Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П.О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИКУМ
по курсам «Математика»
и «Высшая математика»
для студентов заочной формы обучения

Гомель 2006

УДК 512+514.12(075.8)
ББК 22.14;22.151.5я73
А45

*Рекомендовано научно-методическим советом
заочного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 1 от 23.09.2005 г.)*

Авторы-составители: *Л. Л. Великович, В. И. Лашкевич, М. В. Задорожнюк*

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого *С. Л. Авакян*

А45 **Алгебра** и аналитическая геометрия : практикум по курсам «Математика» и «Высшая математика» для студентов заоч. формы обучения / авт.-сост.: Л. Л. Великович, В. И. Лашкевич, М. В. Задорожнюк. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2006. – 26 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://gstu.local/lib. – Загл. с титул. экрана.

Практикум содержит 32 варианта задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. Подробно разобраны все типы задач, предложенных в практикуме, что поможет студентам усвоить данный материал.

Для студентов заочной формы обучения.

УДК 512+514.12(075.8)
ББК 22.14;22.151.5я73

Задание 1. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A.

1. $f(x) = x^2 - x + 5;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$

2. $f(x) = 2x^2 - 3x - 1;\ A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix};$

3. $f(x) = 3x^2 + 2x - 7;\ A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$

4. $f(x) = -x^2 + 4x - 8;\ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$

5. $f(x) = 2x^2 - x + 6;\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix};$

6. $f(x) = -x^2 + 3x + 3;\ A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$

7. $f(x) = x^3 - 2x;\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$

8. $f(x) = 4x^2 - 5x + 1;\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$

9. $f(x) = -2x^2 + 2x + 3;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$

10. $f(x) = 5x^2 - x + 1;\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$

11. $f(x) = -4x^2 + 3x - 3;\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

12. $f(x) = 2x^2 - 5x + 4;\ A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix};$

13. $f(x) = 3x^2 + 3x - 7;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

14. $f(x) = -x^2 - 5x + 3;\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$

15. $f(x) = x^3 + 4;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$

16. $f(x) = 2x^2 + 2x + 4;\ A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$

17. $f(x) = -2x^2 + x + 1;\ A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$

18. $f(x) = -x^2 + 3x + 7;\ A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$

19. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix};$

20. $f(x) = 3x^2 + x - 2;\ A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix};$

21. $f(x) = -2x^2 + 4x + 1;\ A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix};$

22. $f(x) = -3x^2 + 3x + 4;\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix};$

23. $f(x) = -3x^2 - x + 6;\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix};$

24. $f(x) = 3x^2 + 3x + 5;\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix};$

25. $f(x) = 2x^2 + 4x - 7;\ A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix};$

26. $f(x) = -2x^2 - 6x + 5;\ A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$

27. $f(x) = 3x^2 - 2x + 6;\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$

28. $f(x) = 2x^2 + 6x - 8;\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix};$

29. $f(x) = -4x^2 + 3x + 3;\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$

30. $f(x) = x^2 + 6x - 2;\ A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix};$

31. $f(x) = 3x^2 + x - 1;\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$

32. $f(x) = -x^2 + 3x + 2;\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$

Задание 2. Решить систему уравнений матричным методом, с помощью правила Крамера и методом Гаусса.

1. $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ -6x_2 + 5x_3 = -9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 9 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = -8 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ -5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 7 \\ -5x_1 + x_2 - 6x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = -3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 - x_3 = -6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 - 6x_2 + x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = -9 \\ -5x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 9 \\ 4x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -9 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7 \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 6 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ -6x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 6x_3 = 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = -4 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 6 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -9 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Задание 3. Даны векторы $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\overline{c}(c_1, c_2, c_3)$, $\overline{d}(d_1, d_2, d_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$
1	3, 3, 1	4, 2, 3	6, 6, 1	3, -3, 10
2	4, -1, 3	6, 2, 5	6, 6, 6	6, 6, 6
3	4, -1, 2	-5, 6, 1	0, 1, 6	0, 1, 6
4	5, 3, 1	4, 2, 1	-6, -6, -2	4, 4, 2
5	2, 1, -6	4, 2, 6	-5, -2, 5	4, 6, 4
6	2, 4, 1	0, 5, 3	-1, -6, -1	3, 10, 2
7	1, -3, -2	0, 2, 1	6, 1, -1	5, 10, 0
8	-4, 5, -1	3, 4, 1	4, 4, 4	1, 0, 3
9	5, -4, -1	-4, 6, 4	1, 2, 5	-4, 6, 0
10	-2, -1, 4	5, 3, 4	6, 5, 5	3, 6, 3
11	-1, 1, 4	1, 5, -2	-1, -3, 5	1, -9, 5
12	1, -4, 3	2, 4, -4	6, 1, 4	2, 6, 0
13	-2, 3, 1	4, -2, 1	1, -2, -3	3, -5, -4
14	3, 2, -6	2, 1, 0	2, -2, 5	-8, 5, -9
15	3, -1, 6	-3, 1, 4	0, 5, 4	9, -8, -6
16	4, 2, 3	-3, -6, -2	1, 6, 5	-7, 2, -1
17	1, -4, -5	4, 3, 5	-1, 2, 2	6, 4, 5
18	6, 2, 1	0, 6, 3	2, -3, -4	4, -2, 9
19	1, -5, 2	6, 1, -1	2, -6, 3	7, 8, -2
20	1, 3, 1	1, -4, 0	6, 5, -1	-3, 6, -6
21	4, -1, 3	-3, 1, -1	1, -4, -5	-3, 2, 4
22	1, -6, 1	6, 4, 5	-5, 4, -4	3, -2, 4
23	1, 6, 2	-1, -6, 1	1, 1, 3	-1, -6, -5
24	-3, 1, -5	1, 1, 1,	1, 1, 5	3, -9, 5
25	2, 4, 4,	3, -6, 1	1, 5, 0	6, 9, 1
26	2, 4, 1	3, 5, 2	2, 1, 4	-3, 0, -9
27	1, 4, 2	-4, 2, 5	2, 5, -1	10, 4, -6
28	2, -3, -1	-5, 2, -3	1, 2, 1	-7, 7, 2
29	1, -3, 3	3, 4, 1	-3, 3, -4	7, 5, 5
30	1, 1, 3	-3, 4, -6	4, 3, 4	-7, -4, 3
31	2, -2, 1	1, 2, -3	1, -1, 2	4, -1, 3
32	3, -1, 2	2, 1, -1	-1, 3, 0	4, 3, 1

Задание 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$.

	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\lvert\overline{p}\rvert$	$\lvert\overline{q}\rvert$	$(\overline{p},\wedge\overline{q})$
1	$3\overline{p}+2\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	2	3	$3\pi/4$
2	$2\overline{p}-3\overline{q}$	$4\overline{p}+3\overline{q}$	1	2	$\pi/6$
3	$3\overline{p}+3\overline{q}$	$3\overline{p}+4\overline{q}$	3	2	$\pi/2$
4	$\overline{p}+\overline{q}$	$5\overline{p}-2\overline{q}$	1	4	$\pi/3$
5	$3\overline{p}-\overline{q}$	$3\overline{p}-2\overline{q}$	3	5	$2\pi/3$
6	$4\overline{p}+2\overline{q}$	$3\overline{p}+2\overline{q}$	1	3	$3\pi/4$
7	$\overline{p}-4\overline{q}$	$4\overline{p}+3\overline{q}$	2	4	$\pi/2$
8	$3\overline{p}-\overline{q}$	$2\overline{p}+3\overline{q}$	4	3	$5\pi/6$
9	$\overline{p}-4\overline{q}$	$2\overline{p}+\overline{q}$	6	1	$\pi/3$
10	$2\overline{p}+\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	2	3	$\pi/4$
11	$3\overline{p}+3\overline{q}$	$2\overline{p}-4\overline{q}$	3	1	$\pi/6$
12	$2\overline{p}-\overline{q}$	$4\overline{p}+3\overline{q}$	1	5	$\pi/2$
13	$2\overline{p}+5\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	3	1	$5\pi/6$
14	$\overline{p}+\overline{q}$	$3\overline{p}-2\overline{q}$	5	1	$3\pi/4$
15	$3\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-4\overline{q}$	2	2	$\pi/3$
16	$\overline{p}-\overline{q}$	$2\overline{p}+4\overline{q}$	4	2	$\pi/3$
17	$\overline{p}+4\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	4	1	$\pi/6$
18	$2\overline{p}+\overline{q}$	$3\overline{p}-2\overline{q}$	2	6	$\pi/4$
19	$3\overline{p}-2\overline{q}$	$2\overline{p}-\overline{q}$	3	4	$\pi/2$
20	$3\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+4\overline{q}$	3	2	$\pi/6$
21	$2\overline{p}+q$	$2\overline{p}-\overline{q}$	4	7	$2\pi/3$
22	$\overline{p}+3\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	2	1	$\pi/2$
23	$2\overline{p}-5\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	4	1	$\pi/6$
24	$\overline{p}-2\overline{q}$	$2\overline{p}-\overline{q}$	5	4	$\pi/6$
25	$\overline{p}+3\overline{q}$	$2\overline{p}+\overline{q}$	2	4	$\pi/4$
26	$2\overline{p}-\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	4	3	$\pi/3$
27	$3\overline{p}+\overline{q}$	$4\overline{p}-\overline{q}$	1	6	$3\pi/4$
28	$\overline{p}-5\overline{q}$	$\overline{p}+\overline{q}$	5	1	$\pi/2$
29	$2\overline{p}-3\overline{q}$	$3\overline{p}+4\overline{q}$	3	5	$\pi/4$
30	$\overline{p}+6\overline{q}$	$2\overline{p}-\overline{q}$	4	6	$\pi/6$
31	$2\overline{p}+\overline{q}$	$3\overline{p}-2\overline{q}$	3	5	$\pi/2$
32	$7\overline{p}+2\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	1	3	$5\pi/4$

Задание 5. Даны две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Найти: 1) косинусы углов между ними; 2) канонические уравнения прямой, по которой они пересекаются.

	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
1	3	2	-4	1	2	4	-3	5
2	-7	1	3	0	2	-4	8	6
3	4	-1	-6	7	-4	2	-3	1
4	3	-4	5	8	-3	2	4	7
5	2	0	7	1	3	-8	1	-4
6	-2	1	-4	5	3	-4	-3	1
7	1	-2	2	4	4	2	-3	-6
8	-5	-1	3	2	0	-3	1	4
9	4	0	1	-5	2	-3	3	7
10	2	-2	0	1	4	-3	-5	6
11	3	-3	4	6	2	-2	2	-5
12	2	-5	1	4	3	-2	5	6
13	-4	-3	-4	1	2	5	-3	7
14	5	2	1	-1	3	0	-2	1
15	4	-5	1	4	2	-2	3	8
16	1	-3	-1	7	3	1	4	5
17	-3	0	2	5	2	1	-4	-1
18	4	4	-3	1	2	-3	-1	5
19	-3	2	-3	5	2	-3	1	1
20	4	7	-1	3	5	2	-3	1
21	2	4	6	1	6	-3	0	7
22	-4	0	3	7	-2	1	1	5
23	3	6	-1	1	-7	-2	3	-4
24	5	-1	3	6	4	-5	-1	5
25	2	1	-3	4	1	5	-2	7
26	6	5	-4	2	-1	3	-2	8
27	1	7	1	2	3	-2	1	-1
28	3	-3	5	7	-5	3	3	-2
29	-8	-3	-1	5	4	1	1	3
30	4	8	3	3	1	-1	4	5
31	3	1	-2	-1	2	-3	0	4
32	4	-1	5	3	0	2	-2	1

Задание 6. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

	M	A	B	C	D
1	1, -3, 2	3	-2	1	3
2	-2, 4, 3	2	0	1	4
3	3, 0, -8	6	1	-2	6
4	2, -2, -1	-1	4	3	0
5	5, -3, 0	-2	3	0	-7
6	4, 5, -3	1	-4	2	1
7	-2, 3, -1	0	3	-2	2
8	4, -1, 1	-3	2	-5	2
9	3, 3, 4	1	1	6	8
10	-6, -1, 0	3	0	-4	-7
11	4, -1, 1	5	-1	1	5
12	4, 0, 3	2	-2	3	0
13	7, 1, 5	1	0	4	7
14	0, -5, 5	-3	4	-5	-5
15	1, -4, 5	2	-2	1	3
16	1, 2, 0	2	-3	1	-10
17	3, -4, 3	4	-3	5	11
18	3, -5, -4	-3	1	2	-6
19	3, 0, -7	6	-2	-3	10
20	7, 0, -1	7	-1	1	3
21	0,5,1	-3	2	0	3
22	1, 5, 4	1	5	3	-3
23	-2, 4, 3	2	-2	-1	-3
24	-4, -5, -4	1	4	6	-4
25	1, -2, -3	3	0	-1	4
26	4, 4, -4	4	1	-6	8
27	2, -3, 2	-3	3	-2	-3
28	6, 0, -2	6	2	-3	7
29	2, -4, 5	2	-3	1	7
30	3, -1, -3	3	1	-4	6
31	1, -2, 3	2	-2	3	2
32	2, 1, -4	-2	1	1	1

Задание 7. Даны вершины $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ треугольника. Найти: 1) длину стороны *AC*; 2) уравнение стороны *AC*; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины *B*; 4) длину этой высоты; 5) уравнение медианы, проведенной из вершины *A*; 6) площадь треугольника. Сделать чертеж.

	A	*B*	*C*		*A*	*B*	*C*
1	2; 2	1; 4	-2; 0	17	3; 6	-1; 2	3; 0
2	3; 1	2; 0	4; 5	18	-1; -5	2; 4	-4; 5
3	-4; 1	-2; 3	3; 1	19	1; 5	-2; 7	-3; 0
4	0; 4	-2; 1	3; -2	20	0; 6	3; -1	-2; 4
5	1; 2	3; 4	5; 1	21	2; 1	3; 8	-1; 3
6	-1; -2	2; 0	4; 0	22	-2; 4	0; -3	1; 1
7	-4; 5	1; 4	3; 7	23	3; -1	2; 5	2; -1
8	5; 1	0; 5	-4; -2	24	0; 0	4; 3	2; -4
9	1; 6	-2; 4	3; 3	25	1; 1	-1; -3	5; 1
10	3; 0	-3; 3	4; 7	26	-2; 1	3; 3	1; -4
11	5; -2	-1; 4	3; -6	27	3; 5	-1; 1	2; -3
12	1; 4	1; -4	-3; 2	28	4; 5	-1; 4	2; -4
13	2; 2	-2; 3	3; -4	29	-1; -1	0; 3	7; 2
14	1; 1	4; 3	2; -3	30	6; 1	3; 5	1; -3
15	-1; 5	3; 4	1; 3	31	2; 2	-4; 1	5; -4
16	1;4	-4; 1	2; -3	32	-1; -1	6; -2	3; -2

Задание 8. Составить уравнение линии (и затем сделать чертеж), для каждой точки которой:

1) расстояние от точки *A*(3;3) равно расстоянию от прямой $y = -2$;

2) расстояние от точки *A*(-1;0) вдвое меньше, чем от прямой $x = -4$;

3) расстояния от окружностей $(x+10)^2 + y^2 = 289$ и $(x-10)^2 + y^2 = 1$ равны;

4) расстояния от начала координат и от точки *A*(5;0) относятся как 2:1;

5) сумма квадратов расстояний до начала координат и до точки $A(-a;0)$ равна a^2;

6) расстояния от окружностей $(x+3)^2 + y^2 = 1$ и $(x-3)^2 + y^2 = 81$ равны;

7) расстояние от точки A(-1;0) вдвое меньше расстояния от прямой $x = -4$;
8) сумма квадратов расстояний до точек $A(-a;0)$, $B(0;a)$, $C(a,0)$ равна $3a^2$;
9) модуль разности расстояний до точек A(-5;0) и B(5;0) равен 6;
10) расстояния от точки A(2;0) и от прямой $5x + 8 = 0$ относятся как 5:4;
11) модуль разности расстояний до точек A(-2;2) и B(2;2) равен 4;
12) сумма расстояний до точек A(-3;0) и B(3;0) равна 10;
13) расстояние от точки A(4;0) вдвое больше, чем от точки B(1;0);
14) расстояния от точки A(0;2) и от оси OX равны;
15) расстояние от точки A(0;9) втрое больше, чем от точки B(0;1);
16) расстояния от точки A(2;0) и от прямой $2x + 5 = 0$ относятся как 4:5;
17) расстояние от точки A(0;-1) вдвое меньше, чем от точки B(0;4);
18) расстояние от точки A(-1;-1) вдвое меньше, чем от точки B(-4;4);
19) расстояние от точки A(3;0) вдвое меньше расстояния от точки B(26;0);
20) расстояние от точки A(4;0) вдвое больше, чем от прямой $x = 1$;
21) расстояние от прямой $x = -2$ вдвое меньше, чем от точки A(-8;0);
22) расстояния от точки A(0;2) и от прямой $y - 4 = 0$ равны;
23) сумма расстояний до точек A(2;0) и B(-2;0) равна $2\sqrt{5}$;
24) расстояния от оси ординат и от окружности $x^2 + y^2 = 4x$ равны;
25) расстояния от точки A(-4;0) и от прямой $4x + 25 = 0$ относятся как 4:5;
26) расстояния от точки A(4;0) и от оси OY равны;
27) расстояния от точки A(2;6) и от прямой $y + 2 = 0$ равны;
28) расстояние от точки A(-4;0) втрое больше, чем от начала координат;
29) расстояние от оси OX вдвое больше, чем от оси OY;
30) расстояния от прямой $x + 2 = 0$ и от окружности $x^2 + y^2 = 4x$ равны;
31) расстояния от точки A(-5;0) и от прямой $5x + 16 = 0$ относятся как 4:5;
32) расстояние от точки A(2;2) равно расстоянию от прямой $y = 8$.

Задание 9. Дано уравнение $F(x, y, z) = 0$. Требуется: 1) доказать, что оно является уравнением сферы; 2) найти координаты центра и радиус сферы; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через центр сферы и ось OX; 4) составить уравнение прямой, проходящей через центр сферы и начало координат.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0;$
2. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 2 = 0;$
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 11 = 0;$
4. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 43 = 0;$
5. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0;$
6. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 2z + 1 = 0;$
7. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 10z - 6 = 0;$
8. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 8y - 23 = 0;$
9. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 6z - 15 = 0;$
10. $x^2 + y^2 + z^2 + 24x + +2z + 24 = 0;$
11. $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 4y + 6z = 0;$
12. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 14z + 10 = 0;$
13. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 8y + 8z - 43 = 0;$
14. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 2z - 10 = 0;$
15. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 20y - 20 = 0;$
16. $x^2 + y^2 + z^2 + 16x - 16y - 6z + 9 = 0;$
17. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 6z - 6 = 0;$
18. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 8y + 6z - 50 = 0;$
19. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 18y + 4z - 14 = 0;$
20. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y + 2z - 23 = 0;$
21. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 14z + 2 = 0;$
22. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 10z - 36 = 0;$
23. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 16z - 8 = 0;$
24. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 16z + 5 = 0;$
25. $x^2 + y^2 + z^2 + 20z - 21 = 0;$
26. $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y + 2z + 30 = 0;$
27. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 4z - 14 = 0;$
28. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 14y + 4z - 46 = 0;$

29. $x^2+y^2+z^2-8x+8y+12z+4=0$;

30. $x^2+y^2+z^2+10x-12y-20=0$;

31. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+10z-19=0$;

32. $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-11=0$;

Задание 10. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить фигуры, определяемые следующими соотношениями:

1) $\begin{cases} 9x^2+25y^2-225\le 0, \\ 3x+5y-15\le 0, \\ y+2\ge 0; \end{cases}$

2) $5x^2-9y^2-30x+18y-9=0$;

3) $\begin{cases} x^2+4y^2-16\ge 0, \\ y+3\ge 0, \\ x+y-2\le 0; \end{cases}$

4) $16x^2-25y^2+32x-100y+84=0$;

5) $\begin{cases} x^2-4y^2-4\ge 0, \\ 4x+3y-12\le 0; \end{cases}$

6) $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x+5}$;

7) $\begin{cases} 9x^2-16y^2+144\ge 0, \\ 2x-y-6\le 0, \\ 3x+y+12\ge 0; \end{cases}$

8) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$;

9) $\begin{cases} y^2-10x\le 0, \\ 5x-3y-15\le 0, \\ y-2\le 0; \end{cases}$

10) $5x^2-6y^2+10x-12y-31=0$;

17) $\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}\le 1, \\ |y|>4; \end{cases}$

18) $x^2+6y^2-6x+12y+13=0$;

19) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1, \\ -\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1; \end{cases}$

20) $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$;

21) $\begin{cases} x^2-y^2>1, \\ |x|\ge 1; \end{cases}$

22) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$;

23) $\begin{cases} R^2<x^2+y^2<4R^2 \\ x^2>\frac{R^2}{4}; \end{cases}$

24) $x^2-\frac{1}{4}y^2-x-\frac{3}{2}y-1=0$;

25) $\begin{cases} x^2-y^2>a^2, \\ x^2<4a^2; \end{cases}$

26) $2x^2-8x+4y+9=0$;

11) $\begin{cases} x^2-8y\le 0, \\ 2x+3y+6\le 0, \\ x+2\ge 0; \end{cases}$

12) $x=1-\dfrac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$;

13) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}\le 1, \\ -2\le y\le 2; \end{cases}$

14) $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$;

15) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{9}<1, \\ 0<x<2; \end{cases}$

16) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$;

27) $\begin{cases} xy>a^2, \\ |x+y|<4a; \end{cases}$

28) $x^2-4y^2+6x+5=0$;

29) $\begin{cases} 2x<y^2+4y, \\ x^2+y^2+4x+4y<0; \end{cases}$

30) $x=-2+\sqrt{-5-6y-y^2}$;

31) $\begin{cases} x^2+4y^2-16\ge 0, \\ x+2y-8\le 0, \\ x+y-2\ge 0; \end{cases}$

32) $x^2-6x-4y+5=0$;

Решение типового варианта.

Задание 1. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A:

$f(x)=3x^2-4,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$f(A)=3A^2-4E_2$, где E_2 - единичная матрица размера 2х2, т.е.

$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix},\ 3A^2=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 18 & -9 \end{pmatrix}$,

то $f(A)=3A^2-4E^2=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 18 & -9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 18 & -13 \end{pmatrix}$.

<u>Задание 2.</u> Решить систему уравнений матричным методом, с помощью правила Крамера и методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

а) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда решение системы в матричной форме имеет вид: $X = A^{-1}B$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}. Она существует, так как $\det A = 16 \neq 0$.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7,\ A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 5,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Следовательно, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 11 & 3 & -1 \\ -7 & 1 & 5 \\ -13 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Тогда решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 11 & 3 & -1 \\ -7 & 1 & 5 \\ -13 & -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 33 & -1 \\ 0 & 11 & 5 \\ 0 & -55 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -3.$

б) Решим систему с помощью правила Крамера. Имеем

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 11 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 32,\ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 11 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 11 \\ 3 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -48,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-48}{16} = -3.$$

в) Решим систему методом Гаусса. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 11 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim (1) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -3 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim (2) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -3 & 11 \\ 0 & 7 & -5 & 22 \\ 0 & 13 & -7 & 34 \end{array}\right) \sim (3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -3 & 11 \\ 0 & 7 & -5 & 22 \\ 0 & 0 & 16 & -48 \end{array}\right).$$

Комментарии:

(1) – поменяем местами первую и вторую строку;

(2) – умножим первую строку на 2 и прибавим ее ко второй, умножим первую строку на 3 и прибавим ее к третьей строке;

(3) – умножим вторую строку на (-13) и прибавим ее к третьей строке, умноженной на 7.

Система уравнений приведена к треугольному виду

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 11 \\ \qquad 7x_2 - 5x_3 = 22 \\ \qquad\quad 16x_3 = -48 \end{cases}$$. Из последнего уравнения находим $x_3 = -3$.

Подставляя это значение x_3 во второе уравнение, находим из него $x_2 = \frac{1}{7}(22 + 5x_3) = \frac{1}{7}(22 - 15) = 1$. Подставляя x_2 и x_3 в первое уравнение, получаем $x_1 = -11 + 4x_2 - 3x_3 = -11 + 4 + 9 = 2$.

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3$.

Задание 3. Даны векторы $\bar{a}(1,3,-2)$, $\bar{b}(-2,-5,6)$, $\bar{c}(1,1,-1)$, $\bar{d}(-1,-6,6)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

Решение.

Покажем, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ некомпланарны, а значит, образуют базис трехмерного пространства R_3. Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ -2 & -5 & 6\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=5+18+4+10-6-6=25.$$

Так как $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\neq 0$, то векторы некомпланарны. Запишем разложение вектора $\bar{d}$ по базису $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{d}=x_1\bar{a}+x_2\bar{b}+x_3\bar{c}.$$

Подставляя в это равенство координаты заданных векторов, приходим к системе линейных уравнений $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-1\\ 3x_1-5x_2+x_3=-6\\ -2x_1+6x_2-x_3=6\end{cases}$, которую решаем методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1\\ 3 & -5 & 1 & -6\\ -2 & 6 & -1 & 6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 2 & 1 & 4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 5 & 10\end{array}\right),$$

откуда $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-1\\ x_2-2x_3=-3\\ 5x_3=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_3=2\\ x_2=-3+2x_3=-3+4=1\\ x_1=-1-x_3+2x_2=-1-2+2=-1.\end{cases}$

Следовательно, $\bar{d}=-1\cdot\bar{a}+1\cdot\bar{b}+2\cdot\bar{c}$.

Задание 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}=2\bar{p}-\bar{q}$, $\bar{b}=3\bar{p}+2\bar{q}$, $|\bar{p}|=1$, $|\bar{q}|=2$, $(\bar{p},\hat{}\,\bar{q})=\pi/4$.

Решение.

Из геометрического смысла векторного произведения следует, что площадь параллелограмма вычисляется по формуле $S=|\bar{a}\times\bar{b}|$. Используя свойства векторного произведения, получаем:

$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|(2\bar{p}-\bar{q})\times(3\bar{p}+2\bar{q})\right|=\left|6\bar{p}\times\bar{p}-3\bar{q}\times\bar{p}+4\bar{p}\times\bar{q}-2\bar{q}\times\bar{q}\right|=$$
$$=\left|-3\bar{q}\times\bar{p}+4\bar{p}\times\bar{q}\right|=\left|3\bar{p}\times\bar{q}+4\bar{p}\times\bar{q}\right|=\left|7\bar{p}\times\bar{q}\right|=7\left|\bar{p}\times\bar{q}\right|=$$
$$=7\cdot\left|\bar{p}\right|\cdot\left|\bar{q}\right|\cdot\sin(\bar{p},\wedge\bar{q})=7\cdot1\cdot2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=7\sqrt{2}.$$

<u>Задание 5.</u> Даны две плоскости $3x+4y-z-4=0$ и $x-2y+5z-8=0$. Найти: 1) косинусы углов между ними; 2) канонические уравнения прямой, по которой они пересекаются.

<u>Решение.</u>

1) Если плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то упорядоченная тройка (A,B,C) определяет так называемый, нормальный вектор плоскости $\vec{n}$ (т.е. вектор, перпендикулярный к плоскости).

Пусть даны две плоскости $3x+4y-z-4=0$ и $x-2y+5z-8=0$. Один из углов φ_1, образуемых этими плоскостями, равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1(3,4,-1)$, $\vec{n}_2(1,-2,5)$, а второй угол $\varphi_2=\pi-\varphi_1$. Поэтому косинусы углов φ между данными плоскостями определяются по формуле:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

В нашем примере имеем:

$$\cos\varphi=\pm\frac{3\cdot1+4\cdot(-2)+(-1)\cdot5}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+5^2}}=\pm\frac{-10}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{30}}=\pm\frac{10}{2\sqrt{195}}=$$
$$=\pm\frac{5}{\sqrt{195}}\approx\pm0{,}358.$$

2) Каноническими называют уравнения прямой вида

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p},$$

где (x_0,y_0,z_0) - координаты некоторой точки, лежащей на прямой, а (l,m,p) - координаты направляющего вектора прямой (т.е. вектора, параллельного данной прямой).

Шаг 1. Найдем точку, лежащую на линии пересечения заданных плоскостей. Для этого в системе $\begin{cases} 3x+4y-z-4=0 \\ x-2y+5z-8=0 \end{cases}$ положим, например, $z=0$. Тогда система примет вид: $\begin{cases} 3x+4y-4=0 \\ x-2y-8=0 \end{cases}$. Умножив второе уравнение на 2 и сложив его с первым, приходим к уравнению $5x-20=0$, откуда $x=4$. Из уравнения $x-2y-8=0$ находим $y=\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{4-8}{2}-2$. Итак, $x_0=4,\ y_0=-2,\ z_0=0.$

Шаг 2. Найдем направляющий вектор искомой прямой. Так как каждый из нормальных векторов $\overline{n}_1\left(A_1, B_1C_1\right)$ и $\overline{n}_2\left(A_2, B_2C_2\right)$ перпендикулярен к искомой прямой, то их векторное произведение будет ей параллельно, т.е. за направляющий вектор искомой прямой можно взять вектор $\overline{s}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

В нашем примере имеем:

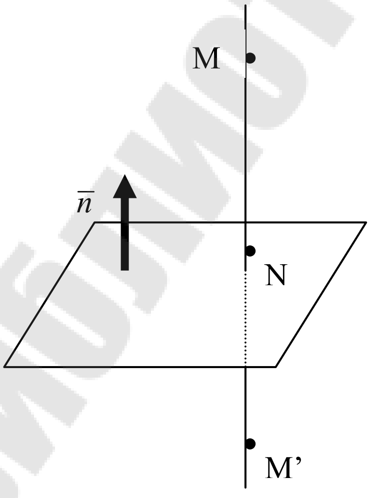
$$\overline{s}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\overline{k}=$$

$$=(20-2)\overline{i}-(15+1)\overline{j}+(-6-4)\overline{k}=18\overline{i}-16\overline{j}-10\overline{k}.$$

Шаг 3. Записываем требуемые канонические уравнения:

$$\frac{x-4}{18}=\frac{y+2}{-16}=\frac{z-0}{-10} \text{ или } \frac{x-4}{9}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-0}{-5}.$$

Задание 6. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости $x-2y+3z-5=0$.



Решение.

Составим каноническое уравнение прямой MM'. Так как эта прямая перпендикулярна данной плоскости, то ее направляющий вектор и вектор нормали плоскости коллинеарны, а значит, в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{n}(1,-2,3)$.

Тогда уравнение прямой MM' примет вид: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z+4}{3}$. Теперь приведем уравнение прямой к параметрическому виду, приравняв к t каждое из трех данных отношений: $x=1+t,\ y=6-2t,\ z=-4+3t$. Подставим эти значения x,y,z в уравнение данной плоскости: $(1+t)-2(6-2t)+3(-4+3t)-5=0$, откуда получим $t=-2$ – значение параметра, отвечающее точке N пересечения прямой MM' с данной плоскостью.

Следовательно,

$$x_N=1-2=-1,\ y_N=6-2\cdot(-2)=10,\ z_N=-4+3\cdot(-2)=-10.$$

Так как точка N является серединой отрезка MM', то верны равенства: $x_N=\dfrac{x_M+x_{M'}}{2},\ \ y_N=\dfrac{y_M+y_{M'}}{2},\ \ z_N=\dfrac{z_M+z_{M'}}{2}$. Подставляя координаты точек N и M в соотношения, получим

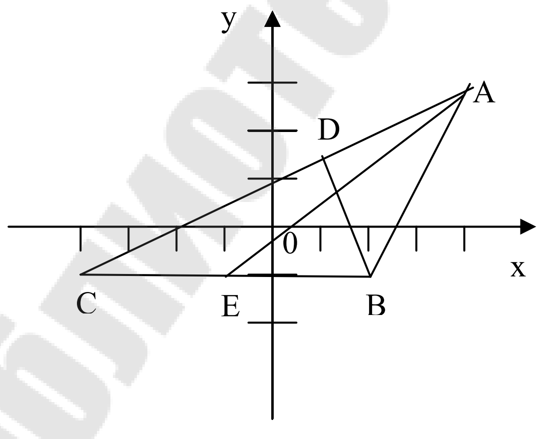
$$-1=\frac{1+x_{M'}}{2},\ 10=\frac{6+y_{M'}}{2},\ -10=\frac{-4+z_{M'}}{2},$$

откуда $x_{M'}=-3,\ y_{M'}=14,\ z_{M'}=-16$, т.е. M' (-3, 14, -16).

<u>Задание 7.</u> Даны вершины $A(4,3)$, $B(2,-1)$, $C(-4,-1)$ треугольника. Найти: 1) длину стороны AC; 2) уравнение стороны AC; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины B; 4) длину этой высоты; 5) уравнение медианы, проведенной из вершины A; 6) площадь треугольника. Сделать чертеж.

<u>Решение.</u>

1) Для нахождения длины стороны AC воспользуемся формулой расстояния между двумя точками на плоскости:



$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Имеем:

$$AC=\sqrt{(-4-4)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(-8)^2+(-4)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}.$$

2) Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки:

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Тогда уравнение стороны AC будет иметь вид:

$$\frac{x-4}{-4-4}=\frac{y-3}{-1-3}, \qquad \frac{x-4}{-8}=\frac{y-3}{-4}, \qquad \frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{1},$$

откуда $x-2y+2=0$ или $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

3) Так как высота проходит через вершину $B(2,-1)$, то воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку (x_0,y_0): $y-y_0=k(x-x_0)$. Имеем в нашем случае: $y+1=k(x-2)$. Для нахождения углового коэффициента k воспользуемся условием перпендикулярности прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, а именно: $k_1\cdot k_2=-1$. В силу перпендикулярности нашей высоты BD и прямой AC, заданной уравнением $y=\dfrac{1}{2}x+1$, находим: $k_{AC}=\dfrac{1}{2}$ и угловой коэффициент высоты $k_{BD}=-2$. Окончательно имеем $y+1=-2(x-2)$, откуда $y+2x-3=0$ и есть уравнение высоты BD.

4) Для нахождения длины высоты, проходящей через точку B, воспользуемся формулой расстояния от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$: $d=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$. Имеем:

$d=\left|\dfrac{2-2\cdot(-1)+2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ – расстояние от точки B до прямой AC или длина высоты BD.

5) Так как медиана делит противоположную сторону пополам, то найдем координаты середины отрезка BC. Пусть это будет точка E. Имеем:

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+(-4)}{2}=-1;\ y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-1+(-1)}{2}=-1.$$

Остается записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;3)$ и $E(-1;-1)$. Имеем: $\dfrac{x-4}{-1-4}=\dfrac{y-3}{-1-3}$; $\quad\dfrac{x-4}{-5}=\dfrac{y-3}{-4}$;

$$-4x+5y+1=0 \text{ – искомое уравнение медианы.}$$

6) Для вычисления площади треугольника воспользуемся формулой $S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$, где знак выбираем так, чтобы площадь выражалась неотрицательным числом.

Имеем:

$$S=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -6 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot(-6)\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3(3+1)=12$$

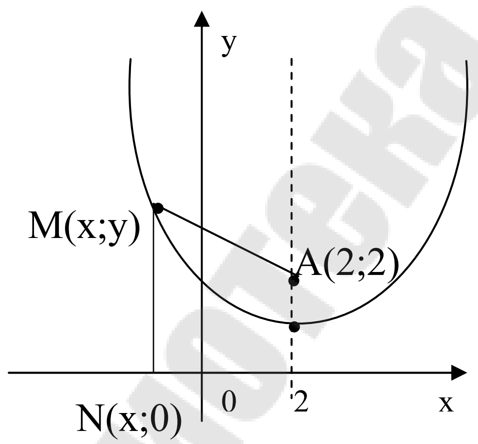
Примечание. Проверим этот результат, пользуясь формулой площади треугольника, известной из элементарной геометрии. Имеем:

$$AC=4\sqrt{5},\ BD=\frac{6\sqrt{5}}{5}.\quad S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\frac{6\sqrt{5}}{5}=12.$$

Задание 8. Составить уравнение линии (и сделать чертеж), для каждой точки которой расстояния от точки $A(2;2)$ и от оси OX равны.

Решение.

Пусть точка $M(x,y)$ лежит на исходной линии. По условию задачи $MA=MN$, где MN – перпендикуляр, опущенный из точки $M(x,y)$ на ось OX.



Поэтому по формуле расстояния между двумя точками на плоскости имеем:

$MA=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$.

$MN=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2}$. Откуда

$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{y^2}$;

$(x-2)^2+(y-2)^2=y^2$

$$(x-2)^2=y^2-\left(y^2-4y+4\right)$$

$$(x-2)^2=4y-4;$$

$$(x-2)^2=4(y-1).$$

Полученное уравнение есть уравнение параболы с вершиной в точке $(2;1)$, расположенной вдоль оси $OУ$.

<u>Задание 9.</u> Дано уравнение $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$. Требуется: 1) доказать, что оно является уравнением сферы; 2) найти координаты центра и радиус сферы; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через центр сферы и ось OX; 4) составить уравнение прямой, проходящей через центр сферы и начало координат.

<u>Решение.</u>

1) Так как заданное уравнение есть уравнение второй степени, в котором а) коэффициенты при квадратах координат равны между собой и б) члены с произведениями координат отсутствуют, то это и есть уравнение сферы.

2) Найдем координаты ее центра и радиус. Дополним до полных квадратов группы членов, содержащие одни и те же координаты.

$$x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=\left(x^2-6x\right)+\left(y^2+8y\right)+\left(z^2+2z\right)+10=$$
$$=\left(x^2-6x+9\right)-9+\left(y^2+8y+16\right)-16+\left(z^2+2z+1\right)-1+10=$$
$$=(x-3)^2+(y+4)^2+(z+1)^2-16=0.$$

Откуда $(x-3)^2+(y+4)^2+(z+1)^2=16$. Значит, центр сферы находится в точке $Q(3;-4;-1)$ и радиус сферы $R=4$.

3) Плоскость, уравнение которой нужно составить, проходит через начало координат (значит, $D=0$) и параллельна оси OX (точнее, ее содержит). Следовательно, $A=0$. Итак, в общем уравнении плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ остаются только члены с координатами y,z: $By+Cz=0$. Теперь, подберем коэффициенты B и C так, чтобы эта плоскость проходила через точку $Q(3;-4;-1)$. Имеем:

$$B\cdot(-4)+C\cdot(-1)=0 \quad\Rightarrow\quad C=-4B.$$

Подставляя это выражение для С в уравнение $By+Cz=0$ окончательно получим:

$$By-4Bz=0 \text{ или } y-4z=0.$$

4) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Имеем $O(0,0,0)$ и $Q(3;-4;-1)$. Поэтому искомое уравнение имеет вид

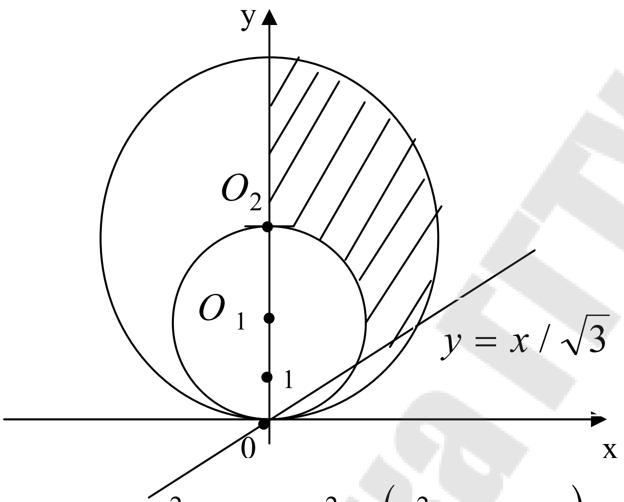
$$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-0}{-4-0}=\frac{z-0}{-1-0}.$$

Откуда $\frac{x}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{-1}$ или окончательно: $\frac{x}{-3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$.

Задание 10. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить фигуры, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{cases} y^2-4y+x^2\ge 0 \\ y^2-8y+x^2\le 0 \\ y\ge x/\sqrt{3} \\ x\ge 0 \end{cases}$$

Решение.



Для того, чтобы установить, какую фигуру задает неравенство $y^2-4y+x^2\ge 0$, выделим полные квадраты в выражении y^2-4y+x^2:

$$y^2-4y+x^2=\left(y^2-4y+4\right)+x^2-4=\left(y-2\right)^2+x^2-4\ge 0.$$

Откуда $\left(y-2\right)^2+x^2\ge 4$ – это уравнение внешней части круга радиуса $R_1=2$ с центром в точке $O_1(0;2)$.

Аналогично, преобразовав неравенство $y^2-8y+x^2\le 0$ к виду $\left(y-4\right)^2+x^2\le 16$, устанавливаем, что оно задает внутреннюю часть круга радиуса $R_2=4$ с центром в точке $O_2(0;4)$.

Очевидно, что неравенство $y\ge\frac{x}{\sqrt{3}}$ задает полуплоскость, лежащую выше прямой $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, а неравенству $x\ge 0$ отвечают точки, лежащие правее оси OY. Изобразим указанные области на чертеже и заштрихуем их пересечение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие для вузов.– М.: Высшая школа, 1985.

2. Апатенок Р.Ф. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Вышэйшая школа, 1986.

3. Гусак А.А. Высшая математика: Учебник для студентов вузов. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – Т.1.

4. Кручкович Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики/ Под ред. Г.И.Кручковича. – М.: Высшая школа, 1973.

5. Индивидуальные задания по высшей математике: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчислениу функции одно переменной: Учеб. пособие / Под ред. А.Л.Рябушко. – Мн.: Вышэйшая школа, 2000. – Ч.1.

6. Руководство к решению задач по высшей математике/ Под ред. Е.И.Гурского. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989.

7. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты. – М.: Высшая школа, 1983.

8. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач. – Мн.: ТетраСистемс, 2001.

9. Выготский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1966.

10. Гусак А.А. и др. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 2000.

АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практикум
по курсам «Математика»
и «Высшая математика»
для студентов заочной формы обучения

Авторы-составители: **Великович** Лев Липович
Лашкевич Василий Иванович
Задорожнюк Мария Викторовна

Подписано в печать 24.10.06.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Ризография. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,44.
Изд. № 166.
E-mail: ic@gstu.gomel.by
http://www.gstu.gomel.by

Отпечатано с макета оригинала авторского для внутреннего использования.
Учреждение образования «Гомельский государственный технический
университет имени П.О. Сухого».
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48, т. 47-71-64.