ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Р. Б. Голубцов

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Как известно, методы оптимизации нелинейных моделей не так хорошо разработаны по сравнению с методами линейного программирования. И не существует единого универсального метода решения нелинейных задач, подобного, например, симплекс-методу в теории линейной оптимизации. Однако круг нелинейных оптимизационных экономических задач, которые нельзя свести к линейным, настолько широк, что возникают значительные трудности в связи с построением математической модели процесса и поиском его оптимального управления. Линеаризация сильно искажает модели, в которых целевая функция и ограничения имеют экономически обоснованную нелинейную форму. Так, например, в модели оптимального распределения инвестиционных потоков целевая функция – чистый дисконтированный капитал – является степенной функцией нескольких переменных.

Для решения задачи оптимального размещения инвестиций, имеющей модель с ограничениями в виде равенств, может, с некоторым успехом, быть применен метод штрафных функций с использованием множителей Лагранжа. Он заключается в следующем. Целевая функция (чистая дисконтированная стоимость проекта) может быть записана в виде нелинейной (степенной) функции нескольких переменных. Обозначим ее через $f(\mathbf{x})$. Ограничения модели представляют собой линейные постоянные функции, которые обозначим через $g_j(\mathbf{x})$. Запишем функцию Лагранжа:

$$P(\mathbf{x},\omega) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} \omega_j g_j(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где ω_j $(j = 1,\ldots,n)$ – неотрицательные и не зависящие от $\mathbf{x}$ весовые коэффициенты – множители Лагранжа.

Как видно из приведенной формулы, задача при наличии ограничений свелась к задаче без ограничений. Теперь задача оптимального размещения долгосрочных капитальных вложений может быть сформулирована следующим образом:

$$\max\{P(\mathbf{x},\omega) \mid \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n\}. \tag{2}$$

Для того чтобы получить оптимальное решение $\mathbf{x}^*$ задачи (2), необходимо решить систему дифференциальных уравнений с параметром ω_j, которая имеет вид:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j}=0, \tag{3 а}$$

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}^*)}{\partial \omega_j}=0, \tag{3 б}$$

$$\omega_j\ge 0,\ j=1,\ldots,n. \tag{3 в}$$

Автором была построена модель задачи (2) по тестовым гипотетическим данным и проведена численная оптимизация этой модели на ПЭВМ. Критерием оптимальности данной модели является максимально достижимая чистая дисконтированная стоимость инвестиционного капитала. Результаты, полученные вследствие поиска оптимума (размера предприятия и его производственной мощности), свидетельствуют о правильности выбранного метода решения задач, подобных рассмотренной здесь. Данный метод оптимизации, с некоторыми доработками, может быть применен и для решения реальных нелинейных задач, возникающих в связи с планированием и управлением инвестиционной и инновационной деятельностью на предприятии.

Под доработками подразумевается модификация метода множителей Лагранжа на случай задачи, в которой кроме ограничений на целевую функцию в виде равенств присутствуют и ограничения в виде неравенств. Дело в том, что существующие реализации метода штрафных функций при использовании множителей Лагранжа, предназначенные для решения задач с ограничениями в виде неравенств, сильно искажают исходную модель. В них в качестве «штрафа» в целевую функцию вводятся ограничения с ослабляющими переменными. Это делается для того, чтобы перейти от неравенств к равенствам. Модифицированная целевая функция (функция Лагранжа) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$P(\mathbf{x},\omega)=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{n}\omega_i g_i(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^{m}\omega_j(h_j(\mathbf{x})-v_j^2), \tag{4}$$

где $h_j(\mathbf{x})$ – ограничения в виде неравенств; v_j – ослабляющие переменные.

К системе (3 а) – (3 в) добавляется еще одно уравнение с производной относительно ослабляющей переменной. Решение модифицированной системы дифференциальных уравнений, таким образом, гарантирует необходимое условие оптимальности. Однако следует отметить, что квадратичная аппроксимация «штрафа», как показано в третьем слагаемом функции (4), не всегда дает приемлемое решение исходной задачи. Это, в частности, проявляется в том случае, если первоначальная целевая функция $f(\mathbf{x})$ содержит независимые переменные вида x_j^a, где a – рациональная дробь. Дробный показатель степени независимых переменных делает целевую функцию слабо поддающейся квадратичной аппроксимации и искажает ее представление. Поэтому для преодоления данного недостатка необходимо вводить ослабляющие переменные специальной структуры.

Подводя итог, можно отметить, что сфера эффективного применения методов штрафных функций ограничивается достаточно простыми нелинейными задачами, характеризующимися небольшой размерностью, но зато они обеспечивают достаточно быструю сходимость. К таким задачам можно отнести и проблему оптимального распределения инвестиций на предприятии при сравнительно небольшом периоде реализации инвестиционных проектов (8-10 лет).

Литература

1. Зангвилл У. Нелинейное программирование: Единый подход /Пер. с англ., Под ред. Е. Г. Гольштейна. – М.: Советское радио, 1973. – 312 с.
2. Полак Э. Численные методы оптимизации: Единый подход /Пер. с англ.; Под ред. И. А. Вателя. – М.: Мир, 1974. – 376 с.
3. Применение исследования операций в экономике: Сб. статей /Пер. с венг. – М.: Экономика, 1977. – 328 с.
4. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование: Методы последовательной безусловной минимизации /Пер. с англ.; Под ред. Е. Г. Гольштейна. – М.: Мир, 1972. – 240 с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование /Пер. с англ.; Под ред. М. Л. Быховского. – М.: Мир, 1975. – 536 с.