УДК 62-83: 621.313.333

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ «АСИНХРОННЫЙ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЬ – УПРУГИЙ ЭЛЕМЕНТ»

В.И. ЛУКОВНИКОВ, Ю.А. РУДЧЕНКО

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

Эффективность применения безредукторного электропривода возвратно-вращательного (колебательного) движения с мягким реверсом обусловлена тем, что он позволяет не только уменьшить металлоемкость и исключить электромеханические удары в рабочей машине, но и осуществить плавное оперативное регулирование частоты и амплитуды колебаний, облегчить интеграцию привода с рабочим инструментом, повысить динамические и энергетические показатели, а значит, в целом повысить производительность рабочей машины и качество выпускаемой продукции.

В ряде областей науки, техники и производства, где используется колебательное движение рабочего органа машины без повышенных требований к качеству колебаний, очень перспективным оказывается применение автоколебательных режимов работы электродвигателей. Это, например, испытательные стенды пружинных подвесок и других упругих элементов, дисбалансные вибраторы, станки-качалки, аппараты спортивной вибростимуляции, игрушки, рекламные качающиеся устройства и т. д.

Известно исследование автоколебательной электромеханической системы «однофазный асинхронный электродвигатель – упругий элемент» [1]. Но подобный режим может возникнуть и при использовании трехфазного асинхронного электродвигателя, что было показано, например, в работах [2, 3].

Цель работы

Цель работы заключается в анализе условий возникновения, устойчивости и бифуркаций автоколебаний в однофазном и трехфазном электродвигателе с упругостью на валу, для его дальнейшего выбора в качестве силового элемента автоколебательной электромеханической системы.

Метод решения

Традиционными методами исследования установившегося движения автоколебательных систем являются методы малого параметра, Ван дер Поля, Галеркина-Бубнова, гармонического баланса.

В данной статье будет использован оригинальный авторский метод, основанный на идее компенсации в установившемся режиме диссипативных сил нагрузки электромагнитными силами подпитки автоколебаний от асинхронного электродвигателя (АД).

Основы метода компенсации

В общем виде дифференциальное уравнение движения нагруженного асинхронного электродвигателя можно записать следующим образом:

$$\ddot{\varphi} + f_1(\dot{\varphi}) - f_2(\dot{\varphi}) + \varphi + \delta_1 - \delta_2 = 0, \quad (1)$$

где $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ – относительная угловая координата положения вала АД и ее первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по относительному времени.

Слагаемые $\ddot{\varphi}$ и φ описывают в относительных переменных консервативную пару «момент инерции – упругость»; функции $f_1(\dot{\varphi})$ и $f_2(\dot{\varphi})$ определяют диссипативные силы нагрузки и электромагнитные силы подпитки от АД; величины δ_1 и δ_2 учитывают постоянные, не зависящие от времени и координаты, усилия нагрузки и электромагнитного пускового момента АД.

С целью реализации метода компенсации, введем новую переменную

$$\psi = \varphi + \varphi_0, \quad (2)$$

где φ_0 – некоторая постоянная угловая координата.

Так как установившееся автоколебательное движение происходит по периодическому закону, то подстановкой (2) в (1) найдем координату

$$\varphi_0 = \delta_1 - \delta_2,$$

определяющую величину постоянного смещения (поджатия) пружины, относительно которого и происходят автоколебания.

Теперь представим уравнение (1) в виде, когда слагаемые, определяющие консервативную пару, записываются слева

$$\ddot{\psi} + \psi = f_2(\dot{\psi}) - f_1(\dot{\psi}). \quad (3)$$

При полной компенсации $f_2(\dot{\psi}) - f_1(\dot{\psi}) = 0$ и тогда вместо уравнения (4) можно исследовать систему двух уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\psi} + \psi = 0, \\ f_2(\dot{\psi}) - f_1(\dot{\psi}) = 0. \end{cases}$$

Эта система избыточна, поскольку для нахождения одного общего неизвестного периодического решения имеется два уравнения.

В то же время такая избыточность очень полезна при определении взаимосвязи параметров пуска АД, электропитания и нагрузки, определяющей возникновение и устойчивость предельных циклов автоколебаний.

Такая связь легко устанавливается приравниванием отдельно найденных решений обоих уравнений.

Предлагаемый подход к определению на основе идеи компенсации установившегося периодического решения уравнения (1) не рекомендуется для общего применения. Он дает хорошие результаты в случае, когда $f_1(\dot{\varphi})$ и $f_2(\dot{\varphi})$ являются нечетными функциями, поскольку тогда, как следует из метода гармонического баланса, невязка $\xi(t) = f_1(\dot{\psi}) - f_2(\dot{\psi})$ наиболее близка к нулю. Если же дополнительно известно, что закон автоколебаний почти гармонический, то использование метода компенсации дает результаты, точно совпадающие с полученными классическими методами.

Анализ обобщенного уравнения автоколебательного движения АД

Будем исследовать автоколебательное движение АД для наиболее распространенного случая его нагрузки жидкостным и сухим трением.

В этом случае $\delta_1 = 0$, а уравнение для сил диссипации можно записать в общепринятом виде [1]:

$$f_1(\dot{\varphi}) = \mu_1 \dot{\varphi} + \mu_2 Sign\, \dot{\varphi}.$$

Тогда, ограничиваясь в аналитической аппроксимации обобщенной механической характеристики $f_2(\dot{\varphi})$ для однофазного и трехфазного асинхронных электродвигателей членами степенного ряда со степенями не выше третьей, представим уравнение (1) в виде

$$\ddot{\varphi} + (\mu_1 \dot{\varphi} + \mu_2 Sign\, \dot{\varphi}) - (\mu_3 + \mu_4 \dot{\varphi} + \mu_5 \dot{\varphi}^2 - \mu_6 \dot{\varphi}^3) + \varphi = 0, \tag{4}$$

где μ_1, μ_2 – коэффициенты нагрузки жидким и сухим трением;

μ_3, μ_4, μ_5, μ_6 – коэффициенты полиномиальной аппроксимации механических характеристик АД.

Поскольку в левой части уравнения (4) имеются постоянная составляющая (μ_3) и квадратичная зависимость ($\mu_5\ \dot{\varphi}^2$), то получится автоколебательное движение со смещением нейтрали колебаний. Далее будем ограничиваться в этом движении нулевой и первой гармоническими составляющими и в связи с этим запишем слагаемое

$\mu_5 \varphi^2 = \mu_5 \cos^2 \tau = \mu_5(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\tau) \approx \frac{1}{2}\mu_5$, и преобразуем уравнение (4) к виду

$$\ddot{\varphi} + \varphi = (\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_5) - \mu_2 Sign\, \dot{\varphi} + (\mu_4 - \mu_1)\dot{\varphi} - \mu_6 \dot{\varphi}^3. \tag{5}$$

Представим уравнение (5) сначала в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \nu, \\ \dot{\nu} = (\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_5) - \varphi - \mu_2 Sign\, \nu + (\mu_4 - \mu_1)\nu - \mu_6 \nu^3, \end{cases}$$

а затем делением второго уравнения на первое в виде дифференциального уравнения интегральных кривых

$$\frac{d\nu}{d\varphi} = \frac{1}{\nu}[(\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_5) - \varphi - \mu_2 Sign\, \nu + (\mu_4 - \mu_1)\nu - \mu_6 \nu^3]. \tag{6}$$

Проинтегрируем (6) для начальных условий φ_0, ν_0

$$\int_{\nu_0}^{\nu} \nu\, d\nu = \int_{\varphi_0}^{\varphi} [(\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_5) - \varphi - \mu_2 Sign\, \nu + (\mu_4 - \mu_1)\nu - \mu_6 \nu^3]\, d\varphi$$

и получим

$$(\nu^2-\nu_0^2)+(\varphi^2-\varphi_0^2)-2(\mu_3+\frac{1}{2}\mu_5)\cdot(\varphi-\varphi_0)=\Omega(\varphi)\,, \tag{7}$$

где интеграл, учитывающий влияние сил диссипации и подпитки равен

$$\Omega(\varphi)=2\int_{\varphi_0}^{\varphi}[-\mu_2 Sign\,\nu+(\mu_4-\mu_1)\nu-\mu_6\nu^3]\,d\varphi\,.$$

В установившемся режиме силы подпитки и диссипации компенсируют друг друга, тогда $\Omega(\varphi)=0$ и уравнение (7) сводится к системе уравнений

$$\begin{cases}(\nu^2-\nu_0^2)+(\varphi^2-\varphi_0^2)-2(\mu_3+\frac{1}{2}\mu_5)\cdot(\varphi-\varphi_0)=0,\\ \int_{\varphi_0}^{\varphi}[-\mu_2 Sign\,\nu+(\mu_4-\mu_1)\nu-\mu_6\nu^3]\,d\varphi,=0.\end{cases} \tag{8}$$

Первое уравнение описывает фазовые траектории свободного движения подпружиненной системы, представляющие собой окружности со смещенным центром в точку с координатами $\nu_ц=0$, $\varphi_ц=\mu_3+\frac{1}{2}\mu_5$ и радиусом

$$\nu_m=\varphi_m=\sqrt{\nu_0^2+[\varphi_0-(\mu_3+\frac{1}{2}\mu_5)]^2}\,.$$

Это уравнение по существу описывает условия возникновения предельных циклов автоколебаний и позволяет установить взаимосвязь между начальными условиями пуска (φ_0, ν_0), нагрузкой (μ_1, μ_2), параметрами АД и его электропитания (μ_3, μ_4, μ_5, μ_6), определяющую существование этих циклов.

Из фазовой траектории следует, что закон автоколебаний имеет вид:

$$\varphi=(\mu_3+\frac{1}{2}\mu_5)+\varphi_m Sin(\tau+\alpha)\,, \tag{9}$$

где $\alpha=arctg\dfrac{\varphi_0}{\nu_0}$.

Интеграл $\Omega(\varphi)$ будет равен нулю, поскольку при компенсации сил диссипации силами подпитки будет равна нулю подынтегральная функция.

Прямой подстановкой (9) в подынтегральную функцию (8) получим

$$-\mu_2 Sign\,[\varphi_m\cos(\tau+\alpha)]+(\mu_4-\mu_1)\varphi_m\cos(\tau+\alpha)-\mu_6\varphi_m^3\cos^3(\tau+\alpha)=0.$$

В соответствии с идеей метода гармонического баланса произведем разложение слагаемых уравнения в ряд Фурье, отбросим все гармонические составляющие кроме первой и по ее амплитуде найдем, что

$$-\frac{4}{\pi}\mu_2+(\mu_4-\mu_1)\varphi_m-\frac{3}{4}\mu_6\,\varphi_m{}^3=0\,. \tag{10}$$

Преобразуем уравнение (10) к виду

$$\varphi_m^3 - \frac{4(\mu_4 - \mu_1)}{3\mu_6}\varphi_m + \frac{16\mu_2}{3\pi\mu_6} = 0 .$$

Обозначим через $\lambda_1 = (\mu_4 - \mu_1)/\mu_6$, $\lambda_2 = \mu_2/\mu_6$ – частные бифуркационные параметры, введем новую переменную

$$\rho = \varphi_m \cdot \sqrt[3]{3\pi/16\lambda_2}$$

и после преобразования получим

$$\rho^3 - \beta\rho + 1 = 0, \qquad (11)$$

где $\beta = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{12}} \cdot \frac{\lambda_1}{\sqrt[3]{\lambda_2^2}}$ – обобщенный бифуркационный параметр.

Анализом полученного кубического алгебраического уравнения можно получить, что при $\beta < 3/\sqrt[3]{4}$ корни уравнения (11) отрицательные и комплексные, что говорит об отсутствии предельных циклов автоколебаний.

При $\beta \geq 3/\sqrt[3]{4}$ имеются один отрицательный и два положительных корня, равных

$$\rho_{1,2} = 2\sqrt{\beta/3} \cdot cos(60^\circ \mp \varphi/3), \qquad (12)$$

где $\varphi = \arccos\left(0{,}5\sqrt{(3/\beta)^3}\right)$.

Эти корни дают предельные циклы автоколебаний на фазовой плоскости, устойчивость которых можно определить по условию, полученному в [1],

$$\rho^3 - 0{,}5\beta\rho + 0{,}25 > 0 . \qquad (13)$$

Прямой подстановкой (12) в (13) можно убедиться, что устойчивыми являются предельные циклы для больших (ρ_1) и неустойчивыми для меньших (ρ_2) радиусов.

При $\beta < 3/\sqrt[3]{4}$ эти циклы сливаются в один и дают полуустойчивый цикл с радиусом $\rho_1 = \rho_2 = 1/\sqrt[3]{2}$.

Заключение

Итак, проведенный анализ уравнения (4) дает возможность построить фазовые траектории движения системы «трехфазный или однофазный АД – линейная пружина» и определить бифуркационные диаграммы. Их совокупность позволяет получить критериальные уравнения, определяющие условия возникновения устойчивых и неустойчивых автоколебаний, что является научной основой построения инженерной методики проектирования автоколебательного асинхронного электропривода.

Преимущество используемой нами идеи компенсации при решении уравнения движения перед общеизвестным методом Ван дер Поля, который по нашей проверке дает идентичный результат, заключается в том, что в критериальные соотношения удается ввести кроме уравнений связи параметров нагрузки, АД и его электропитания еще и начальные условия пуска (9), которые существенно влияют на получение устойчивого автоколебательного режима.

Список литературы

1. Луковников В.И., Веппер Л.В. Исследование автоколебательного движения однофазного асинхронного электродвигателя с линейной пружиной на валу //Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2001. – № 2. – С. 33-42.
2. Луковников В.И., Рудченко Ю.А. Анализ уравнения автоколебательного движения асинхронного электродвигателя методом компенсации //Тез. докл. МНТК «Современные проблемы машиноведения». – Гомель: Учреждение образования «ГГТУ им. П.О. Сухого», 2002. – С. 108.
3. Рудченко Ю.А. Анализ обобщенного уравнения автоколебательного движения асинхронного электродвигателя //Сборник материалов международной межвузовской НТК студентов, аспирантов и магистрантов (25-26 апреля 2002 г.). – Гомель: Учреждение образования «ГГТУ им. П.О. Сухого», 2002. – С. 115-117.

Получено 25.09.2002 г.