УДК 62-83: 621.313.333

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ С МАЯТНИКОМ НА ВАЛУ

В.И. ЛУКОВНИКОВ, Л.В. ВЕППЕР
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

В нашей работе [1] сообщалось о перспективности построения безредукторных электроприводов колебательного движения на основе реализации мягкого реверса за счет обеспечения устойчивого автоколебательного режима работы системы «однофазный асинхронный электродвигатель – упругий элемент».

Повысить мощность и надежность такой системы с одновременным упрощением технической реализации можно за счет использования общепромышленного трехфазного асинхронного электродвигателя (АД) с обмотками, присоединенными к однофазной сети электропитания, и замены пружины маятником (дисбалансом), закрепленным на валу двигателя [2, 3].

Как следует из [1], анализ автоколебательного движения АД, даже с линейной пружиной на валу (линейная позиционная нагрузка), представляет собой серьезную теоретическую задачу. Замена же пружины маятником существенно усложняет ее, т. к. в консервативной паре «масса – упругость» появляется периодическая нелинейность, что приводит не только к особенностям бифуркаций автоколебательного движения, рассмотренных в [1], но и появлению новой бифуркации – срыву автоколебаний во вращение.

Цель работы

Создать математическое обеспечение для анализа и синтеза условий возникновения, устойчивости и бифуркаций автоколебаний в асинхронном электродвигателе с маятником на валу, как научной основы его выбора в качестве силового элемента автоколебательного электропривода.

Метод достижения цели

Опуская предварительные математические преобразования, запишем уравнение движения АД с маятником на валу в канонической форме [4]:

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = -\mu_2 sign\dot{\varphi} + (\mu_3 - \mu_1)\dot{\varphi} - \mu_4\dot{\varphi}^3 + \mu_5\dot{\varphi}^5 - \mu_6\dot{\varphi}^7, \quad (1)$$

где $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ – относительная угловая координата положения вала АД и ее первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по относительному времени;

μ_1, μ_2 – коэффициенты нагрузки жидкостным и сухим трением;

μ_3 – коэффициент электромагнитного демпфирования АД;

μ_4, μ_5, μ_6 – коэффициенты полиномиальной аппроксимации механической характеристики АД.

Представим уравнение (1) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v \,, \\ \dot{v} = -\sin\varphi - \mu_2 signv + (\mu_3 - \mu_1)v - \mu_4 v^3 + \mu_5 v^5 - \mu_6 v^7 \,. \end{cases} \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение интегральных кривых получится делением второго уравнения на первое

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{-\sin\varphi - \mu_2 Signv + (\mu_3 - \mu_1)v - \mu_4 v^3 + \mu_5 v^5 - \mu_6 v^7}{v} \,. \tag{3}$$

Анализом уравнений (2) и (3) установим условия возникновения, устойчивости и бифуркаций автоколебательного движения.

1. Условия существования равновесных состояний

Координаты точек равновесия найдем, приравняв нулю производные $\dot{\varphi}$ и $\dot{v}$, что позволит записать систему уравнений (2) в виде

$$\begin{cases} v = 0 \,, \\ -\sin\varphi - \mu_2 Signv + (\mu_3 - \mu_1)v - \mu_4 v^3 + \mu_5 v^5 - \mu_6 v^7 = 0 \,. \end{cases}$$

Анализируя полученное, можно найти, что в отличие от случая, рассмотренного в [1], здесь существует множество особых точек семейства интегральных кривых на фазовой плоскости, расположенных на оси абсцисс $O\varphi$ (v = 0), с координатами $\varphi_i = \pm i\pi$, где i = 0, 1, 2, 3,… – ряд натуральных чисел.

Следуя изложенному в [1], определим устойчивость равновесия в особых точках с помощью системы уравнений для малых отклонений переменных $\Delta\varphi$, Δv от состояния равновесия $v_o = 0$, $\varphi_{oi} = \pm i\pi$

$$\begin{cases} \Delta\dot{\varphi} = \Delta v \,, \\ \Delta\dot{v} = -\sin(\pm i\pi + \Delta\varphi) - \dfrac{2b\mu_2}{\pi}\Delta v + (\mu_3 - \mu_1)\Delta v \,, \end{cases} \tag{4}$$

где b – крутизна касательной в начале координат к функции *arctg*, аппроксимирующей функцию *Sign* и совпадающей с ней при $b \to \infty$ [1].

Поскольку для малых $\Delta\varphi$ величина

$$\sin(\pm i\pi + \Delta\varphi) \approx (-1)^i \Delta\varphi \,,$$

то корни характеристического уравнения системы (4), равные

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mu_3 - \mu_1 - \frac{2b\mu_2}{\pi}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\mu_3 - \mu_1 - \frac{2b\mu_2}{\pi}\right)^2 - (-1)^i} \,,$$

будут при $b \to \infty$ отрицательны для четных i = 0, 2, 4,… и положительны для нечетных i = 1, 3, 5,….

Значит в первом случае состояние равновесия устойчиво, а во втором – неустойчиво, что хорошо согласуется с известным из физики положением об устойчивости маятника при его остановке внизу от точки подвеса и неустойчивости при остановке вверху.

Если же сухое трение отсутствует ($\mu_2 = 0$), то при $\mu_3 > \mu_1$ все состояния равновесия неустойчивы, а при $\mu_3 < \mu_1$ – устойчивы.

2. Условия возникновения предельных циклов автоколебаний

Проинтегрируем уравнение интегральных кривых (3) для начальных условий φ_o, ν_o и запишем уравнение фазовых траекторий через параметр λ и интеграл $Q(\varphi)$, учитывающий взаимодействие сил диссипации и подпитки, в следующем виде:

$$\nu^2 - 4\left(\lambda - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = Q(\varphi), \tag{5}$$

где интеграл, учитывающий влияние сил диссипации и подпитки, равен

$$Q(\varphi) = 2 \cdot \int_{\varphi_o}^{\varphi} [-\mu_2 Sign\,\nu + (\mu_3 - \mu_1)\nu - \mu_4\nu^3 + \mu_5\nu^5 - \mu_6\nu^7]d\varphi .$$

В установившемся режиме силы подпитки и диссипации компенсируют друг друга, тогда $Q(\varphi) = 0$ и уравнение (5) сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} \nu^2 = 4\left(\lambda - \sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right), \\ \displaystyle\int_{\varphi_o}^{\varphi} [-\mu_2 Sign\,\nu + (\mu_3 - \mu_1)\nu - \mu_4\nu^3 + \mu_5\nu^5 - \mu_6\nu^7]\,d\varphi = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Первое уравнение описывает известную фазовую траекторию свободного движения маятника, исследованного, например, в работах [5, 6].

Его параметр $\lambda = \frac{1}{4}\nu_o^2 + \sin^2\frac{\varphi_o}{2}$ является бифуркационным (лимитационным), разделяющим вращательное ($\lambda > 1$), колебательное ($\lambda < 1$) и равновесное ($\lambda = 0$ или $\varphi_o = \nu_o = 0$) свободные движения маятника.

Анализ выражения для λ показывает, что даже при предельном начальном отклонении маятника $\varphi_o = \pm\pi$ вращение не возникает, если нет толчка с начальной скоростью ($\nu_o = 0$), т. к. не выполняется неравенство $\lambda > 1$.

При отсутствии же начального отклонения ($\varphi_o = 0$) всегда возникает вращение, если $|\nu_o| > 4$. Знак ν_o определяет направление вращения или колебания (по часовой стрелке или против).

Уравнение сепаратрисы, разделяющей на фазовой плоскости вращательный и колебательный режимы движения маятника, найдем для $\lambda = 1$ в виде

$$\nu = 2\cos\frac{\varphi}{2}. \tag{7}$$

Варианты фазовых траекторий, рассчитанных по первому уравнению системы (6) и уравнению (7), представлены на рис. 1. Они же справедливы и для установившегося движения АД с маятником на валу, нагруженного диссипативными силами, при условии их компенсации активным электромагнитным усилием «подкачки», когда выполняется второе уравнение системы (6).

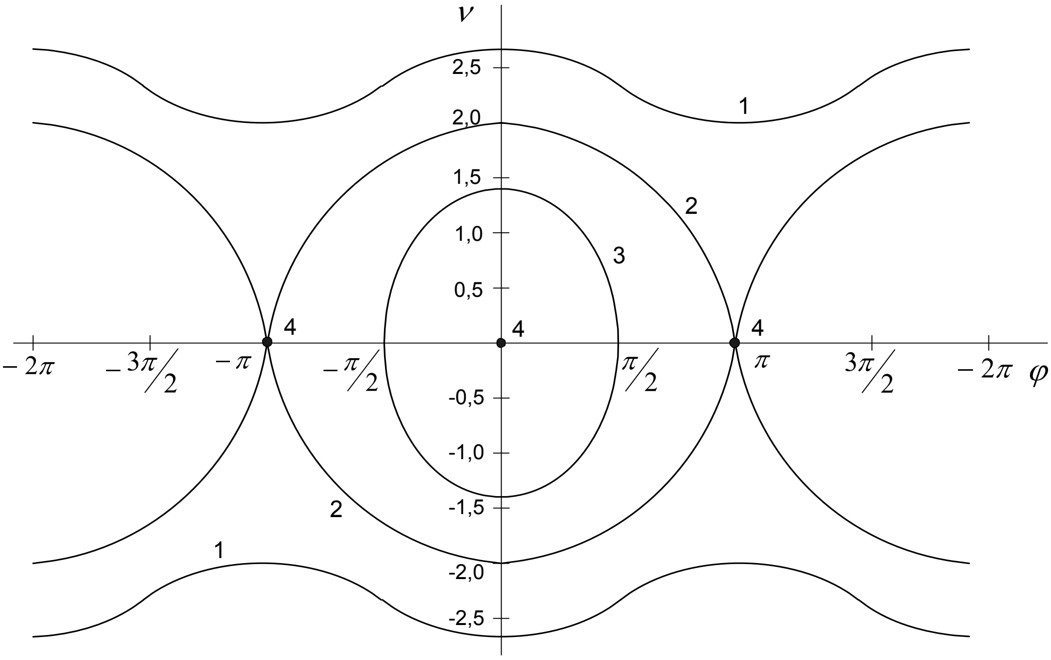


Рис. 1. Фазовые траектории установившегося движения АД с маятником на валу при скомпенсированной нагрузке: 1 – вращение при $\lambda = 2$; 2 – сепаратриса при $\lambda = 1$; 3 – колебания при $\lambda = 0{,}5$; 4 – равновесные состояния при $\lambda = 0$

Это уравнение по существу описывает условия возникновения предельных циклов автоколебаний и позволяет установить взаимосвязь между начальными условиями пуска (φ_o, ν_o), нагрузкой (μ_1, μ_2), параметрами АД и его электропитания (μ_4, μ_5, μ_6), определяющую существование этих циклов.

В работе [5] показано, что уравнение свободного движения маятника имеет точное установившееся решение, записываемое с помощью эллиптических функций Якоби.

Анализ гармонического состава, проделанный в работе [6], позволил установить, что в диапазоне амплитуд колебаний от 15 до 90° относительная величина амплитуды первой гармоники изменяется от 0,9996 до 0,985, что позволяет в рассматриваемом случае с высокой степенью точности считать закон установившихся автоколебаний маятника гармоническим с амплитудой $\varphi_m = 2\sqrt{\lambda}$ и начальной фазой $\tau_o = -arctg(\varphi_o / \nu_o)$, то есть

$$\begin{cases} \varphi \approx 2\sqrt{\lambda}\sin\left(\tau + arctg\dfrac{\varphi_o}{\nu_o}\right), \\ \nu \approx 2\sqrt{\lambda}\cos\left(\tau + arctg\dfrac{\varphi_o}{\nu_o}\right). \end{cases} \quad (8)$$

Интеграл $Q(\varphi)$ будет равен нулю, поскольку при компенсации сил диссипации и подпитки будет равна нулю подынтегральная функция

$$-\mu_2 Sign\,\nu + (\mu_3 - \mu_1)\nu - \mu_4\nu^3 + \mu_5\nu^5 - \mu_6\nu^7 = 0. \quad (9)$$

Прямой подстановкой (8) в (9), используя гармонический баланс по первой гармонике, найдем уравнение существования предельных циклов автоколебаний в виде

$$-\frac{4}{\pi}\mu_2+(\mu_3-\mu_1)-3\lambda\mu_4+10\lambda^2\mu_5-35\lambda^3\mu_6=0. \qquad (10)$$

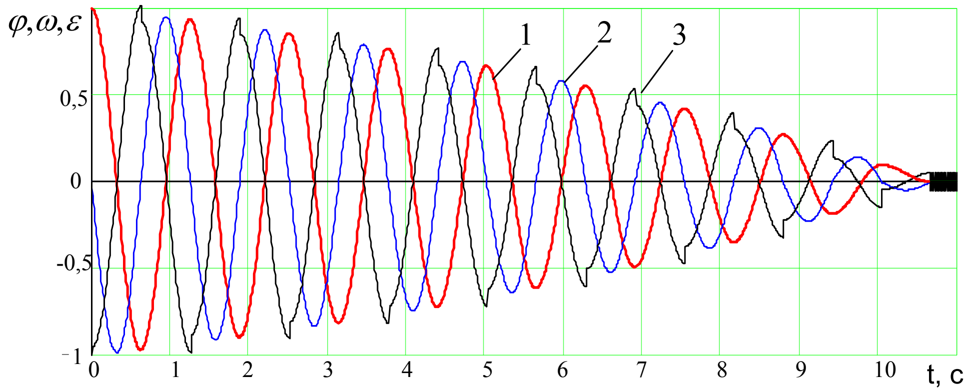
Поскольку $\varphi_m=2\sqrt{\lambda}$, то уравнение (10) представляет собой уравнение радиусов предельных циклов.

С помощью подходов, использованных нами в работе [1], можно по нему построить бифуркационную диаграмму, а также показать, что предельные циклы существуют только при положительных корнях, причем большим корням соответствуют устойчивые, а меньшим – неустойчивые циклы.

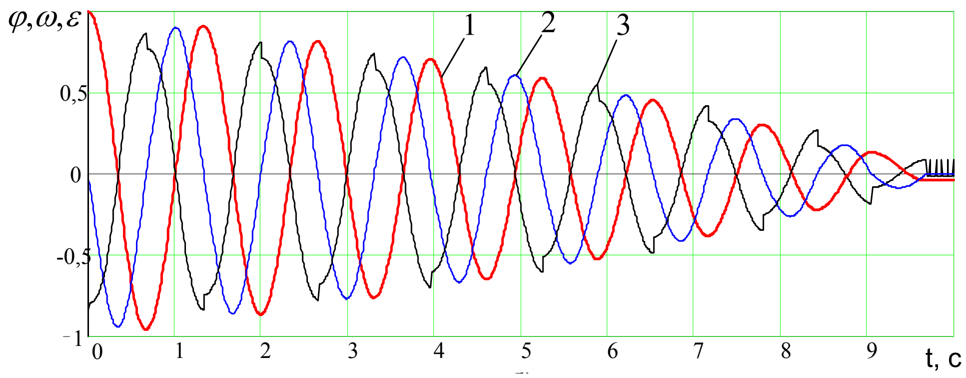
Отметим, что расчет фазовых траекторий неустойчивых автоколебаний следует производить непосредственно по уравнению (5), а временных диаграмм – по уравнению (1).

При автоколебаниях нагруженного маятника с амплитудой $\varphi_m\le\pi$, фазовые траектории его движения очень близки к траекториям автоколебаний нагруженной пружины [1], хотя законы колебаний достаточно хорошо совпадают только для $\varphi_m\le\frac{\pi}{2}$.

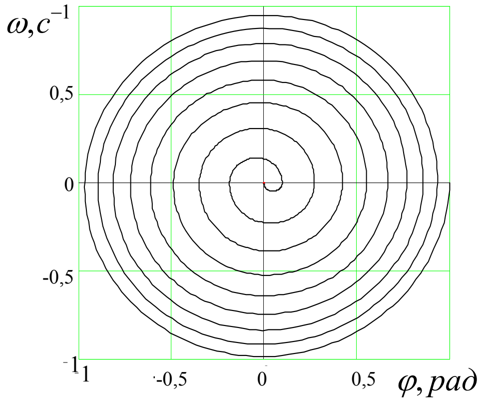
Сказанное, в частности, подтверждает рис. 2, где представлены фазовые траектории и временные диаграммы автоколебаний для неустойчивых предельных циклов, рассчитанные по полученным здесь и в [1] соотношениям.



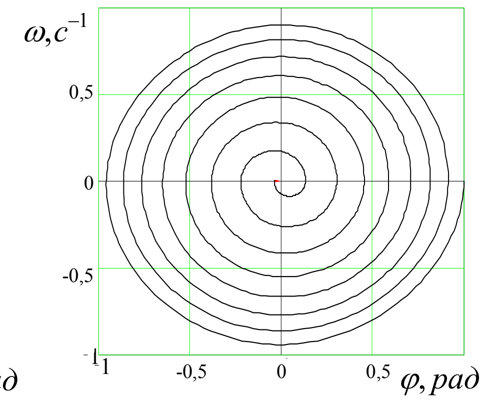
а)



б)



в)



г)

Рис. 2. Временные диаграммы (а, б) угла φ (1), скорости ω (2), ускорения ε (3) и фазовые траектории (в, г) неустойчивого предельного цикла автоколебаний АД с пружинной (а, в) и маятниковой (б, г) упругостью для $C_У = 80$ Нм, $M_{трУ} = 4$ Нм, $J_У = 3{,}2$ кг $\cdot$ м^2, $\varphi_o = 1$ рад

3. Условия возникновения вращательного движения

Исследование движения АД с маятником на валу при скомпенсированной нагрузке показало, что в установившемся режиме в нем возникает бифуркация автоколебательного режима во вращательное (рис. 1, кривая 1).

Соответствующее этому первое уравнение системы (6) было исследовано в работе [5] для случая круговращения маятника.

Выяснилось, что точное аналитическое выражение угловой скорости маятника можно записать с помощью эллиптических функций Якоби. Если пуск во вращение производится только с помощью толчка ($\varphi_o = 0$, $\nu_o \neq 0$), то для $\nu_o >> 2$ это выражение в принятых в данной статье обозначениях можно для среднего значения скорости приближенно записать как

$$\nu_{ср} = \frac{\nu_0}{1 + \nu_0^{-2} + \nu_0^{-4} + \ldots} \approx \nu_0.$$

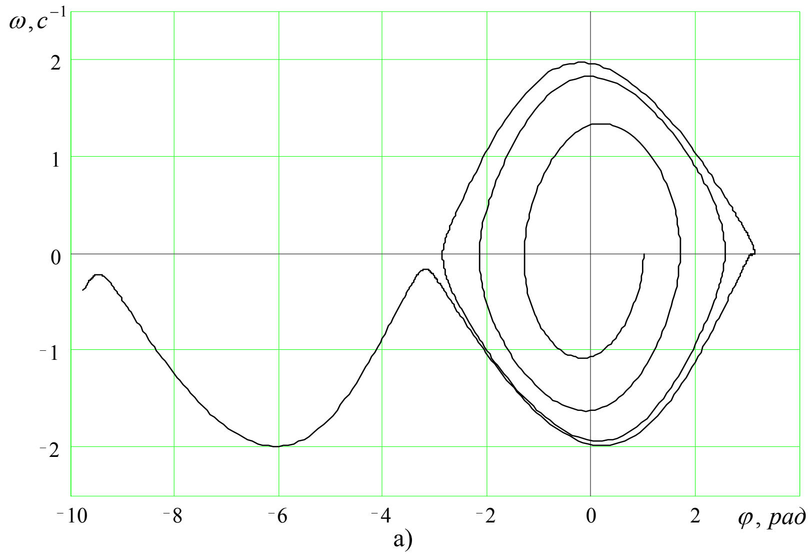
Теперь прямой подстановкой ν_0 в уравнение (9) можно найти условие существования вращательного движения в виде

$$-\mu_2 + (\mu_3 - \mu_1)\nu_0 - \mu_4 \nu_0^{\,3} + \mu_5 \nu_0^{\,5} - \mu_6 \nu_0^{\,7} = 0. \tag{11}$$

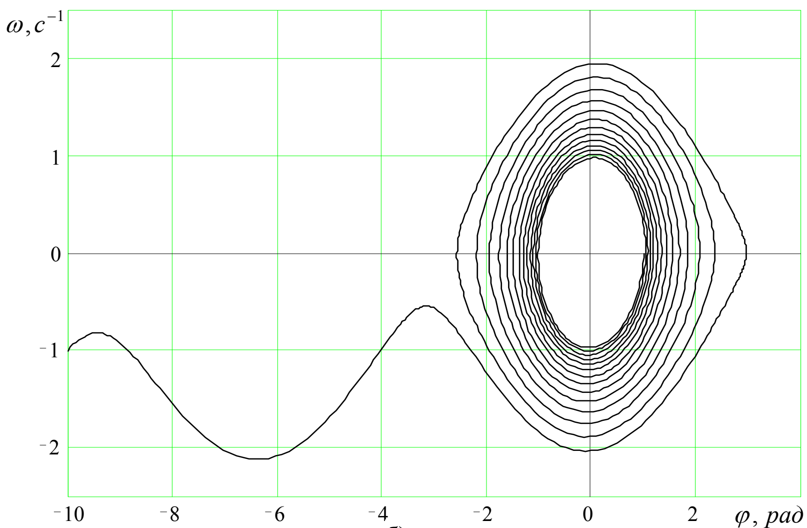
Вращательное движение АД с маятником на валу существует только при положительных корнях этого уравнения, причем для больших корней оно устойчиво, а для меньших – неустойчиво.

Расчет фазовых траекторий и временных диаграмм неустойчивого вращательного движения следует производить непосредственно по уравнениям (5) и (1).

На рис. 3 представлены рассчитанные по полученным соотношениям фазовые траектории, иллюстрирующие срыв автоколебаний во вращение.



а)



б)

Рис. 3. Фазовые траектории срыва автоколебаний во вращение АД с маятником на валу: а) $C_У = 20$ Нм, $M_{трУ} = 1{,}95$ Нм, $J_У = 0{,}3$ кг $\cdot$ м^2, $\varphi_o = 1$ рад; б) $C_У = 80$ Нм, $M_{трУ} = 2{,}0$ Нм, $J_У = 3{,}2$ кг $\cdot$ м^2, $\varphi_o = 1$ рад

Заключение

Проведенное исследование показало, что в автоколебательном движении АД с маятником на валу имеется несколько устойчивых и неустойчивых положений равновесия с координатами $\varphi_{0i} = \pm i\pi$, $\nu = 0$; существуют устойчивые и неустойчивые предельные циклы автоколебаний, определяемые уравнением (10); возникает срыв автоколебаний во вращение, если при нулевом начальном отклонении маятника ($\varphi_0 = 0$) начальный толчок дает скорость $\nu_0 \geq 2\sqrt{\lambda - 1}$; существует устойчивое и неустойчивое вращательное движение, определяемое уравнением (11).

Полученные аналитические связи и уравнения представляют собой теоретическую основу инженерной методики выбора АД с маятником на валу в качестве силового элемента автоколебательного электропривода.

Предполагается опубликовать эту методику в последующих номерах настоящего журнала.

Список литературы

1. Луковников В.И., Веппер Л.В. Исследование автоколебательного движения однофазного асинхронного электродвигателя с линейной пружиной на валу //Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2001. – № 2. – С. 33-42.
2. Веппер Л.В. Однотиристорный автоколебательный маятниковый асинхронный электропривод //Современные проблемы машиноведения: Материалы международ. науч.-техн. конф., посвящ. П.О. Сухому. – Гомель: ГПИ. – 1998. – Т. 2. – С. 69-72.
3. Луковников В.И., Веппер Л.В. Автоколебательный асинхронный электропривод //Энергосбережение. Электроснабжение. Автоматизация: Материалы МНТК – Гомель: Учреждение образования «ГГТУ им. П.О. Сухого». – 2001. – С. 94-96.
4. Веппер Л.В. Автоколебательные режимы однофазного асинхронного электродвигателя: Автореф. дис. … канд. техн. наук /Гомель: Учреждение образования «ГГТУ им. П.О. Сухого», 2001. – 21 с.
5. Лойцянский Н.Г., Нурье А.И. Курс теоретической механики. – Т 2: Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
6. Иориш Ю.И. Виброметрия. – М.: ГНТИ Машиздат, 1963. – 771 с.

Получено 04.01.2002 г.