

УДК 539.4

## **РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФИЦИЕНТОВ ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАТИВНОСТИ ЕГО РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

**М.Ю. ТЕМИС**

*Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация*

Проведено исследование течения смазки в подшипнике с деформируемыми поверхностями скольжения. На основе уравнения Рейнольдса создана конечно-элементная модель для определения характеристик течения несжимаемой смазки в подшипнике. Упругие деформации поверхностей скольжения под действием гидродинамических давлений смазки определяются при решении плоской задачи теории упругости методом граничных элементов. На основе модели течения смазки и модели деформирования подшипника разработана методика определения деформаций поверхностей скольжения и распределения давления, статических и динамических характеристик течения смазки при различных режимах работы. Полученные характеристики сопоставлены с аналогичными для подшипника с жесткими рабочими поверхностями.

Подшипники скольжения с гидродинамическим режимом смазки применяются в стационарных газотурбинных установках (ГТУ). Смазка в подшипнике оказывает существенное влияние на статические и динамические параметры ротора стационарной ГТУ. Поэтому одной из основных задач, предвещающих анализ статики и динамики ротора на подшипниках скольжения, является расчет статических и динамических характеристик подшипника скольжения.

### **1. Модель течения смазки в подшипнике скольжения для определения статических и динамических характеристик**

На основе гипотезы течения смазки в узком зазоре подшипника скольжения, система уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности приводятся к уравнению Рейнольдса [1]

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\eta \left[ (u_0 + 3u_1) \frac{\partial h}{\partial s} + 2v \right], \quad (1)$$

где  $p(s, z)$  – давление в слое смазки;  $s = \varphi \cdot R$  – координата на одной из поверхностей скольжения в направлении относительного движения;  $y$  – направлено перпендикулярно поверхности скольжения;  $z$  – направлено перпендикулярно относительному движению;  $h(s, z)$  – толщина слоя смазки;  $u_0$  и  $u_1$  – значения скорости в направлении « $s$ » на обеих поверхностях скольжения;  $v$  – скорость в направлении « $y$ »;  $\eta$  – динамическая вязкость. Радиальная реакция в опоре ротора  $\bar{Q}$  уравнивается подъемной силой в подшипнике скольжения, определяющейся давлением смазочного клина (рис. 1).

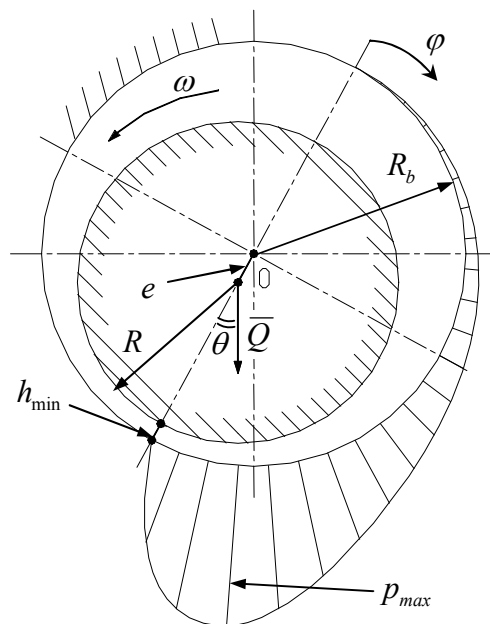


Рис. 1. Сечение подшипника скольжения

Для вала, вращающегося со скоростью  $\omega$ , при неподвижном векторе нагрузки  $\bar{Q}$  при учете малых перемещений шейки вала относительно статического положения равновесия, получим

$$\begin{aligned} y = R \quad u_0 = \omega R; \quad v = \frac{dh}{dt} \\ y = R_b \quad u_1 = 0; \quad v = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и уравнение Рейнольдса (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\eta\omega R \frac{dh}{ds} + 12\eta \frac{dh}{dt}, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус шейки вала. При учете статических и динамических составляющих смещения положение центра вала описывается следующей системой:

$$\begin{cases} x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y \\ \frac{dx}{dt} = \frac{d\Delta x}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\Delta y}{dt}. \end{cases} \quad (4)$$

Статическое смещение центра вала определяется координатами  $x_0, y_0$ . Динамическое смещение центра вала задается малыми смещениями  $\Delta x, \Delta y$  и скоростями смещений  $d\Delta x/dt = \Delta \dot{x}, d\Delta y/dt = \Delta \dot{y}$ . При записи (4) принято, что при статическом равновесии подшипник работает без вихревого движения, поэтому  $dx_0/dt = dy_0/dt = 0$ . Учитывая (4) можно представить давление и толщину слоя смазки в виде

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \Delta x \cdot p_x + \Delta y \cdot p_y + \Delta \dot{x} \cdot p_{\dot{x}} + \Delta \dot{y} \cdot p_{\dot{y}} \\ h &= h_0 + \Delta x \cdot h_x + \Delta y \cdot h_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая в разложениях величины первого порядка малости, при подстановке (4) и (5) в (3) и выполнения преобразований получим окончательный вид уравнения Рейнольдса для определения статических и динамических характеристик [2, 6]

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( h_0^3 \frac{\partial p_i}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h_0^3 \frac{\partial p_i}{\partial z} \right) = \begin{cases} 6\eta\omega R \frac{dh}{ds}, p_i = p_0 \\ -\frac{\partial}{\partial s} \left( 3h_0^2 h_x \frac{\partial p_0}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( 3h_0^2 h_x \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) + 6\eta\omega R \frac{dh_x}{ds}, p_i = p_x \\ -\frac{\partial}{\partial s} \left( 3h_0^2 h_y \frac{\partial p_0}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( 3h_0^2 h_y \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) + 6\eta\omega R \frac{dh_y}{ds}, p_i = p_y \\ 12\eta h_x, p_i = p_{\dot{x}} \\ 12\eta h_y, p_i = p_{\dot{y}} \end{cases} \quad (6)$$

В общем случае функция толщины слоя смазки  $h(s, z)$  зависит от геометрических размеров зазора смазочного слоя –  $\delta_g(s, z)$ , а также от деформаций поверхностей [6] шейки вала и подшипника под действием гидродинамических давлений –  $\delta_b(s, z)$ :

$$h(s, z) = \delta_g(s, z) + \delta_b(s, z). \quad (7)$$

Решение уравнения (6) наиболее удобно получить, воспользовавшись методом конечных элементов. После применения метода взвешенных невязок и учета естественных граничных условий первое из уравнений (6) запишется в виде

$$-\int_S h_0^3 \left( \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) dS = 6\eta\omega R \int_S \frac{dh}{ds} w dS, \quad (8)$$

где  $S$  – поверхность скольжения;  $w(s, z)$  – весовая функция. Для остальных уравнений из (6) могут быть получены соотношения аналогичные (8), которые после применения технологии метода конечных элементов (МКЭ), задания аппроксимации для  $p(s, z)$  и  $w(s, z)$  на треугольных элементах приводятся [3] к системам уравнений вида

$$[K_f(h)]\{p\} = \{Q_f\}, \quad (9)$$

где  $[K_f(h)]$  – матрица системы, коэффициенты которой зависят от деформаций поверхностей скольжения под действием гидродинамических давлений;  $\{Q_f\}$  – вектор правой части, определяемый одним из выражений справа в (6).

При решении уравнения (6) с первой правой частью в форме (9) определяется распределение давления в подшипнике при заданном статическом смещении вала и режиме работы. После определения давления  $p_0(s, z)$  и подстановке их во вторую и третью правые части (6) определяются коэффициенты матрицы жесткости подшипника скольжения при малых смещениях шейки вала относительно положения равновесия. Четвертая и пятая правые части (6) определяют коэффициенты матрицы демпфирования подшипника для рассчитанного равновесного состояния.

## 2. Модель упругого деформирования поверхностей скольжения

В общем случае, определение перемещений рабочих поверхностей шейки вала и подшипника требует решения трехмерных задач упругости. Однако, принимая во внимание то, что давление смазки действует на поверхности скольжения в ограниченной области, можно предположить, что сечения вала и подшипника остаются плоскими, все деформации в осевом направлении равны нулю и применимо решение плоской задачи теории упругости (ПЗТУ). Если угловая деформация вала пренебрежимо мала, то максимальные упругие перемещения вала и подшипника будут иметь место в точках среднего сечения подшипника, где действуют максимальные давления. Радиальные

перемещения считаются равными нулю на концах подшипника для некоторых значений эксцентриситетов коротких подшипников. Между тем для длинных подшипников радиальные перемещения на концах подшипника подобны таким же в среднем сечении подшипника. В первом приближении радиальные перемещения рабочих поверхностей могут быть рассчитаны с помощью следующего выражения

$$\delta_{bi}(s, z) = \delta_i(s)(1 - q\alpha), \quad \alpha = (1 - 2z/l)^2, \quad (10)$$

где  $\delta_i(s)$  – радиальные перемещения в среднем сечении подшипника ( $i = 1$ ) и шейки вала ( $i = 2$ ),  $l$  – длина подшипника,  $d$  – номинальный диаметр вала и подшипника,  $q = 1$  для  $d/l \geq 1$  и  $q = d/l$  для  $d/l < 1$ . Таким образом  $\delta_b(s, z) = \delta_{b1}(s, z) - \delta_{b2}(s, z)$ . Перемещения  $\delta_i(s)$  определяются из решения ПЗТУ для двух соосных цилиндров – шейки вала и подшипника. Давление, которое прикладывается к поверхностям скольжения, берется из предыдущей итерации решения уравнения Рейнольдса.

Деформации поверхностей скольжения определим методом граничных элементов (МГЭ), который приводит к следующему интегральному уравнению [4]

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_L p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)dL = \int_L u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)dL, \quad i, j = 1, 2, \quad (11)$$

где  $u_j$  – перемещения на границе;  $p_j$  – напряжения на границе,  $i$  соответствует оси « $x_1$ » и  $j$  – оси « $x_2$ »;  $L$  – контур;  $u_{ij}^*$  и  $p_{ij}^*$  – фундаментальные решения для перемещений и напряжений. Интегральное уравнение (11) после подстановки выражений для фундаментальных решений, применения дискретизации на контуре  $L$  преобразуется к виду  $[H]\{U\} = [G]\{P\}$ , который после перегруппировки неизвестных узловых значений  $\{X\}$  сводится к системе линейных алгебраических уравнений МГЭ  $[A]\{X\} = \{Y\}$ .

### 3. Расчет характеристик подшипника скольжения для податливых и жестких поверхностей скольжения

Задача эластогидродинамического контакта в подшипнике скольжения сводится к связанной проблеме, включающей две задачи упругости для подшипника и шейки вала и задачу гидродинамики для течения слоя смазки. Решение задачи ведется итерационно. На первом шаге подшипник и шейка вала считаются жесткими ( $\delta_b = 0$ ). В этом случае из решения (6) следует распределение давления в слое смазки. При приложении этого давления в плоские модели подшипника и вала из (11) определяем первое приближение деформаций рабочих поверхностей и, соответственно, первое приближение  $\delta_b$ . После корректировки толщины слоя смазки в (7) из (6) определяется новое распределение давления на втором шаге и затем из (11) второе приближение для деформаций поверхностей и т. д. Итерационный процесс останавливается, когда изменение давления и перемещений поверхностей на двух последующих итерациях находятся в пределах допуска.

Расчеты параметров подшипника скольжения проводились на основе решения задачи эластогидродинамического контакта для подшипника из бронзы ( $E = 0,75 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,3$ ) и стальной шейки вала ( $E = 2,15 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,3$ ) с  $l/d = 1$ , диаметром шейки вала 30 мм, радиальным зазором ( $\delta$ ) между валом и подшипником 50 мкм, скоростью вращения  $\omega = 3000$  с<sup>-1</sup> и вязкостью смазки  $\eta = 0,02 \cdot 10^{-6}$  МПа·с. На рис. 2 показаны деформации поверхностей подшипника и вала в большом увеличении для относительного эксцентриситета шейки вала  $\chi = e/\delta = 0,8$ . Реальные значения деформаций поверхностей скольжения приведены на рис. 3. На рис. 4 представлены зависимости для безразмерной подъемной силы  $[Q] = Q \cdot \delta^2 / (\eta \omega R^3 l)$  и угла  $\theta$  между направлениями  $\bar{e}$  и  $\bar{Q}$  в зависимости

от  $\chi$ . Деформации поверхностей скольжения существенно влияют на характеристики течения смазки в подшипнике для  $\chi \geq 0,6$ , что следует из распределений давления в подшипнике для деформируемых (рис. 4в) или жестких поверхностей (рис. 4г) скольжения.

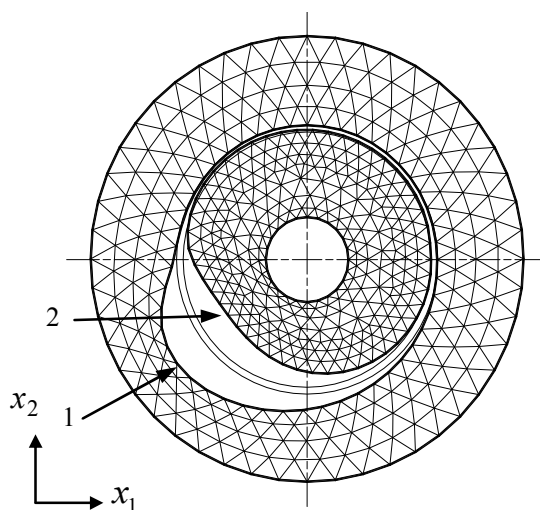


Рис. 2. Деформация поверхностей скольжения: 1 – подшипника; 2 – шейки вала

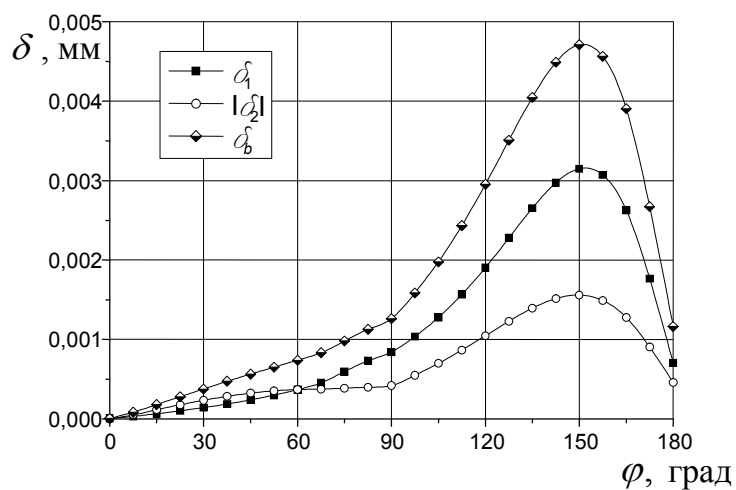
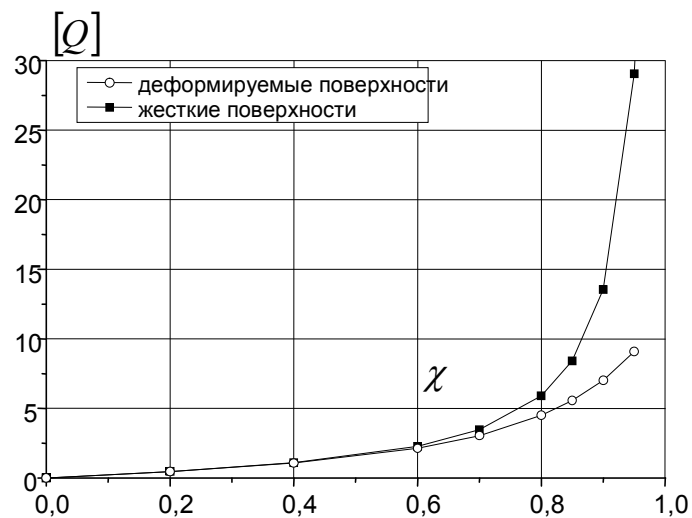
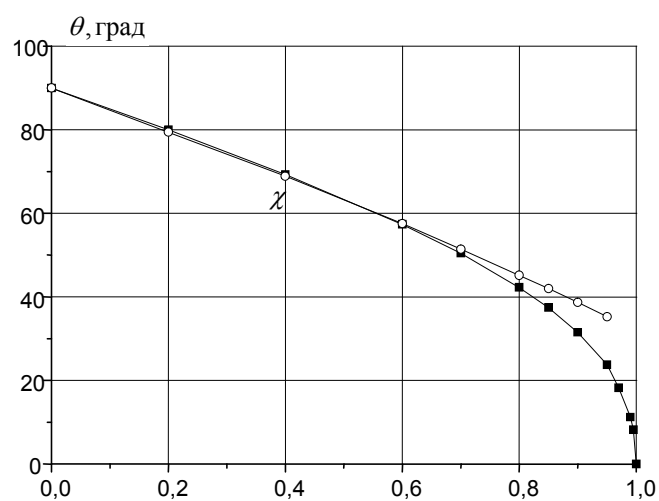


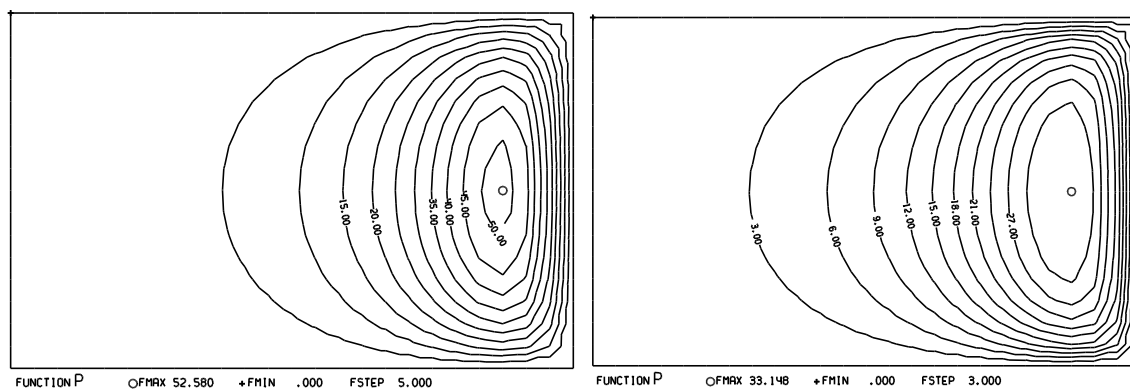
Рис. 3. Радиальные перемещения поверхностей шейки вала и подшипника в зависимости от  $\varphi$



а)



б)



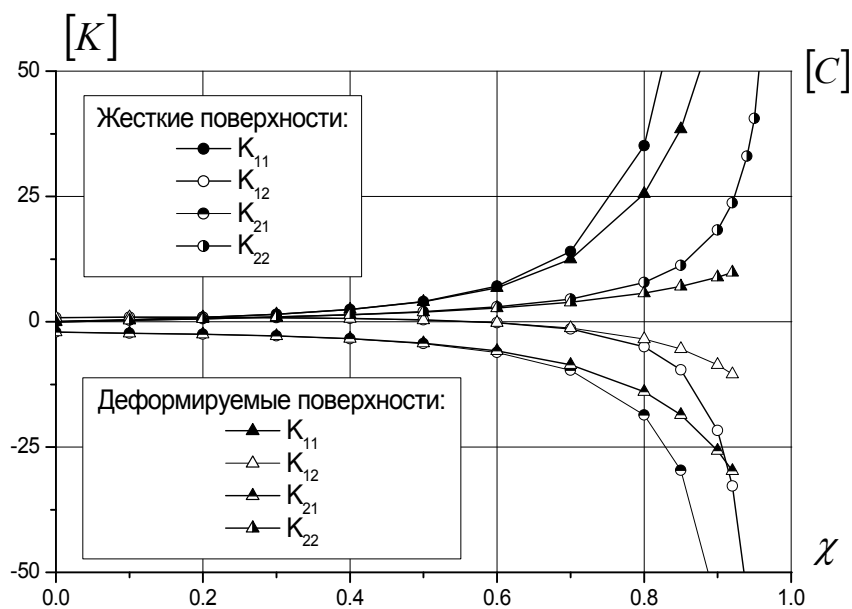
в)

г)

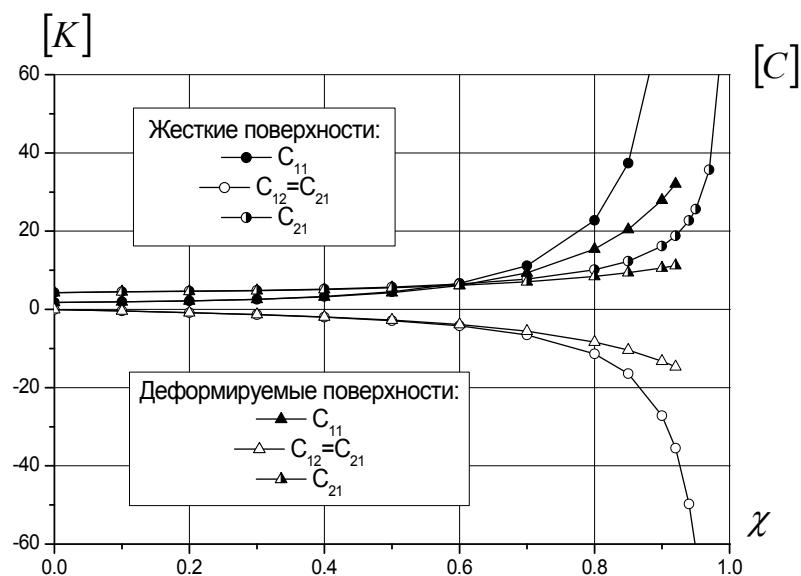
Рис. 4. Интегральные характеристики подшипников скольжения в зависимости от  $\chi$ : подъемная сила (а), угол между направлениями эксцентриситета и подъемной силы (б) в зависимости от  $\chi$ , (в) и (г) – распределение давления

Для  $\chi = 0,8$  учет деформаций рабочих поверхностей существенно снижает расчетные значения давлений в подшипнике (для  $p_{\max}$  на 37%) и, следовательно, значение подъемной силы (на 24%). На рис. 5 представлены значения безразмерных

коэффициентов жесткости  $[K_{ij}] = K_{ij} \cdot \delta^3 / (\eta \omega R^3 l)$  и демпфирования  $[C_{ij}] = C_{ij} \cdot \delta^3 / (\eta R^3 l)$ , определенные в равновесных состояниях для деформируемых и жестких поверхностей. Так же как и для статических характеристик, деформации рабочих поверхностей влияют на динамические характеристики, начиная с  $\chi = 0,6$ .



а)



б)

Рис. 5. Коэффициенты жесткости (а) и демпфирования (б) подшипника скольжения

На основе распределения давления в подшипнике из решения уравнения Рейнольдса и напряжений в шейке вала и подшипнике из решения ПЗТУ можно оценить износостойкость поверхностей скольжения [5]. Изнашивание поверхностей скольжения в подшипниках скольжения может происходить в результате усталостного разрушения при многократном повторном деформировании поверхностного слоя (усталостное изнашивание) и под воздействием движущейся относительно поверхности скольжения жидкой среды (гидроэрозионное изнашивание).

## Литература

1. Гидродинамическая теория смазки /Н.П. Петров [и др.]. – М.: ГТТИ, 1934. – 575 с.
2. Клит, П. Вычисление динамических коэффициентов радиального подшипника с использованием вариационного подхода /П. Клит, Дж. Лунн //Проблемы трения и смазки. – 1986. – № 3. – С. 91-95.
3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике /О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
4. Бреббия, К. Методы граничных элементов /К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
5. Основы трибологии (трение, износ, смазка) /Э.Д. Браун и [др.]. – М.: Центр «Наука и техника», 1995. – 778 с.
6. Temis J.M., Temis M.J. Influence of Elastohydrodynamic Contact Deformations in Fluid Film Bearing on High-Speed Rotor Dynamic. – Proc. 2th Int. Symposium On Stability Control of Rotating Machinery, Gdansk, Poland, 2003. – pp. 150-159.

Получено 02.07.2004 г.