

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ

Д.Г. Кроль

Гомельский политехнический институт им. П.О. Сухого, Беларусь

Введение. Задачи теплопроводности с источниками тепла, сосредоточенные на поверхности или в объеме тела, очень распространены в технике. Эти задачи возникают при исследовании многих технологических процессов, таких, как лазерная обработка материалов, физическая модификация полимеров и их компонентов. Построение математической модели и ее исследование дает возможность получить количественную информацию о скорости нагрева, распределении температуры и других параметров, что позволяет наиболее качественно рассматривать данные процессы. Целью исследования является определение влияния различных типов объемного и поверхностного источников энергии на пространственно - временную эволюцию тепловых полей.

1. Постановка задачи. Основная математическая модель имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_v(x, T), \quad (1)$$

$$q = -\frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \quad (2)$$

$$c = \rho c_p; \quad u(T) = \int_0^T c(T) dT; \quad \Lambda(T) = \int_0^T \lambda(T) dT,$$

где x - декартова координата; t - время; T - температура; q - удельный тепловой поток; λ - коэффициент теплопроводности; c - удельная объемная теплоемкость;

q_v - мощность внутренних источников (стоков) энергии. Теплофизические свойства материалов описывались полиномами третьей степени:

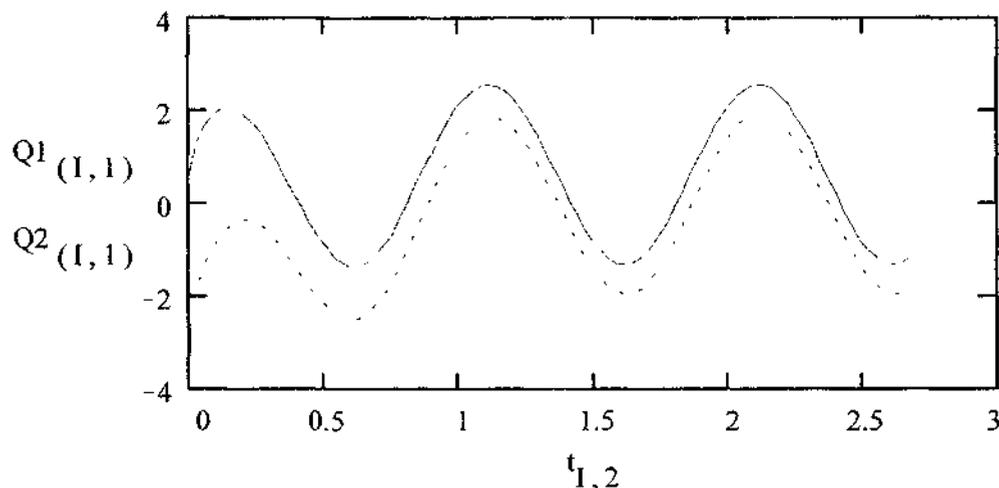
$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3; \quad c = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3;$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c_0, c_1, c_2, c_3 - const.$$

Исследование проводилось для двух вариантов граничных условий. Вариант 1 характеризуется тем, что правая граница области теплоизолирована: $x = h_1, q = 0$; левая граница испытывает нестационарное (гармоническое либо импульсное) температурное воздействие: $x = 0, T = T_0(t)$. Вариант 2 состоит в том, что температура правой границы задана: $x = h_1, T = T_w(t)$; на левую границу образца действует нестационарный тепловой поток: $x = 0, q = q_0(t)$. В случае лазерного нагрева металлов следует учитывать поглощательную способность материала: $A = A_0 + A_1 T, A_1 > 0$.

2. Построение общего решения. Решение системы уравнений (1), (2) выполнено численным методом интегральных соотношений А. А. Дородницына. Область интегрирования $x \in [0, h_1]$ разбивается на n полос линиями $x_i = ih_1 / n, i = 0, 1, \dots, n - 1$. Уравнение (1) умножаем на $\exp(l_1 x)$, уравнение (2) умножаем на $\exp(l_2 x)$, и строим замкнутую систему интегральных соотношений. С помощью интерполяционных квадратур типа Ньютона - Котеса получаем аппроксимирующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Итоговая система дифференциальных уравнений интегрировалась по t методом Рунге - Кутты пятого порядка точности. Выбор начальных значений искомых функций в узлах интерполяции проводился с помощью частного решения. Контроль точности проводился по двум вариантам: 1) сравнением с известным точным решением нестационарных задач теплопроводности; 2) использование различных "кусочных" аппроксимаций.

3. Некоторые результаты расчетов. Приведем здесь два варианта тепловых процессов, различающихся знаком производной dq_v / dT . На рисунке показана зависимость теплового потока на левой границе образца (сталь Ст -45) от времени при различных значениях внутреннего источника энергии: 1) $q_v = -0.2 - 0.4T$ (сплошная линия); 2) $q_v = -0.6 + 0.2T$ (штриховая линия).



Работа выполнена под научным руководством проф. Шабловского О. Н.