Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования
«Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»**

Кафедра «Физика»

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

ПОСОБИЕ
по курсу «Физика» для студентов всех специальностей

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2007

УДК 53.08(075.8)
ББК 22.3я73
Т33

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (протокол № 10 от 23.06.2005 г.)

Автор-составитель: *О. П. Соловцова*

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого *В. И. Лашкевич*

Т33 **Теория** погрешностей : пособие по курсу «Физика» для студентов всех специальностей / авт.-сост. О. П. Соловцова. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2007. – 38 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-420-532-8.

В пособии рассматриваются правила и методы обработки результатов измерений, полученных при выполнении лабораторных работ по физике.

Для студентов всех специальностей.

УДК 53.08(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-420-532-8

Оглавление

1. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

При экспериментальном исследовании физических явлений необходимо выполнить измерения физических величин. Под измерением понимается сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за эталонную. Для проведения измерений используются технические средства разных типов (средства измерения). Точность измерения определяется рядом факторов и всегда является ограниченной. Результаты измерений содержат некоторую погрешность, определение которой является неотъемлемой частью экспериментальных исследований. Теория погрешностей позволяет по результатам измерений делать оценки неизвестных измеряемых величин, определять погрешности таких оценок и устранять грубые ошибки.

1.1. Измерения

Измерения делятся на прямые и косвенные. Под **прямыми** измерениями понимаются такие измерения, в результате которых значение физической величины определяется непосредственно из опыта. Например, к прямым измерениям относятся измерения длины линейкой, времени – секундомером, электрического напряжения – вольтметром и т. п.

Далеко не всегда физическую величину можно измерить прямым путем. В большинстве случаев приходится непосредственно измерять не искомую величину, а некоторые другие величины, связанные с ней определенными математическими соотношениями (формулами). Такие математические выражения определяются законами данного физического явления и дают возможность вычислять искомую величину, используя результаты прямых измерений других величин. В этом случае говорят о **косвенных** измерениях. Например, для определения ускорения свободного падения g непосредственно измеряются такие величины, как высота h, с которой падает тело, и время падения t. Искомая величина g рассчитывается далее по формуле: $g = 2h/t^2$.

При измерении физической величины, как правило, выполняются последовательно следующие операции:

- проверка и установка измерительных приборов;
- снятие показаний приборов;
- вычисление искомой величины и оценка погрешности.

Измерительным прибором называется такое устройство, которое осуществляет измерение некоторой физической величины и преобразование полученной информации в форму, доступную для восприятия наблюдателем. Проверка измерительных приборов и надлежащая их установка необходима для правильного снятия показаний. Так, приступая к измерению температуры, следует проверить правильность точки отсчета термометра. Измеряя массу при помощи рычажных весов, следует расположить их на горизонтальной поверхности и уравновесить.

Целью измерений является определение численного значения физической величины. При этом следует отметить, что найденное из опыта значение не является абсолютно точным. Как бы тщательно не выполнялся опыт, результат измерений будет содержать погрешности (ошибки). Погрешность измерений – это сложная величина. На результат измерений влияет множество различных факторов, каждый из которых вносит свою погрешность.

1.2. Виды погрешностей измерений

Погрешности измерений разделяют на систематические, грубые (промахи) и случайные.

Систематические погрешности обусловлены факторами, которые действуют одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же опытов в одних и тех же условиях. Такие погрешности связаны с точностью показаний самих приборов, с несовершенством методики проведения измерений, с неправильной установкой приборов, с пренебрежением воздействия некоторых внешних факторов и т. п. Систематические погрешности обусловлены вполне определенными постоянно действующими причинами. При повторных измерениях их величина остается неизменной, или изменяется по определенному закону. В ряде случаев систематические погрешности могут быть выявлены и уменьшены путем введения соответствующих поправок в результаты измерений или при применении более точных приборов. Например, разной будет систематическая погрешность измерения толщины карандаша при помощи линейки и штангенциркуля. Неисключенная систематическая погрешность рассматривается как случайная.

Классическим примером влияния систематической погрешности на окончательный результат измерений служит результат опыта Милликена[1] по измерению элементарного заряда электрона e. В этом эксперименте требовалось учесть вязкость воздуха. Взяв неверное значение вязкости воздуха, Милликен получил значение заряда электрона $e = (1,591 \pm 0,002) \cdot 10^{-19}$ Кл, которое оказалось заниженным [2]. В результате, вплоть до 1930 года значения других величин, вычисление которых базировались на значении e (например, постоянная Планка h), содержали систематическую ошибку.

Разнообразие измеряемых величин и средств измерений не позволяет ввести единый способ для указания погрешностей измерительных приборов. Так, например, погрешность измерительного прибора может быть приведена в его паспорте или нанесена на сам прибор. На многие показывающие приборы (амперметры, вольтметры, манометры и др.) наносится класс точности. **Класс точности** прибора равен отношению допустимой погрешности прибора к максимально возможному показанию прибора. Класс точности выражается в процентах (0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0). Например, класс точности 0,1 соответствует относительной погрешности прибора $0,1\,\%$. Класс точности позволяет сделать подбор прибора для проведения измерений с требуемой точностью.

Итак, если известен класс точности прибора, то для любого показания прибора можно найти допустимую абсолютную **погрешность прибора**

[1] Роберт Милликен (1868-1953), американский физик, удостоенный в 1923 г. Нобелевской премии по физике за работы по определению элементарного электрического заряда и изучению фотоэффекта.

[2] Современный эксперимент дает значение заряда электрона с высокой точностью: $e = (1,60217653 \pm 0,00000014) \cdot 10^{-19}$ Кл.

$$\Delta_{\text{приб}} = \frac{K}{100\,\%} X_{\text{пред}}\,,$$

где K – класс точности;

$X_{\text{пред}}$ – предел измерения шкалы прибора или максимально возможное показание прибора.

Таблица 1

Погрешности средств измерений

Средство измерения	**Предел измерения шкалы прибора**	**Предельное значение погрешности прибора**
Линейка металлическая	150 ÷ 500 мм 1000 мм	± 1 мм ± 2 мм
Линейка деревянная	200 ÷ 400 мм 500 ÷ 1000 мм	± 1 мм ± 5 мм
Линейка пластмассовая	200 ÷ 400 мм	± 1 мм
Гири для технических весов	10 ÷ 100 мг 200 ÷ 400 мг 500 мг 1 г 2 г 5 г	± 1 мг ± 2 мг ± 4 мг ± 6 мг ± 8 мг ±10 мг
Штангенциркуль	0 ÷ 200 мм	± 0,1 мм
Микрометр	0 ÷ 3 мм	± 0,01 мм
Термометр спирт.	20 ÷ 100 C^0	± цена деления
Мензурка	100 ÷ 200 мл	± 2 мл
Секундомер электрический	—	± 0,5 цены деления × × число оборотов

Для гирь, мер длины и приборов, для которых предел погрешности выражают в единицах измеряемой величины, класс точности принято обозначать номером (1-й, 2-й и т. д. – в порядке снижения класса точности). При этом, при указании конкретного класса точности слово “точность” обычно опускается, например, гиря 3-го класса.

Если сведений о погрешности прибора нет, то за основу оценки точности прибора берется цена деления прибора. В этом случае абсолютная погрешность прибора *равна половины цены деления*, если показания прибора являются непрерывной функцией измеряемой величины, и *единицы отсчета* – в случае дискретного отсчета измеряемой величины.

В табл. 1 приведены погрешности некоторых средств измерений, применяемых при выполнении лабораторных работ по физике.

Грубые ошибки (*промахи*) возникают в результате просчёта, неправильного чтения показаний измерительного прибора, неисправности средств измерений, нарушении требуемых условий измерений и т. п. Внешним признаком результата, содержащего грубую ошибку, является его резкое отличие от остальных измерений. Такой результат необходимо исключить, а измерение по возможности повторить.

Случайные погрешности – это погрешности, которые обусловлены множеством причин, результат действия которых нельзя идентифицировать и учесть по отдельности. Случайные погрешности не следуют какой-либо постоянной закономерности, они могут принимать случайные, заранее неизвестные значения. Случайные погрешности могут приводить как к увеличению, так и к уменьшению значения измеряемой величины. Исключить случайные погрешности отдельных измерений невозможно, однако методы теории вероятностей и математической статистики по данным многократных измерений позволяют уменьшить влияние этих погрешностей и получить оценку величины погрешности.

Отметим, что если случайная погрешность, получаемая из нескольких измерений физической величины, оказывается значительно меньше погрешности, определяемой точностью прибора, то очевидно, что нет смысла пытаться еще уменьшить величину случайной погрешности – все равно результаты измерений не станут от этого точнее. Наоборот, если случайная погрешность окажется больше приборной, то, чтобы уменьшить величину случайной погрешности, следует увеличить число повторных измерений.

1.3. Обработка результатов прямых измерений

Обработка опытных данных является заключительным этапом экспериментальной работы. В результате такой обработки находится численное значение измеряемой величины и оценивается погрешность измерений.

Следует разграничивать два понятия: истинные значения физических величин и их эмпирические (экспериментальные) проявления – результаты измерений. **Истинные значения** физических величин не зависят от средств и способов измерений. Результаты измерений, представляя собой приближенные оценки значений физических величин, напротив, зависят от метода измерения, технических средств, с помощью которых проводятся измерения, и свойств органов чувств наблюдателя, осуществляющего измерения. Повторные измерения одной и той же физической величины, как правило, дают различные результаты, т. к. каждое измерение сопровождается некоторой погрешностью.

Пусть требуется определить неизвестное значение физической величины x. С этой целью с помощью некоторого измерительного прибора проводится n прямых независимых измерений, в результате которых получается набор значений

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ldots,\ x_n\ .$$

При обработке результатов прямых измерений сначала находится **среднее арифметическое значение**[3], которое равно

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (1.1)$$

Естественно предположить, что среднее значение $\bar{x}$ будет приблизительно соответствовать истинному значению x. Причем это соответствие будут тем лучше, чем больше измерений n было сделано. Отсюда следует, что в лабораторных исследованиях физические измерения должны быть выполнены неоднократно.

[3] Для обозначения среднего значения часто используется черта сверху.

Разность между значением x_i, полученным при отдельном i-м измерении, и средним значением $\bar{x}$

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}\,, \tag{1.2}$$

называется **абсолютной погрешностью отдельного измерения**.

Абсолютные погрешности отдельных измерений Δx_i могут быть как положительными, так и отрицательными, но при оценке погрешности результата измерений учитываются только модули, т. е. $|\Delta x_i|$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots, n)$.

Среднее арифметическое значение абсолютных погрешностей отдельных измерений называется **средней абсолютной погрешностью** результата измерений

$$\Delta x_{\text{ср}} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \cdots + |\Delta x_n|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|. \tag{1.3}$$

Средней относительной погрешностью результата измерений называется отношение средней абсолютной погрешности $\Delta x_{\text{ср}}$ к среднему значению $\bar{x}$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x_{\text{ср}}}{\bar{x}}\,. \tag{1.4}$$

Относительные погрешности принято выражать в процентах. В этом случае

$$\varepsilon_x\,(\%) = \frac{\Delta x_{\text{ср}}}{\bar{x}} \cdot 100\,\%\,. \tag{1.5}$$

Абсолютные погрешности выражаются в единицах измерения искомой величины и не зависят от ее значения, а определяются только точностью измерений. В выражении для относительной погрешности (1.4) входит среднее значение самой измеряемой величины и, следовательно, при одной и той же точности измерений относительная погрешность ε в различных случаях может быть разная. Например, при измерении размеров некоторых деталей микрометром, точность которого равна 0,01 мм (см. табл. 1), абсолютная погрешность во всех измерениях будет одна и та же – 0,01 мм. Относительная погрешность будет зависеть от измеряемого размера и составит 1 % при измерении размера в 1 мм и $0,1\%$ процент при измерении размера в 1 см. Относительная погрешность позволяет наглядно судить о точности измерений, поэтому при всех измерениях принято вычислять относительную погрешность результата измерений.

Средняя арифметическая погрешность (1.3) дает завышенное значение случайной погрешности изменений, поскольку при ее нахождении не учитывалось то, что, во-первых, измерения с большими отклонениями от истинного значения измеряемой величины встречаются реже, чем измерения с малыми отклонениями, во-вторых, то, что отклонения от истинного значения могут быть как в положительную, так и отрицательную сторону.

Современная теория погрешностей основывается на методах теории вероятностей и математической статистики (см. Приложение А) и позволяет увеличить точность оценки результата измерений. Согласно теории более точной является не средняя арифметическая погрешность, а так называемая *средняя квадратичная погрешность*, и при оценке измеряемой величины следует определять некоторый интервал значений, в который с определенной вероятностью попадает значение искомой величины x. Такой интервал называется *доверительным*, а соответствующая вероятность называется *надежностью* (*доверительной вероятностью*). Чем больше величина доверительного интервала, тем с большей надежностью истинное значение x попадает в этот интервал. Надежность (обозначается α) выражается или в долях единицы, или в процентах.

Таким образом, **надежность** равна вероятности того, что истинное значение x измеряемой величины попадает в **доверительный интервал**

$$\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x, \tag{1.6}$$

где $\bar{x}$ – среднее арифметическое значение, определяемое согласно выражению (1.1).

Для того чтобы получить оценки границы доверительного интервала ($\bar{x}-\Delta x$, $\bar{x}+\Delta x$) вводится новый коэффициент $t_\alpha(n)$, называемый

коэффициентом Стьюдента[4]. В зависимости от числа измерений n и надежности α коэффициент Стьюдента $t_\alpha(n)$ принимает то, или иное значение (см. табл. 3). Например, задавая надежность $\alpha = 0,95$, для $n = 5$ из табл. 3 находим: $t_{\alpha=0,95}(5) = 2,78$.

Полная **погрешность прямых измерений** Δx выражается через составляющие погрешности прямых измерений – **случайную погрешность** $\Delta x_{сл}$ и неисключенную **систематическую погрешность** $\Delta x_{сист}$. Погрешность прямых измерений Δx равна корню квадратному из суммы квадратов случайной и систематической погрешностей:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta x_{сист}^2}. \qquad (1.7)$$

Если систематическая погрешность обусловлена неточностью показаний прибора, то выражение (1.7) принимает вид:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \left(\frac{t_\alpha}{3}\right)^2 \Delta_{приб}^2}, \qquad (1.8)$$

где $\Delta_{приб}$ – погрешность прибора;

t_α – коэффициент Стьюдента, значение которого берется при $n = \infty$, т. е. $t_\alpha \equiv t_\alpha(n = \infty)$.

Надежность α принимается *одинаковой* как для случайной, так и для систематической погрешности.

Отметим, что если одна из составляющих полной погрешности оказывается много меньше другой, то ей пренебрегают. Например,

$$\Delta x = \Delta x_{сл}, \quad \text{если} \quad \Delta x_{сл} \gg \Delta x_{сист}.$$

Случайная погрешность прямых измерений $\Delta x_{сл}$[5], входящая в полную погрешность (1.7), определяется выражением

$$\Delta x_{сл} = t_\alpha(n)\, \sigma_x, \qquad (1.9)$$

где $t_\alpha(n)$ – коэффициент Стьюдента;

[4] Этот коэффициент был предложен в 1908 году математиком и химиком В. С. Госсетом, который публиковал свои работы под псевдонимом "стьюдент" – студент.

[5] Более полное название – случайная погрешность (отклонение) относительно среднего значения серии прямых измерений случайной величины.

σ_x – **среднеквадратичная погрешность** (*среднеквадратичное отклонение*) результата серии из n измерений относительно среднего значения.

Рассчитывается среднеквадратичная погрешность результата серии измерений по формуле:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{n\,(n-1)}}\,. \qquad (1.10)$$

Окончательный результат прямых измерений имеет вид:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x\,, \quad \varepsilon_x\,(\%)\,, \qquad (1.11)$$

где $\bar{x}$ – среднее значение, которое задано (1.1);

Δx – оценка погрешности прямых измерений, определяемая выражением (1.7) при заданной надежности α;

ε_x – относительная погрешность (обычно представляется в процентах):

$$\varepsilon_x\,(\%) = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\,\%\,. \qquad (1.12)$$

Выражение (1.11) и определяет доверительный интервал, т. е. интервал, в который с надежностью α попадает истинное значение измеряемой величины:

$$\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x\,.$$

Изложенная выше схема обработки результатов прямых измерений приведена в Приложении Б на с. 33.

Рассмотрим конкретный **пример**. Пусть при измерении диаметра шарика d штангенциркулем были получены следующие численные значения:

$$d_1 = 5,9 \text{ мм}, \quad d_2 = 6,0 \text{ мм}, \quad d_3 = 6,1 \text{ мм} \quad \text{и} \quad d_4 = 6,1 \text{ мм}.$$

Сначала вычисляем среднее значение

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{4} = \frac{5,9 + 6,0 + 6,1 + 6,1}{4} \simeq 6,0 \text{ (мм)}.$$

По формуле (1.10) находим среднеквадратичную погрешность

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{(d_1-\bar d)^2+(d_2-\bar d)^2+(d_3-\bar d)^2+(d_4-\bar d)^2}{4\,(4-1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(0,1)^2\,+\,(0)^2\,+\,(0,1)^2\,+\,(0,1)^2}{12}} \simeq 0,05 \text{ (мм)}.$$

Задавая надежность $\alpha = 0,95$, из табл. 3 для $n = 4$ определяем значение коэффициента Стьюдента, которое в данном случае равно: $t_\alpha(n) = 3,18$. И далее по формуле (1.9) вычисляем случайную погрешность прямых измерений

$$\Delta d_{\text{сл}} = t_\alpha(n)\ \sigma_d = 0,05\cdot 3,18 \simeq 0,16 \text{ (мм)}.$$

Оценим погрешность средств измерения: в данном случае – штангенциркуля. Воспользовавшись, например, данными приведенными в табл. 1, находим, что $\Delta d_{\text{приб}} = 0,1$ мм. Поскольку это значение сравнимо с величиной случайной погрешностью $\Delta d_{\text{сл}} \simeq 0,16$ мм, то полная погрешность Δd, согласно выражению (1.7), равна:

$$\Delta d \;=\; \sqrt{\Delta d_{\text{сл}}^{\,2}\;+\;\left(\frac{t_\alpha}{3}\right)^2 \Delta d^2_{\text{приб}}} = \sqrt{0,16^{\ 2} + \left(\frac{1,96}{3}\right)^2 \cdot 0,1^2} \simeq 0,2 \text{ (мм)}.$$

Окончательный результат прямых измерений диаметра шарика d имеет вид

$$d = \bar d \pm \Delta d = (6,0 \pm 0,2) \text{ мм}\ ,\quad \varepsilon_d = 3,3\ \% \ \text{ для }\ \alpha = 0,95 \qquad (1.13)$$

и означает, что истинное значение диаметра шарика попадает в доверительный интервал

$$5,9 \text{ мм} < \ d\ < 6,1 \text{ мм}$$

с надежностью, равной $\alpha = 0,95$. Таким образом, нижняя граница доверительного интервала равна 5,9 мм, а верхняя равна 6,1 мм.

Отметим, что при обработке результатов измерений следует руководствоваться *правилами приближенных вычислений* и не выходить за пределы той точности, которая имела место при измерениях. Бессмысленно и неправильно сохранять те значащие цифры, которые выходят за пределы точности. В ответе последняя цифра среднего значения и последняя цифра погрешности должны принадлежать одному и тому же десятичному разряду. Например, в рассмотренном примере бессмысленно записать: $d = (6,0 \pm 0,1728)$ мм.

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

1.4. Значащие цифры

Количество значащих цифр в числе является показателем его точности. Например, если с помощью рулетки и "точных" часов [6] было найдено, что тело за 3 сек прошло расстояние в 10 м, то для значения скорости тела v можно написать:

$$v = \frac{10}{3} = 3,33333 \text{ (м/с)}.$$

Возникает вопрос о том сколько значащих цифр после запятой нужно оставить. Так, если расстояние в 10 м было измерено с точностью 1 %, то результат следует записать в виде:

$$v = (3,33 \pm 0,03) \text{ м/с}.$$

Первые две значащие цифры являются достоверными, а третья – сомнительной. Не следует записывать результат в виде: $v = (3 \pm 0,03)$ м/с или в виде: $v = (3,33333 \pm 0,03)$ м/с и т. п.

Принято выписывать, как правило, еще одну значащую цифру после той, которая считается достоверной. Выписывание лишних значащих цифр в ответе создает неправильное представление о том, что результат получен с более высокой точностью, чем на самом деле.

Выполняя численные расчеты, следует руководствоваться *правилом:* в процессе вычислений (чтобы уменьшить ошибки округлений) число значащих цифр округляемых чисел должно на единицу превосходить число значащих цифр измеренных величин. В конце вычислений произвести округление так, чтобы *последняя цифра результата измерений и последняя цифра погрешности измерений* принадлежали одному и тому же десятичному разряду. Например, правильно записать: $(7,52 \pm 0,04) \cdot 10^{-5}$, $(3,541 \pm 0,003) \cdot 10^{3}$ и т. п.

[6] Погрешностью можно пренебречь.

В условиях учебной физической лаборатории чаще всего результаты измерений содержат только две или три значащие цифры, например, $g = (9,8 \pm 0,4)$ м/с^2 или $h = (1,48 \pm 0,05)$ м. Результаты с большим числом значащих цифр получают в специальных научно-исследовательских лабораториях.

1.5. Обработка результатов косвенных измерений

Основной *задачей косвенных измерений* является нахождение искомой величины (обозначим ее через Z), которая является функцией одного или нескольких аргументов

$$Z = f(x, y, \ldots, w)\,, \tag{1.14}$$

через непосредственно измеряемые независимые физические величины x, y, …, w.

Пусть после обработки результатов *прямых измерений* физических величин x, y, …, w были найдены, соответственно, их средние значения и оценки абсолютных и относительных погрешностей, т. е.

$$\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{w}\,, \quad \Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta w \quad \text{и} \quad \varepsilon_x,\ \varepsilon_y, \ldots,\ \varepsilon_w\,. \tag{1.15}$$

Рассмотрим вопрос о том, как, зная функциональную зависимость (1.14) и результаты прямых измерений (1.15), получить оценку физической величины Z.

1.5.1. Случай функции одной переменной

Наиболее просто ответ получается для случая функции одной переменной

$$Z = f(x). \tag{1.16}$$

Искомая оценка величины Z представляется в виде:

$$Z = \bar{Z} \pm \Delta Z = f(\bar{x} \pm \Delta x). \tag{1.17}$$

Если точность прямых измерений достаточно высока ($\Delta x \ll \bar{x}$), то можно записать:

$$f(\bar{x} \pm \Delta x) \simeq f(\bar{x}) \pm \frac{d\,f(x)}{dx}\,\Delta x = f(\bar{x}) \pm f'(\bar{x})\,\Delta x, \tag{1.18}$$

где $f(\bar{x})$ – значение функции, взятое при $x = \bar{x}$;

$f'(\bar{x}) = \dfrac{d\,f(x)}{dx}$ – производная функции $f(x)$, взятая при $x = \bar{x}$;

Δx – погрешность *прямых* измерений физической величины x.

Подставляя выражение (1.18) в (1.17), получаем

$$Z = \bar{Z} \pm \Delta Z\,, \tag{1.19}$$

где $\bar{Z} = f(\bar{x})$ – среднее значение искомой величина Z;

$\Delta Z = f'(\bar{x})\,\Delta x$ – оценка погрешности *косвенных* измерений.

Относительная погрешность *косвенных* измерений ε_Z, определяемая отношением $\varepsilon_Z = \Delta\bar{Z}/\bar{Z}$, принимает вид:

$$\varepsilon_Z = \frac{f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}\,\Delta x = \frac{d\ \ln|f(x)|}{d\,x}\,\Delta x \ \ (\cdot 100\,\%\ ).$$

1.5.2. Пример

Пусть требуется найти объем V шарика, диаметр которого d уже был оценен в результате обработки прямых измерений (см. выражение (1.13)):

$$\bar{d} = 6,0\,\text{мм}\ ,\quad \Delta d = 0,2\ \text{мм}\ ,\quad \varepsilon_d = 3,3\ \%\quad \text{для}\ \alpha = 0,95\,.$$

Зависимость объема шарика V от диаметра d имеет вид [7]:

$$V(d) = \frac{\pi}{6}\,d^{\,3}\,. \tag{1.20}$$

Используя это выражение, вычисляем среднее значение объема $\bar{V}$ [8]:

$$\bar{V} = \frac{1}{6}\,\pi\bar{d}^{\,3} = 0,167\cdot 3,14\cdot 6,0 \simeq\ 113\ (\text{мм}^3)\ \simeq\ 11\cdot 10^{-8}\ (\text{м}^3).$$

---

[7] В каждом конкретном случае обозначение Z следует заменять на стандартное обозначение измеряемой физической величины. В рассматриваемом примере $Z \to V$.

[8] Чтобы уменьшить погрешности, связанные с округлением чисел, число значащих цифр в 1/6 и π берется на единицу больше, чем число значащих цифр, полученных при измерении диаметра шарика.

Учитывая, что производная функции $f(x) = x^3$, которая соответствует выражению (1.20), равна: $\left(x^3\right)' = 3\,x^2$, получаем выражения для погрешностей косвенных измерений объема V:

$\Delta V = \dfrac{\pi}{2}\,\bar{d}^{\,2}\Delta d$ – погрешность косвенных измерений;

$\varepsilon_V = \dfrac{\Delta V}{\bar{V}} = 3\,\dfrac{\Delta d}{\bar{d}} = 3\,\varepsilon_d$ – относительная погрешность.

Используя эти выражения, проводим вычисления:

$$\Delta V = 1,57\cdot(6,0)^2\cdot 0,2 \simeq 11\ (\text{мм}^3) \simeq 1,1\cdot 10^{-8}\ (\text{м}^3),$$

$$\varepsilon_V\ (\%) = 3\cdot 3,3 \simeq 10\ (\cdot 100\,\%\,) = 10\ (\%)\,.$$

Окончательный результат косвенных измерений объема шарика записывается в виде:

$$V = (\,11 \pm 1\,)\cdot 10^{-8}\ \text{м}^3,\quad \varepsilon_V = 10\ \%\quad \text{для}\quad \alpha = 0,95\,. \qquad (1.21)$$

Отметим, что увеличив точность измерений диаметра шарика d (прямых измерений), можно повысить точность измерения объема V (косвенных измерений).

1.5.3. Случай функции нескольких переменных

Среднее значение функции выражается через средние значения её аргументов $\bar{x},\ \bar{y},\ \ldots,\ \bar{w}$:

$$\bar{Z} = f(\bar{x},\ \bar{y},\ \ldots,\ \bar{w}). \qquad (1.22)$$

Погрешность косвенных измерений ΔZ выражается через погрешности прямых измерений $\Delta x,\ \Delta y,\ \ldots, \Delta w$:

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\Delta y)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2(\Delta w)^2}, \qquad (1.23)$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial w}$$

– это *частные производные* функции $f(x, y, \ldots, w)$ по соответствующим аргументам $x,\ y,\ \ldots,\ w$. (Напомним, что частная производная функции нескольких переменных f по одной из переменных, скажем x, является обычной производной функции f по x, при этом другие переменные $y, \ldots, w$ считаются постоянными параметрами.) После дифференцирования полагается $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ и т. д.

Используя выражение (1.23), нужно помнить, что погрешности прямых измерений Δx, Δy, ..., Δw должны быть найдены для одного и того же значения надежности α. Погрешность косвенного измерения будет соответствовать этому значению надежности.

Относительная погрешность косвенных измерений находится по формуле:

$$\varepsilon_Z = \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} = \tag{1.24}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial|\ln f|}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial|\ln f|}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial|\ln f|}{\partial w}\right)^2 (\Delta w)^2}\,.$$

Окончательный результат косвенных измерений физической величины Z записывается для заданной надежности α в виде:

$$Z = \bar{Z} \pm \Delta Z\,, \;\; \varepsilon_Z\,, \tag{1.25}$$

где $\bar{Z}$, ΔZ и ε_Z определяются выражениями (1.22)–(1.24).

Схема обработки результатов косвенных измерений приведена в Приложении В на с. 34. Конкретный пример вычислений погрешностей косвенных измерений представлен в главе 2 “Определение плотности тела”.

Замечание. Если прямые измерения каждый раз проводились не в точности в тех же самых условиях, что и в предыдущий раз, то значения функции Z вычисляются для каждого отдельного набора измерений, т. е. $Z_1 = f(x_1, y_1, \ldots, z_1)$, $Z_2 = f(x_2, y_2, \ldots, z_2)$, ..., $Z_n = f(x_n, y_n, \ldots, z_n)$, а далее эти значения

$$Z_1\,, \;\; Z_2\,, \;\; \ldots\,, \;\; Z_n$$

обрабатываются как результат серии из n прямых измерений (см. схему обработки на с. 33).

1.6. Графики

При обработке экспериментальных данных, как правило, присутствуют различного рода графики. Их использование обусловлено разными целями. Например, график дает наглядную картину зависимости между физическими величинами, что выгодно отличает графический способ представления информации от табличного. График используется также для определения эмпирической зависимости между двумя величинами.

При построении графиков чаще всего используют декартову (прямоугольную) или полярную (точка на плоскости определяется длиной радиуса-вектора и углом его наклона к горизонтальной оси) системы координат. Графики строят, как правило, на *миллиметровой бумаге*. Пределы осей выбирают в соответствии с интервалами изменения аргумента и функции, подбирая масштаб так, чтобы наглядно представить функциональную зависимость.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с графиками, возникающими при обработке результатов физических измерений.

Пусть в результате эксперимента получены значения

$$y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n\,,$$

которые отвечают значениям аргумента $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\,.$

Обозначим погрешности измерений функции y как

$$\Delta y_1,\, \Delta y_2,\, \ldots,\, \Delta y_n.$$

На плоскости $(x,\, y)$ паре чисел $(x_i,\, y_i)$ соответствует точка. На рис. 1. соответствующие точки $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$ и т. д. отмечены символом $\bullet$. Величина погрешности Δy_i связана с длиной вертикального отрезка, соединяющего точки $(x_i,\, y_i - \Delta y_i)$ и $(x_i,\, y_i + \Delta y_i)$.

Если последовательно соединить все экспериментальные точки $(x_i,\, y_i)$ $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$, то получится ломаная линия, которая отличается от плавной теоретической кривой (см. рис. 1).

Здесь мы не рассматриваем случай, когда учитывается, что значения x_i так же измеряются с некоторыми погрешностями, так как, обычно, эти погрешности пересчитываются в погрешности y_i. Если же это по каким-то причинам не сделано, то значок • на графике сопровождается не только вертикальным, но и горизонтальным отрезком Δx_i[9].

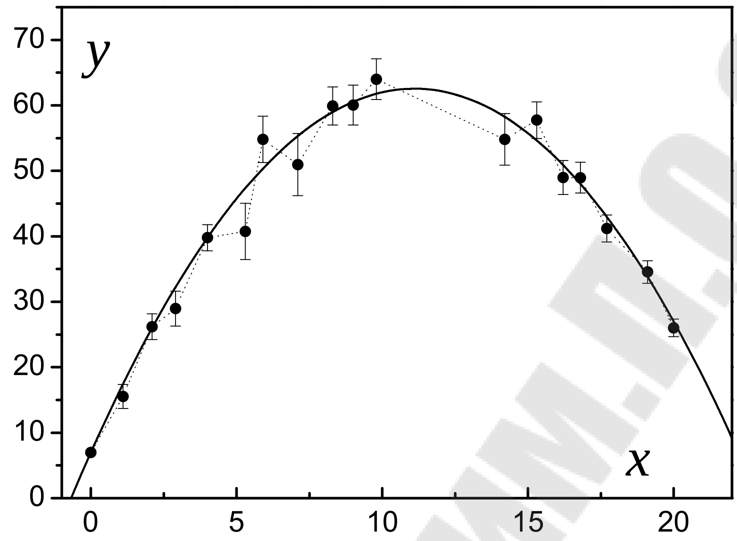

Рис. 1. Экспериментальные данные: средние значения и погрешности. Ломаная линия, обозначенная точками, соединяет экспериментальные значения. Сплошная (гладкая) линия – теоретическая кривая

Форма ломаной линии, очевидно, претерпит существенные изменения при повторных сериях испытаний, так как новые экспериментальные значения y_i будут, вообще говоря, по иному располагаться на графике в силу статистического разброса относительно кривой $y = f(x)$. Измеренные значения y_i будут в общем случае смещены относительно искомой кривой $y = f(x)$ как в сторону бóльших, так и в сторону меньших значений (см. рис. 1). Сплошная же кривая при повторных испытаниях останется стабильной.

Возникает *вопрос*: каким образом по набору экспериментальных точек провести "наилучшую" теоретическую кривую? Ответ на этот вопрос дают теория вероятностей и математическая статистика. Одним из способов проведения оптимальным образом теоретической кривой по набору данных (x_i, y_i) является использование *метода наи-*

[9] В этом случае центральное значение (x_i, y_i), изображаемое символом •, оказывается центром некоторого "креста" $+$.

меньших квадратов.

При формулировке метода наименьших квадратов предполагается, что измерения значений y_i были выполнены независимо и разброс точек y_i относительно теоретической кривой подчиняется нормальному закону распределения (см. Приложение А).

Пусть теоретическая зависимость y от x определяется функцией

$$y = f(x;\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m), \tag{1.26}$$

где параметры a_k $(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m)$ подлежат определению из условия наилучшего соответствия теоретической кривой (1.26) набору экспериментальных точек $(x_i,\, y_i)$. В качестве критерия такого 'наилучшего соответствия' принимается *условие*, согласно которому сумма квадратов отклонений теоретических значений от экспериментальных значений была бы минимальной. Графически это требование означает, что экспериментальные точки y_i находятся по обе стороны от теоретической кривой и располагаются как можно ближе к ней. Математически, в соответствии с методом наименьших квадратов, параметры a_k определяются из условия минимума выражения

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[\, y_i - f(x_i; \{a_k\})\, \right]^2 . \tag{1.27}$$

Следовательно, значения параметров a_k определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0\,, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m.$$

Подставляя сюда выражение (1.27), получаем систему алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\, y_i - f(x_i; \{a_k\})\, \right] \frac{\partial f(x_i; \{a_k\})}{\partial a_k} \right\} = 0, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m\,, \tag{1.28}$$

где m – число параметров;

n – число пар экспериментальных значений $(x_i,\, y_i)$.

Решая систему уравнений (1.28), находим искомые параметры a_k. Подставляя их значения в выражение (1.26), получаем оптимальную теоретическую кривую.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕЛА

Целью практической части пособия является приобретение навыков обработки результатов прямых и косвенных измерений на примере определения плотности тела ρ , заданной геометрической формы.

Приборы и принадлежности: измерительная линейка, штангенциркуль, лабораторные весы и набор тел различных геометрических форм.

Плотность тела (обозначается ρ) в данной точке равна пределу, к которому стремится отношение массы[10] элемента тела Δm в окрестности данной точки к объему этого элемента ΔV при стремлении этого элемента к точке:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Плотность ρ зависит от координат точки x, y и z. Если плотность во всех точках внутри объема V одинакова, то тело называется однородным и его плотность равна:

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{2.1}$$

где масса m тела, а V – его объем.

2.1. Порядок выполнения работы

1. Для конкретного тела записать формулу, выражающую зависимости плотности тела ρ от его параметров.

2. Измерить параметры, которые необходимо знать для вычисления плотности тела. При этом каждый из параметров следует измерить не менее 3-х раз.

3. Задать значение надежности α и с учетом числа измерений n по таблице найти значение коэффициента Стьюдента $t_\alpha(n)$ (см., например, табл. 3 на с. 35).

[10] Масса тела – физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая её инерционные (инертная масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства.

4. Следуя методике обработки результатов *прямых измерений*, найти средние значения измеренных величин, абсолютные и относительные погрешности (см., например, Приложение Б).

5. Провести обработку косвенных измерений: найти среднее значение плотности тела $\bar{\rho}$ и погрешности косвенных измерений: $\Delta\rho$ и ε_ρ.

Соответствующие выражения для расчетов находятся из формул (1.22)–(1.24), в которых делается замена: $Z \to \rho$.

6. Представить окончательный результат в виде: $\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho$, ε_ρ (%), и указать при этом значение надежности α.

2.2. Плотность тела в форме параллелепипеда

В качестве примера найдем плотность изображенного на рис. 2 тела, имеющего форму параллелепипеда со сторонами a, b и $c = a$ и массой m. Измеряемыми величинами в данном случае являются a, b и m. Исходное выражение для плотности тела ρ через эти величины имеет вид:

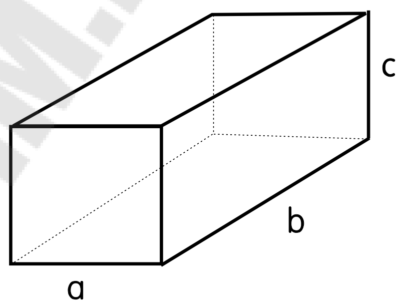

Рис. 2.

$$\rho(a, b, m) = \frac{m}{a^2 b}\,. \tag{2.2}$$

Результаты 3-х измерений для каждой из величин a, b и m представлены в табл. 2. Задавая надежность $\alpha = 0,95$, находим значение коэффициента Стьюдента для $n = 3$: $t_\alpha(n) = 4,30$.

Таблица 2

Экспериментальные значения сторон a, b и массы m

a (м)	b (м)	m (кг)
$a_1 = 2,92 \cdot 10^{-2}$	$b_1 = 2,50 \cdot 10^{-2}$	$m_1 = 0,165$
$a_2 = 2,94 \cdot 10^{-2}$	$b_2 = 2,53 \cdot 10^{-2}$	$m_2 = 0,167$
$a_3 = 2,90 \cdot 10^{-2}$	$b_3 = 2,54 \cdot 10^{-2}$	$m_3 = 0,165$

2.2.1. Обработка результатов прямых измерений

Используя приведенные в табл. 2 значения сторон a, b и массы m, проводим обработку результатов прямых измерений.

1. Вычисляем средние значения величин:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 2,92 \cdot 10^{-2}\text{ м},$$

$$\bar{b} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = 2,52 \cdot 10^{-2}\text{ м},$$

$$\bar{m} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} = 0,166\text{ кг}.$$

2. Вычисляем погрешности отдельных измерений:

$$\Delta a_1 = 0,0\text{ м} \qquad \Delta b_1 = -0,02 \cdot 10^{-2}\text{ м}, \quad \Delta m_1 = -0,001\text{ кг},$$

$$\Delta a_2 = 0,02 \cdot 10^{-2}\text{ м}, \quad \Delta b_2 = 0,01 \cdot 10^{-2}\text{ м}, \quad \Delta m_2 = 0,001\text{ кг},$$

$$\Delta a_3 = -0,02 \cdot 10^{-2}\text{ м}, \quad \Delta b_3 = 0,02 \cdot 10^{-2}\text{ м}, \quad \Delta m_3 = 0,001\text{ кг}.$$

3. Вычисляем квадраты погрешностей отдельных измерений:

$$(\Delta a_1)^2 = 0\text{ м}^2, \qquad (\Delta b_1)^2 = 4 \cdot 10^{-8}\text{ м}^2, \quad (\Delta m_1)^2 = 1 \cdot 10^{-6}\text{ кг}^2,$$

$$(\Delta a_2)^2 = 4 \cdot 10^{-8}\text{ м}^2, \quad (\Delta b_2)^2 = 1 \cdot 10^{-8}\text{ м}^2, \quad (\Delta m_2)^2 = 1 \cdot 10^{-6}\text{ кг}^2,$$

$$(\Delta a_3)^2 = 4 \cdot 10^{-8}\text{ м}^2, \quad (\Delta b_3)^2 = 4 \cdot 10^{-8}\text{ м}^2, \quad (\Delta m_3)^2 = 1 \cdot 10^{-6}\text{ кг}^2.$$

4. Вычисляем среднеквадратичные погрешности измерений:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{(\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2 + (\Delta a_3)^2}{3 \cdot 2}} = 1,15 \cdot 10^{-4}\text{ м},$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{(\Delta b_1)^2 + (\Delta b_2)^2 + (\Delta b_3)^2}{3 \cdot 2}} = 1,2 \cdot 10^{-4}\text{ м},$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{(\Delta m_1)^2 + (\Delta m_2)^2 + (\Delta m_3)^2}{3 \cdot 2}} = 7,1 \cdot 10^{-3}\text{ кг}.$$

5. Вычисляем случайные погрешности прямых измерений. Если значение коэффициента Стьюдента $t_\alpha(3) = 4,30$, то

$$\Delta a_{\text{сл}} = t_\alpha(n) \cdot \sigma_a = 4,30 \cdot 1,15 \cdot 10^{-2} \simeq 5,0 \cdot 10^{-4}\,\text{м},$$

$$\Delta b_{\text{сл}} = t_\alpha(n) \cdot \sigma_b = 4,30 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} \simeq 5,2 \cdot 10^{-4}\,\text{м},$$

$$\Delta m_{\text{сл}} = t_\alpha(n) \cdot \sigma_m = 4,30 \cdot 7,1 \cdot 10^{-2} \simeq 3,0 \cdot 10^{-3}\,\text{кг}.$$

6. Оцениваем погрешности средств измерений. Если размеры параллелепипеда определялись штангенциркулем, а масса находилась с помощью лабораторных весов, то погрешности средств измерений, соответственно, равны (см. табл. 1):

$$\Delta a_{\text{приб}} = \Delta b_{\text{приб}} = 1 \cdot 10^{-4}\ \text{м}, \quad \Delta m_{\text{приб}} = 1 \cdot 10^{-7}\ \text{кг};$$

$$\Delta a_{\text{сист}} = \Delta b_{\text{сист}} = \frac{t_\alpha}{3} \Delta a_{\text{приб}} = \frac{1,96}{3} \Delta a_{\text{приб}} = 0,7 \cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Полученные значения показывают, что

• для величин a и b случайные и систематические погрешности одного порядка, поэтому и случайные и систематические погрешности следует учитывать;

• погрешностью лабораторных весов можно пренебречь.

7. Находим значения, которые определяют границы доверительных интервалов:

$$\Delta a = \sqrt{\Delta a^2_{\text{случ}} + \Delta a^2_{\text{сист}}} \simeq 5,1 \cdot 10^{-2}\ \text{м},$$

$$\Delta b = \sqrt{\Delta b^2_{\text{случ}} + \Delta b^2_{\text{сист}}} \simeq 5,3 \cdot 10^{-2}\ \text{м},$$

$$\Delta m = \Delta m_{\text{случ}} \simeq 3,0 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}.$$

8. Рассчитываем относительные погрешности прямых измерений:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{\bar{a}} \simeq 1,7\ \%, \quad \varepsilon_b = \frac{\Delta b}{\bar{b}} \simeq 2,1\ \%, \quad \varepsilon_m = \frac{\Delta m}{\bar{m}} \simeq 1,8\ \%.$$

9. Окончательный результат прямых измерений сторон a, b и массы m параллелепипеда принимает вид:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a = (2,92 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}\,\text{м}, \quad \varepsilon_a = 1,7\,\%, \qquad (2.3)$$

$$b = \bar{b} \pm \Delta b = (2,52 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}\,\text{м}, \quad \varepsilon_d = 2,1\,\%, \qquad (2.4)$$

$$m = \bar{m} \pm \Delta m = (0,166 \pm 0,003)\,\text{кг}, \quad \varepsilon_m = 1,8\,\% \qquad (2.5)$$

для надежности $\alpha = 0,95$.

2.2.2. Обработка косвенных измерений

Используя результаты прямых измерений (2.3)–(2.5) и задаваемую выражением (2.2) связь между плотностью ρ и величинами a, b и m, проводим расчет косвенных измерений.

1. Вычисляем среднее значение плотности тела:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{a}^2\bar{b}} = \frac{0,166}{(2,92 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 2,52 \cdot 10^{-2}} = 7,73 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3. \qquad (2.6)$$

2. Используя выражение (1.23), выводим формулу для расчета погрешности $\Delta\rho$:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2 (\Delta m)^2}, \qquad (2.7)$$

где частные производные, согласно (2.2), равны:

$$\frac{\partial\rho}{\partial a} = -\frac{2\,\bar{m}}{\bar{a}^{\,3}\,\bar{b}}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial b} = -\frac{\bar{m}}{\bar{a}^{\,2}\,\bar{b}^{\,2}}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{1}{\bar{a}^{\,2}\,\bar{b}}.$$

3. Используя выражение (1.24), получаем формулу для расчета относительной погрешности ε_ρ. После упрощений искомая формула имеет вид:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} = \sqrt{(2\,\varepsilon_a)^2 + (\varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_m)^2}. \qquad (2.8)$$

Численное значение относительной погрешности ε_ρ равно:

$$\varepsilon_\rho\,(\%) = \sqrt{(2 \cdot 1,7)^2 + (2,1)^2 + (1,8)^2}\ (\cdot\,100\,\%\,) = 4,5\,(\%). \qquad (2.9)$$

4. Численное значение погрешности косвенных измерений $\Delta\rho$ может быть найдено либо из формулы (2.7), либо, воспользовавшись связью между погрешностями $\Delta\rho$ и ε_ρ, по формуле:

$$\Delta\rho = \bar{\rho} \cdot \frac{\varepsilon_\rho\,(\%)}{100\,\%}.$$

Это выражение – в данном случае второй способ расчета проще (см. Замечание ниже) – дает:

$$\Delta\rho = 7,73 \cdot \frac{4,5}{100} = 0,35 \cdot 10^3 \ (\text{кг/м}^3).$$

5. Окончательный результат косвенных измерений имеет вид:

$$\rho = (\ 7,73 \pm 0,35\ ) \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \varepsilon_\rho = 4,5\,\% \quad \text{для} \quad \alpha = 0,95\,. \quad (2.10)$$

Вычисленное значение плотности материала, из которого изготовлен параллелепипед, близко к плотности железа: $\rho_{\text{жел}} = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м^3 (см. справочные данные по физике).

Следует иметь в виду, что если в справочных данных погрешность физической величины не приведена, то эта погрешность не превышает половины единицы последней значащей цифры, которая дана в справочнике для интересующей нас величины. Например, для приведенного выше значения плотности железа погрешность равна: $\Delta\rho_{\text{жел}} = \pm\, 0,05 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Замечание. Если искомая физическая величина представима в виде произведения

$$Z = f(x, y, w, \ldots) = x^{C_1} \cdot y^{C_2} \cdot w^{C_3} \ \ldots\,,$$

где $C_1, C_2, C_3, \ldots$ являются числами, не обязательно целыми, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, то *относительная погрешность косвенных измерений*, в данном случае, выражается непосредственно через относительные погрешности прямых измерений ε_x, ε_y, ε_w и т. д.:

$$\varepsilon_Z = \sqrt{(C_1 \cdot \varepsilon_x)^2 + (C_2 \cdot \varepsilon_y)^2 + (C_3 \cdot \varepsilon_w)^2 + \ \ldots}\ ,$$

и поэтому проще сначала вычислять ε_Z, а потом уже находить погрешность $\Delta Z = \bar{Z} \cdot \varepsilon_Z$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Статистические методы обработки экспериментальных данных

А.1. Случайные величины

Измеряемое в процессе эксперимента значение физической величины и погрешность этого измерения являются случайными величинами. Случайные величины бывают двух типов – *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная случайная величина может принимать конечное или счетное множество значений. Множество значений, которые может принимать непрерывная случайная величина, несчетно.

Важной характеристикой случайной величины является *функция распределения вероятностей* $F(x)$, которая определяется как вероятность P того, что случайная величина ξ примет значение меньшее x:

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{A.1}$$

Для непрерывной случайной величины функцию распределения (А.1) можно записать в виде:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx. \tag{A.2}$$

Функция $\varphi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей*, или кратко, плотностью распределения (плотностью вероятностей, или просто, плотностью).

Из (А.1) и (А.2) следует, что вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $(a,\ b)$ определяется интегралом:

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx. \tag{A.3}$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины в интервал $(a,\ b)$ численно равна площади криволинейной трапеции с основанием $(a,\ b)$ и ограниченной сверху графиком функции $y = \varphi(x)$.

Так как $F_\xi(+\infty) = 1$, то плотность распределения нормирована на единицу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1. \tag{A.4}$$

Функция распределения $F_\xi(x)$ есть интегральная характеристика распределения вероятностей случайной величины ξ, а плотность распределения $\varphi(x)$ является локальной характеристикой.

Из (A.3) непосредственно следует, что вероятность попадания непрерывной случайной величины в точку равна нулю: $P(\xi{=}a) = 0$. Поэтому для непрерывной случайной величины имеет смысл говорить только о вероятности ее попадания в некоторый интервал. В лабораторном практикуме, как правило, следует говорить о непрерывных случайных величинах.

A.2. Нормальный закон распределения

Плотность вероятностей $\varphi(x)$ определяет закон распределения случайной величины. В теории погрешностей особую роль играет *нормальный закон распределения* (закон Гаусса).

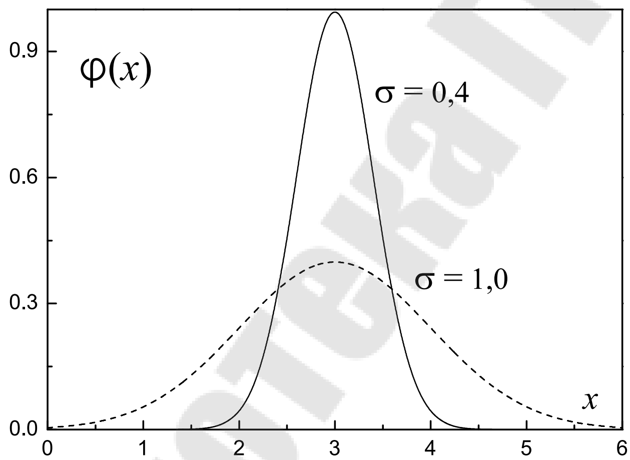

Рис. 3. Плотность распределения для нормального закона при $a = 3$, $\sigma = 0,4$ и $\sigma = 1,0$

Математическим обоснованием этого закона служит теорема Ляпунова[11], согласно которой случайная величина, являющаяся суммой большого числа независимых случайных величин, имеет распределение, близкое к нормальному распределению.

Для нормально распределенной случайной величины плотность вероятностей имеет вид:

[11] А. М. Ляпунов (1857–1918) – выдающийся математик.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(x-a)^2/2\,\sigma^2}, \tag{A.5}$$

где $\sigma > 0$ и a – любое действительное число.

Параметр a имеет смысл математического ожидания случайной величины, а σ^2 – дисперсии.

Для примера плотность распределения (A.5) при $a = 3$ и значениях $\sigma = 0,4$ и $\sigma = 1,0$ изображена на рис. 3.

Определим функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-x^2/2)\, dx, \tag{A.6}$$

которая называется *интегралом вероятностей*. Эта функция нечетная и изменяется в пределах от $-1/2$ до $1/2$. Ее график приведен на рис. 4.

Вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $(x_1,\ x_2)$ вычисляется через функцию (A.6) по формуле

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \tag{A.7}$$

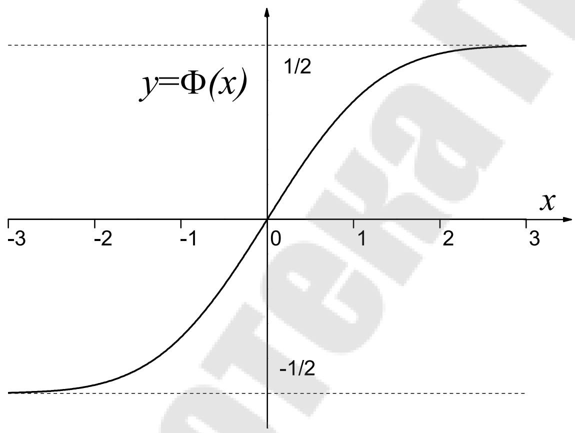

Рис. 4. График интеграла вероятностей (A.6)

Учитывая, что функция $\Phi(x)$ является нечетной, можно получить выражение

$$P(|\,\xi - a| < \delta) = 2\,\Phi\,(\,\delta/\,\sigma)\,.$$

Далее, используя таблицу значений функции $\Phi(x)$, найти, что $P(|\,\xi - a| < 3\,\sigma) = 0,99730$.

Таким образом, если случайная величина распределена по нормальному закону, то с большой вероятностью, равной $0,99730$, ее значения сосредоточены в интервале $(a - 3\,\sigma,\ a + 3\,\sigma)$. То есть значения случайной величины практически не выходят за этот интервал. Этот факт называется **правилом трех сигм**.

А.3. Доверительный интервал и надежность

Пусть для определения физической величины x выполнено n независимых измерений. Далее будем считать, что систематические погрешности и промахи отсутствуют. Возможный результат i-го измерения является случайной величиной, которую обозначим ξ_i. Таким образом, имеется n независимых случайных величин $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$. Фактически полученные результаты n измерений обозначим $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Следовательно x_i есть одно из возможных значений ξ_i. Закон больших чисел Чебышева[12], который доказывается в теории вероятностей, позволяет утверждать, что при достаточно большом числе измерений n истинное значение физической величины x близко к среднему арифметическому значению $\bar{x}$: $x \approx \bar{x}$. Среднее арифметическое $\bar{x}$ называется также *средней выборочной величиной.*

Какова точность этого приближения? Используя методы математической статистики, можно показать, что при достаточно больших n для вероятности попадания x в интервал $(\bar{x} - \delta,\ \bar{x} + \delta)$ справедлива формула:

$$P(\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta) = 2\,\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\bar{s}}\right), \tag{А.8}$$

где $\bar{s}$ называется *выборочным средним квадратичным отклонением* или среднеквадратичным отклонением

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,.$$

Интервал $(\bar{x} - \delta,\ \bar{x} + \delta)$ называют *доверительным интервалом*, величину $\bar{s}^{\,2}$ – *выборочной дисперсией*, а фигурирующую в (А.8) вероятность $\alpha = 2\,\Phi\,(\,\delta\sqrt{n}/\bar{s})$ – *надежностью.*

Расчет по формуле (А.8) обеспечивает удовлетворительную точность при $n \gtrsim 20 \div 30$. При меньшем числе измерений следует использовать выражение:

$$P\left(\bar{x} - t_\alpha(n)\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} < x < \bar{x} + t_\alpha(n)\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}\right) = \alpha\,, \tag{А.9}$$

где $t_\alpha(n)$ – коэффициент Стьюдента.

---

[12] П. А. Чебышев (1821–1894) – выдающийся математик.

Б. Схема обработки результатов прямых измерений

При обработке результатов прямых измерений рекомендуется следующий порядок выполнения операций.

1. Вычислить среднее арифметическое значение величин $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

где n – число измерений.

2. Вычислить погрешности отдельных измерений

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}.$$

3. Вычислить среднеквадратичную погрешность

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta {x_i}^2}{n\,(n-1)}}.$$

4. Задать значение надежности α и, воспользовавшись табл. 3, определить значение коэффициента Стьюдента $t_\alpha(n)$. В лабораторном практикуме обычно выбирается $\alpha = 0,95$.

5. Вычислить случайную погрешность

$$\Delta \bar{x}_{\text{сл}} = t_\alpha(n)\ \sigma_x\ .$$

6. Если величина случайной погрешности окажется сравнимой с величиной погрешности прибора, то в качестве погрешности, определяющей границы доверительного интервала, следует взять величину

$$\Delta x \ = \ \sqrt{\ (\Delta x_{\text{сл}})^2 \ + \ \left(\frac{t_\alpha}{3}\right)^2 \Delta^2_{\text{приб}}}\,,$$

где $\Delta_{\text{приб}}$ – погрешность прибора; t_α – коэффициент Стьюдента при $n = \infty$, например, $t_{\alpha=0,95}\,(n=\infty) \ = \ 1,96$.

7. Вычислить относительную погрешность

$$\varepsilon_x\ (\%) = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\ \%.$$

8. Окончательный результат записать в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x\,, \quad \varepsilon_x\ (\%)\,,$$

указав при этом с какой надежностью α проводились вычисления.

В. Схема обработки косвенных измерений

При оценке численного значения величины $Z = f(x, y, \ldots, w)$ рекомендуется следующая последовательность операций.

1. Вычислить среднее значение

$$\bar{Z} = f(\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{w})\,. \tag{В.1}$$

2. Найти выражение для расчета погрешности ΔZ:

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 (\Delta w)^2}, \tag{В.2}$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\ldots$, $\dfrac{\partial f}{\partial w}$ – *частные производные* функции f по соответствующим переменным x, y, $\ldots$, w; после дифференцирования полагается $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ и т. д.

3. Найти формулу для расчета относительной погрешности косвенных измерений:

$$\varepsilon_Z = \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} = \tag{В.3}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial |\ln f|}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial |\ln f|}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial |\ln f|}{\partial w}\right)^2 (\Delta w)^2}.$$

4. Используя полученное выражения для ΔZ, вычислить границу доверительного интервала.

5. Используя полученное выражения для ε_Z, вычислить относительную погрешность.

6. Окончательный результат косвенных измерений физической величины Z представить в виде:

$$Z = \bar{Z} \pm \Delta\bar{Z}\,, \quad \varepsilon_Z\,(\%) \quad \text{для} \ \ \alpha = \ldots \tag{В.4}$$

При непосредственных расчетах погрешностей косвенных измерений следует помнить, что подставлять значения погрешностей прямых измерений Δx, Δy, $\ldots$, Δw следует для одной и той же надежности α. Погрешность косвенного измерения также будет соответствовать этому значению надежности α.

Г. Таблица значений коэффициентов Стьюдента

В табл. 3 приведены коэффициенты Стьюдента $t_\alpha(n)$ для разных значений надежности α в зависимости от числа измерений n.

Таблица 3

Коэффициенты Стьюдента $t_\alpha(n)$

$n-1$	$\alpha = 0,900$	$\alpha = 0,950$	$\alpha = 0,990$	$\alpha = 0,999$
1	6,314	12,706	63,657	636,622
2	2,920	4,303	9,925	1,598
3	2,353	3,182	5,841	12,941
4	2,132	2,776	4,604	8,610
5	2,015	2,571	4,032	6,849
6	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,895	2,365	3,449	5,405
8	1,860	2,306	3,355	5,041
9	1,833	2,262	3,250	4,781
10	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,771	2,160	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,921	4,015
17	1,740	2,110	2,878	3,965
18	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,725	2,086	2,845	3,850
30	1,697	2,042	2,750	3,646
40	1,684	2,021	2,704	3,551
60	1,671	2,000	2,660	3,460
100	1,658	1,980	2,617	3,373
∞	1,6448	1,9600	2,5758	3,2905

Д. Контрольные вопросы

1. На какие виды делятся погрешности изменений?
2. В чем основные различия между прямыми и косвенными измерениями?
3. От чего зависит значение коэффициента Стьюдента?
4. Что такое систематическая погрешность?
5. Что определяет доверительный интервал?
6. Как рассчитываются погрешности прямых измерений?
7. Можно ли уменьшить погрешности прямых измерений?
8. Запишите трансцендентное число π с точностью $0,001\,\%$.
9. Изложите схему обработки косвенных измерений.
10. Как обрабатываются косвенные измерения, если прямые измерения каждый раз проводились не в точности в тех же самых условиях, что и в предыдущий раз?

Литература

1. Тэйлор, Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тэйлор. – Москва : Мир, 1985.

2. Зайдель, А. Н. Погрешности измерений физических величин / А. Н. Зайдель. – Ленинград : Наука, 1985.

3. Сквайрес, Дж. Практическая физика / Дж. Сквайрес. – Москва : Мир, 1971.

4. Зажигаев, Л. С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л. С. Зажигаев, А. А. Кищьян, Ю. И. Романиков. – Москва : Атомиздат, 1978.

5. Соловцов, И. Л. Теория вероятностей и математическая статистика: метод. указания / И. Л. Соловцов, Э. В. Мусафиров, А. В. Емелин. – Гомель : Изд-во ГГТУ им. П. О. Сухого, 2004.

6. Соловцова, О. П. Расчет погрешностей при измерениях: метод. указания / О. П. Соловцова. – Гомель : Изд-во ГПИ, 1992.

7. Коршунов, Е. А. Расчет погрешностей с элементами автоматизированной обработки результатов: практ. пособие / Е. А. Коршунов, А. А. Панков, К. С. Сарело. – Гомель : Изд-во ГГТУ им. П. О. Сухого, 2004.

8. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – Москва : Высшая школа, 1985.

9. Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – Москва : Наука, 1978 – 1989.

Алфавитный указатель

Учебное издание

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Пособие по курсу «Физика» для студентов всех специальностей

Автор-составитель: **Соловцова** Ольга Павловна

Редактор *Л. Ф. Теплякова*
Компьютерная верстка *М. В. Лапицкий*

Подписано в печать 15.02.07.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,16.
Изд. № 107.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр Учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0133207 от 30.04.2004 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.