'\right)$ не решается, однако, если в функции $f\left(x,y,y'\right)$отсутствуют переменные или x, или y, то возможно приведение уравнения к уравнению первого порядка.

I. *Правая часть уравнения $y''=f\left(x,y,y'\right)$ не содержит y, то есть решаем уравнение вида $y''=f\left(x,y'\right)$.*

Положим $y'=p$. Тогда $y''=p'$ и исходное дифференциальное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$p'=f\left(x,p\right)$$

Пусть его решение есть $p=p(x,c_1)$. Тогда из $\frac{dy}{dx}=p(x,c_1)$ получаем общее решение $y=\int p(x,c_1)dx+c_2$.

Пример1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''+xy'=1.$$

Решение.

Положим $y'=p$. Тогда $y''=p'$, уравнение запишется $x^2p'+xp=1$ или $p'+\frac{p}{x}=\frac{1}{x^2}$ - линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Решение ищем в виде $p=u\cdot v$.

Отсюда находим:

$$\frac{dp}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

Тогда: $$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}uv=\frac{1}{x^2},$$

или $$u\left(\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x}\right)+v\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}. \qquad (13)$$

Полагаем $$\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x}=0, \quad \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}.$$

Отсюда находим решение для функции v:

$\ln|v|=\ln\left|\frac{1}{x}\right|$ или $v=\frac{1}{x}$. Подставим решение $v=\frac{1}{x}$ в уравнение (13), получим (выражение в скобке равно нулю):

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2} \text{ или } \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}, \quad u=\ln|x|+c_1.$$

Следовательно,

$$p=\frac{1}{x}(\ln|x|+c_1)=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{c_1}{x},$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\ln|x|}{x}+\frac{c_1}{x}.$$

Отсюда находим общее решение

$$y=\int\frac{\ln|x|dx}{x}+\int\frac{c_1dx}{x}=\int\ln|x|d(\ln|x|)+c_1\int\frac{dx}{x}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln^2|x|+c_1\ln|x|+c_2.$$

Замечание. Если правая часть уравнения $y''=f(x,y,y')$ не содержит y и y', то уравнение $y''=f(x)$ решается аналогично, подстановкой $y''=p'$.

II. *Правая часть уравнения* $y''=f(x,y,y')$ *не содержит* x*, то есть решаем уравнение вида* $y''=f(y,y')$.

Положим $y'=p$. Тогда $y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$ и исходное дифференциальное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p).$$

Пусть его решение есть $p = p(y, c_1)$. Тогда из уравнения $\dfrac{dy}{dx} = p(y, c_1)$ получаем общее решение $\displaystyle\int \frac{dy}{p(y, c_1)} = x + c_2$.

Пример2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

Решение.

Полагая $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, уравнение запишется $yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными, приведя его к виду $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dy}{y}$ и интегрируя, получим $\ln|p| = -\ln|y| + \ln c_1$, $p = \dfrac{c_1}{y}$.

Далее $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c_1}{y}$, $y\,dy = c_1 dx$, $\int y\,dy = \int c_1 dx$ получим общее решение:

$$\frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2.$$

§2.9 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. ***Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*** называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (14)$$

где p и q - действительные числа.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (15)$$

Обозначим корни характеристического уравнения через k_1 и k_2.

Возможны три случая:

1) k_1 и k_2- действительные, различные корни. Общее решение в этом случае имеет вид: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.
2) k_1 и k_2- комплексные корни: $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$ $(\beta \neq 0)$.

Общее решение в этом случае имеет вид: $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$.
3) k_1 и k_2- действительные равные корни.
Общее решение имеет вид: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$.
Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$2y'' - y' - y = 0.$$

Решение.
Составим и решим характеристическое уравнение $2k^2 - k - 1 = 0$, $k_1 = 1, k_2 = -\frac{1}{2}$ - действительные различные корни. Общее решение имеет вид: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}}$.
Замечание. Аналогично решаются однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

§2.10 Линейные неоднородные уравнения второго порядка с **постоянными** *коэффициентами со специальной правой частью*

Определение. ***Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*** называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{16}$$

где p и q - действительные числа, а $f(x)$ - некоторая функция.
Общее решение уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ представляется в виде:

$$y = \bar{y} + Y,$$

где $\bar{y}$ - общее решение однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, а Y - частное решение неоднородного уравнения, зависящее от вида функции $f(x)$.
Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, (17)
где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно. Тогда частное решение неоднородного уравнения выбирается в виде:

$$Y = x^s e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_l(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right),$$

где $l = \max(m, n)$, $\tilde{P}_l(x)$ и $\tilde{Q}_l(x)$ - многочлены от x l-й степени общего вида с неопределенными коэффициентами, а s- кратность корня $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического уравнения (если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' - y'' = 12x^2 + 6x\,.$$

Решение.

Запишем уравнение с правой частью в виде (17):

$$y''' - y'' = e^{0x}\left((12x^2 + 6x)\cos 0x + \sin 0x\right),$$

отсюда заключаем, что $\lambda = \alpha + i\beta = 0 + i0 = 0,\ n = 2,\ m = 0.$

Далее находим общее решение однородного уравнения $y''' - y'' = 0.$

Составим характеристическое уравнение $k^3 - k^2 = 0$, его корни $k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = 1.$

Общее решение однородного уравнения $\bar{y} = c_1 + c_2x + c_3e^x\,.$

Так как $k = 0$, есть двукратный корень характеристического уравнения совпадающий с $\lambda = 0$, то $s = 2,\ \ l = \max(2,0) = 2.$

Тогда частное решение с неопределенными коэффициентами надо искать в виде:

$$Y = x^s e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_l(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right) =$$

$$= x^2 e^{0x}\left(\tilde{P}_2(x)\cos 0x + \tilde{Q}_2(x)\sin 0x\right) =$$

$$= x^2 e^{0x}\left((Ax^2 + Bx + C)\cos 0x + (Dx^2 + Fx + G)\sin 0x\right) =$$

$$= x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Далее находим производные:

$$Y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,$$

$$Y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C\,,$$

$$Y''' = 24Ax + 6B\,.$$

Подставляя полученные выражения в начальное уравнение, получим:

$$(24Ax + 6B) - (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 12x^2 + 6x\,,$$

$$-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 12x^2 + 6x\,.$$

Откуда:

$$\begin{cases} -12A = 12 \\ 24A - 6B = 6 \\ 6B - 2C = 0. \end{cases}$$

Система имеет решение

$A=-1, B=-5, C=-15$, а значит, частное решение неоднородного уравнения запишется $Y=-x^4-5x^3-15x^2$.

Общее решение данного неоднородного уравнения примет вид:

$$y=c_1+c_2x+c_3e^x-x^4-5x^3-15x^2.$$

§2.11 *Система* двух *дифференциальных уравнений первого порядка*

<u>**Определение**</u>. ***Система двух дифференциальных уравнений первого порядка*** имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f_1(x,y,z),\\ \dfrac{dz}{dx}=f_2(x,y,z).\end{cases} \qquad (18)$$

Решить систему - это значит определить $y(x)$ и $z(x)$, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\begin{cases}y_{x=x_0}=y_0,\\ z_{x=x_0}=z_0.\end{cases}$$

Решается система сведением ее к дифференциальному уравнению 2-го порядка ***методом исключения***.

Для нахождения общего решения системы (18) методом исключения, дифференцируем по x одно из уравнений этой системы, например, первое:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

Далее, используя (18), ***исключим*** $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ и получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F(x,y,z).$$

Составим новую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x,y,z), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = F(x,y,z). \end{cases}$$

Исключив из нее z, получим дифференциальное уравнение второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2} = G(x,y,y')$. Решая его стандартными методами, найдем общее решение $y = y(x,c_1,c_2)$. Подставив его в первое уравнение системы (18) найдем $z = z(x,c_1,c_2)$. Общее решение системы примет вид:

$$\begin{cases} y = y(x,c_1,c_2), \\ z = z(x,c_1,c_2). \end{cases}$$

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = -3y + z, \end{cases}$$

методом исключения с начальными условиями $\begin{cases} y_{x=0} = 2, \\ z_{x=0} = 2. \end{cases}$

Решение.

Продифференцируем первое уравнение по x. Тогда получим:

$$y'' = 3y' - z'.$$

Заменив производные y' и z' их выражениями из системы, имеем

$$y'' = 12y - 4z.$$

Составим новую систему:

$$\begin{cases} y' = 3y - z, \\ y'' = 12y - 4z. \end{cases}$$

Далее ***исключаем*** z, выразив его из первого уравнения системы

$$z = 3y - y'. \qquad (19)$$

В результате получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции y:

$$y'' - 4y' = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 4$. Тогда общее решение для функции y запишется в виде

$$y = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Подстановка найденного решения для y в выражение (19) дает общее решение для z:

$$z = 3C_1 - C_2 e^{4x}.$$

Общее решение системы примет вид:

$$\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{4x}, \\ z = 3C_1 - C_2 e^{4x}. \end{cases}$$

Найдем частное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y_{x=0} = 2, \\ z_{x=0} = 2. \end{cases}$$

Для этого определим константы C_1, C_2 из начальных условий.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 e^{4\cdot 0} = 2, \\ 3C_1 - C_2 e^{4\cdot 0} = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 3C_1 - C_2 = 2. \end{cases}$$

Решая систему, определим $C_1 = 1, C_2 = 1$. Тогда частное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям примет вид:

$$\begin{cases} y = 1 + e^{4x}, \\ z = 3 - e^{4x}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурский Е.И., Домашов В.П., Кравцов В.К., Сильванович А.П. Руководство к решению задач по высшей математике. Учебное пособие: в 2 ч. Мн.: Высшая школа, 1990. – Ч 2.
2. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. В 2 ч. – Мн.: Высшая школа, 1988. – Ч 2.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Для втузов т.2. – М.: Наука, 1970
4. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей ма тематике. В 4 ч. – Мн.: Высшая школа, 1990. Ч 2.,Ч3.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая Математика. Дифференциальные уравнения.Кратные интегралы. Ряды. Функция комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.
6. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. – Мн.: Высшая школа, 1983.
7. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1970.
8. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУзов. – М.: Наука, 1971.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание комбинированного распространения

РЯДЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания по курсу «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Авторы-составители: **Гойко** Владимир Иосифович
Курлович Сергей Петрович
Тепляков Виктор Герардович

Подписано в печать 06.08.07.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 1,87.
Изд. № 134.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Отпечатано на ризографическом оборудовании
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.