

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Техническая механика»

Д. Г. Кроль, Н. В. Иноземцева, М. И. Лискович

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

ПРАКТИКУМ

**по курсу «Теория механизмов и машин»
для студентов машиностроительных специальностей
дневной и заочной форм обучения**

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2012

УДК 621.01:531.8(075.8)
ББК 22.21я73
К83

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 7 от 12.03.2012 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Технология машиностроения» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *М. П. Кульгейко*

Кроль, Д. Г.

К83

Кинематический анализ плоских рычажных механизмов : практикум по курсу «Теория механизмов и машин» для студентов машиностр. специальностей днев. и заоч. форм обучения / Д. Г. Кроль, Н. В. Иноземцева, М. И. Лискович. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2012. – 55 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц; 32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb; Windows 98 и выше; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://alis.gstu.by/StartEK/>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-104-8.

Содержит необходимые теоретические сведения, расчетные формулы и примеры выполнения расчетов и графических построений для кинематического анализа рычажных механизмов.

Для студентов машиностроительных специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 621.01:531.8(075.8)

ББК 22.21я73

ISBN 978-985-535-104-8

© Кроль Д. Г., Иноземцева Н. В.,
Лискович М. И., 2012

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2012

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Задачи кинематического анализа механизмов

Кинематический анализ механизмов состоит в определении движения звеньев механизма по заданному движению начальных звеньев. **Основные задачи** кинематического анализа:

- определение положений звеньев, включая и определение траекторий отдельных точек звеньев;
- определение скоростей и ускорений.

При решении этих задач считаются известными законы движения начальных звеньев и кинематическая схема механизма.

1.2. Геометрические и кинематические характеристики механизмов

Функцией положения механизма называется зависимость углового или линейного перемещения точки или звена механизма от времени или обобщенной координаты (обозначается $S_k = S_k(q)$, $\psi_j = \psi_j(q)$).

Кинематическими передаточными функциями механизма называются производные от функции положения по обобщенной координате. Первая производная называется первой передаточной функцией или аналогом скорости (обозначается dS/dq , $d\psi/dq$), вторая второй передаточной функцией или аналогом ускорения (обозначается d^2S/dq^2 , $d^2\psi/dq^2$).

Кинематическими характеристиками механизма называются производные от функции положения по времени. Первая производная называется скоростью (обозначается V , ω), вторая ускорением (обозначается a , ε).

Механизм с одной подвижностью имеет одно заданное входное движение и бесчисленное множество выходных. Передаточные функции тех движений, которые в данном случае используются как выходные, называются **главными**, остальные **вспомогательными**. Выразим связь между кинематическими передаточными функциями механизма и кинематическими характеристиками. Рассмотрим типовой механизм (рис. 1). Механизм имеет одну степень свободы. Начальное звено – звено 2. Следовательно $q = \varphi_2$.

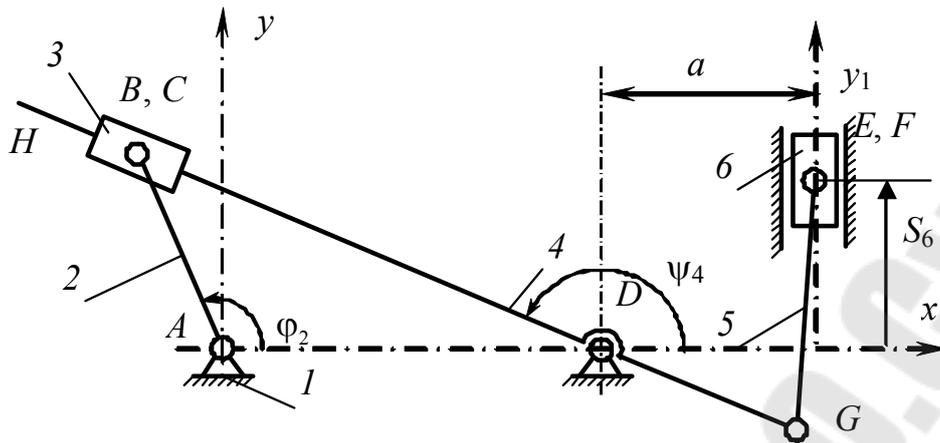


Рис. 1. Кинематическая схема механизма

Для определения угловой скорости 4-го звена необходимо найти производную по времени от функции ψ_4 :

$$\omega_4 = \frac{d\psi_4}{dt} = \frac{d\psi_4}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{d\psi_4}{d\varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\psi_4}{d\varphi_2} \omega_2.$$

Величина $d\psi_4/d\varphi_2 = \omega_4/\omega_2 = i_{42}$ называется передаточным отношением. Аналогично определяется скорость точки E.

$$V_E = V_6 = \frac{dS_6}{dt} = \frac{dS_6}{d\varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{dS_6}{d\varphi_2} \omega_2.$$

С помощью второй производной от функции положения по времени определяют ускорения соответствующих звеньев механизма:

$$\varepsilon_4 = \frac{d^2\psi_4}{dt^2} = \frac{d\omega_4}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\psi_4}{d\varphi_2} \omega_2 \right) = \omega_2^2 \frac{d^2\psi_4}{d\varphi_2^2} + \frac{d\psi_4}{d\varphi_2} \varepsilon_2;$$

$$a_6 = \frac{d^2S_6}{dt^2} = \frac{dV_6}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dS_6}{d\varphi_2} \omega_2 \right) = \omega_2^2 \frac{d^2S_6}{d\varphi_2^2} + \frac{dS_6}{d\varphi_2} \varepsilon_2.$$

В обобщенных координатах:

$$\omega_j = \frac{d\psi_j}{dq} \dot{q}; \quad V_k = \frac{dS_k}{dq} \dot{q}. \quad (1)$$

$$\varepsilon_j = \dot{q}^2 \frac{d^2\psi_j}{dq^2} + \frac{d\psi_j}{dq} \ddot{q}; \quad S_k = \dot{q}^2 \frac{d^2S_k}{dq^2} + \frac{dS_k}{dq} \ddot{q}. \quad (2)$$

2. МЕТОД ПЛАНОВ ПОЛОЖЕНИЙ, СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

При выполнении кинематического анализа необходимо построить для известных обобщенных координат план положений. Под *планом положений* понимают условное графическое изображение механизма с указанием порядка соединения звеньев, с соблюдением основных размеров звеньев (построение в определенном масштабе) для заданного значения обобщенной координаты.

Масштабный коэффициент. Если какая либо величина D (например, длина l , скорость V , ускорение a и т. п.) изображена на чертеже отрезком, имеющим длину O , то масштабным коэффициентом μ_k , с помощью которого эта величина изображена, называется отношение действительного значения D к отрезку его изображающего O . $\mu_k = D/O$. Масштабный коэффициент μ_k обычно снабжается индексом, указывающим, к какой величине он относится. Например, масштабный коэффициент длин обозначается μ_l ; масштабный коэффициент линейных скоростей – μ_v ; масштабный коэффициент ускорений – μ_a ; масштабный коэффициент сил – μ_p и т. п.

Длины, скорости, ускорения, силы и т. п. берутся в международной системе единиц, т. е. соответственно в м, м/с, м/с², Н и т. п. Длина же отрезка O всегда измеряется в мм. Поэтому масштабный коэффициент μ_k является величиной, имеющей размерность. Например, масштабный коэффициент плана положений $\mu_l = l_{AB} / AB$. Размерность м/мм.

2.1. Построение траекторий точек механизма и крайних положений механизма

Крайним положением механизма называется положение, в котором хотя бы одно звено механизма занимает крайнее положение, т. е. положение, из которого оно может двигаться только в одном направлении, при этом его скорость будет равна нулю. Рассмотрим построение крайних положений для простейших механизмов.

2.1.1. Кривошипно-ползунный механизм

Рассмотрим крайние положения кривошипно-ползунного механизма. Они соответствуют крайнему правому и крайнему левому положениям ползуна 4. Для этого звенья AB и BC должны принадлежать одной линии, т. е. точки A , B и C будут лежать на одной прямой.

2.1.3. Кулисный механизм

Кулисный механизм с качающейся кулисой (рис. 4) соответствует крайнему правому и крайнему левому положениям кулисы 4 – DC' и DC'' . В этих положениях кулиса 4 и кривошип 2 взаимно перпендикулярны.

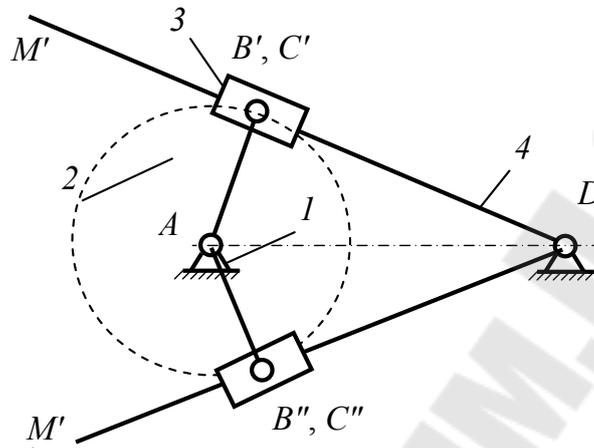


Рис. 4. Крайние положения кулисного механизма

2.2. Основные уравнения для скоростей и ускорений

Кинематическое исследование механизма методом построения планов скоростей и ускорений ведется по группам Ассур в порядке присоединения их к начальному звену и стойке. Для любой группы Ассур II класса рассматриваются три характерные точки (кинематические пары): две внешние точки, принадлежащие звеньям механизма, движение которых известно, и одну внутреннюю точку, скорость и ускорение которой надо определить. При составлении векторных уравнений используются два способа разложения движения:

- **1-й способ** применяется, когда известно движение одной точки звена и требуется определить движение другой точки этого же звена;
- **2-й способ** применяется, когда известно движение одного звена и надо определить движение второго звена и эти два звена образуют поступательную пару.

Чтобы применять графические методы кинематического исследования, необходимо научиться составлять векторные уравнения скоростей и ускорений для двух случаев. Каждый из этих случаев рассмотрим отдельно.

1-й способ: две точки принадлежат одному звену и удалены друг от друга на расстояние l .

Пусть в некотором звене (рис. 5) расположены точки A и B на расстоянии l друг от друга. Из теоретической механики известно, что скорость любой точки абсолютно твердого тела можно представить как геометрическую сумму скоростей переносного и относительного движений. Переносным движением для рассматриваемого звена будем считать поступательное движение со скоростью точки A , а относительным – вращательное движение звена вокруг точки A . Обозначая последнюю скорость через V_{BA} , получаем на основании сказанного следующее векторное уравнение для скорости точки B :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (3)$$

Скорость \vec{V}_{BA} перпендикулярна линии AB . Величины скорости \vec{V}_{BA} и угловой скорости звена связаны друг с другом формулой

$$V_{BA} = \omega_{BA} \cdot l_{BA}. \quad (4)$$

По направлению \vec{V}_{BA} можно найти направление ω_{BA} , и наоборот. Для этого вектор \vec{V}_{BA} нужно приложить в точке B . Направление ω_{BA} определяется в соответствии с направлением \vec{V}_{BA} (рис. 5). Так как переносное движение выбрано поступательным, то ускорение точки B также можно составить из двух ускорений: ускорения точки A и ускорения точки B при вращении звена вокруг точки A . Обозначая последнее ускорение через \vec{a}_{BA} , получаем $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$. Ускорение \vec{a}_{BA} в свою очередь, складывается из двух ускорений: нормального \vec{a}_{BA}^n , направленного к центру вращения, т. е. от точки B к точке A , и тангенциального \vec{a}_{BA}^t , направленного перпендикулярно линии AB .

На основании сказанного получаем следующее векторное уравнение для ускорения точки B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t. \quad (5)$$

Величины ускорений a_{BA}^n и a_{BA}^t можно определить по формулам:

$$a_{BA}^n = l_{BA} \omega_{BA}^2, \quad a_{BA}^t = l_{BA} \varepsilon_{BA}, \quad (6)$$

где ε_{BA} – угловое ускорение звена AB .

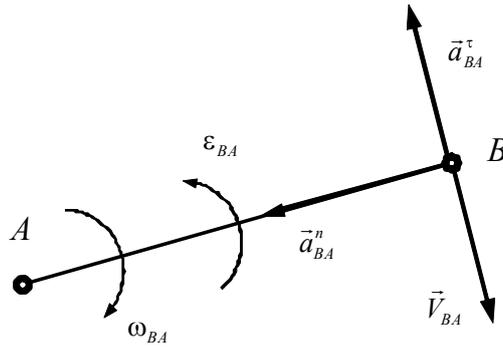


Рис. 5. Относительное движение двух точек звена

По направлению \vec{a}_{BA}^t можно определить направление ϵ_{BA} (см. рис. 5), и наоборот.

2-й способ: две точки принадлежат двум звеньям, образующим поступательную пару, и в данный момент времени совпадают.

Пусть точка A (рис. 6) принадлежит звену 1, а точка B – звену 2. В данный момент времени точки B и A совпадают (например, точка B лежит над точкой A). Чтобы не спутать, какая точка принадлежит какому звену, пишем около каждой точки в скобках номер звена, которому она принадлежит. Звенья 1 и 2 образуют поступательную пару с направляющей CD . В рассматриваемом случае скорость точки B также складывается из двух скоростей – переносной и относительной. Переносным движением здесь является движение звена 1, и переносной скоростью здесь будет скорость той точки звена 1, с которой в данный момент времени совпадает точка B (т. е. скорость точки A). Относительная скорость точки B равна скорости движения звена 2 относительно звена 1. При движении звена 2 относительно звена 1 точка B движется по прямой линии $\beta\beta$, параллельной направляющей CD . Поэтому относительная скорость, обозначаемая \vec{V}_{BA} , направлена по линии $\beta\beta$, т. е. параллельно CD .

Ускорение точки B , когда переносное движение не является поступательным, складывается из трех ускорений: переносного (т. е. ускорения точки A), относительного и кориолисова. В относительном движении точка B движется по прямой линии (CD). Поэтому в этом движении точка B имеет только ускорение скольжения, направленное по этой линии, т. е. параллельно направляющей CD . Обозначим это ускорение через \vec{a}_{BA}^{ck} . Поворотное ускорение обозначим через \vec{a}_{BA}^{kop} . Теперь формулы для скорости и ускорения точки B будут иметь вид

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{kop} + \vec{a}_{BA}^{ck}. \quad (7)$$

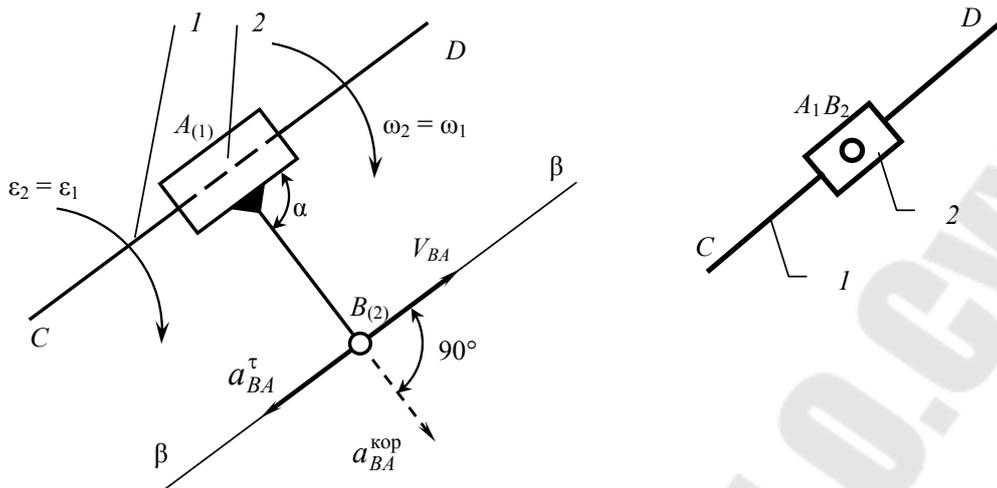


Рис. 6. Относительное движение двух совпадающих точек A и B , принадлежащих двум звеньям, образующих поступательную пару

Так как звенья 1 и 2 образуют поступательную пару, то они не имеют относительного вращения. Поэтому эти звенья обладают одинаковыми угловыми скоростями и угловыми ускорениями, т. е.

$$\omega_1 = \omega_2; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2. \quad (8)$$

Ускорение кориолиса $a_{BA}^{\text{кор}}$ вычисляется по формуле

$$a_{BA}^{\text{кор}} = 2\omega_e \cdot V_r = 2\omega_1 \cdot V_{BA}, \quad (9)$$

где V_r – линейная относительная скорость (скорость между точками B и A , $V_r = V_{BA}$); ω_e – угловая переносная скорость (угловая скорость направляющей, т. е. звена 1 : $\omega_e = \omega_1$). $a_{BA}^{\text{кор}} = 2\omega_1 \cdot V_{BA}$.

Для определения направления ускорения Кориолиса $a_{BA}^{\text{кор}}$ необходимо вектор относительной скорости \vec{V}_r (\vec{V}_{BA}) повернуть на 90° по дуговому направлению угловой переносной скорости ω_e (ω_1).

2.3. Общие положения плана скоростей и плана ускорений

Планы скоростей и ускорений. Планом скоростей механизма называется чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению скоростям различных точек звеньев механизма в данный момент времени. Полюс плана скоростей механизма обозначается буквой p . Планом ускорений механизма называется чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению ускорениям различных точек

звеньев механизма в данный момент времени. Полус плана ускорений механизма обозначается буквой π .

План скоростей и ускорений начального звена. Если начальное звено механизма (рис. 7) совершает вращательное движение, то его угловая координата φ_2 является обобщенной координатой. Скорость точки, например, B этого звена \vec{V}_B перпендикулярна прямой BA и может быть изображена вектором \vec{V}_B на плане механизма или вектором \overline{pb} на плане скоростей. Масштабный коэффициент плана скоростей при этом будет равен $\mu_v = V_B / pb$, $\text{м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}$. Аналогичные рассуждения проведем относительно скорости \vec{V}_C точки C и точки D . Соединим прямыми линиями точки a, b, d, c на плане скоростей и A, B, C, D на плане механизма. Полученные фигуры подобны. Отношения подобия определяются масштабами плана скоростей, плана механизма и угловой скоростью начального звена.

$$\frac{ab \cdot \mu_v}{BA \cdot \mu_l} = \frac{V_B}{l_{AB}} = \omega_2 = \frac{ac \cdot \mu_v}{AC \cdot \mu_l} = \frac{V_C}{l_{AC}} = \frac{bc \cdot \mu_v}{BC \cdot \mu_l} = \frac{V_{BC}}{l_{BC}}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{ab}{BA} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC}. \quad (10)$$

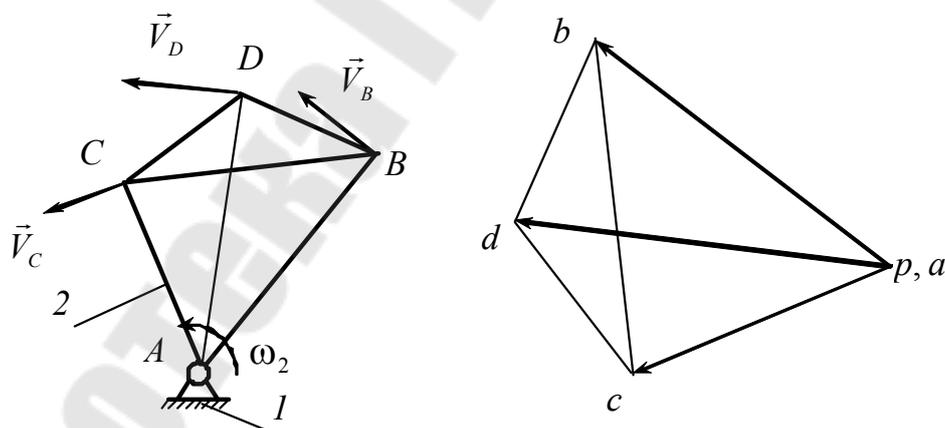


Рис. 7. План положений и план скоростей входного звена

Теорема подобия для скоростей. Прямые линии, соединяющие точки на плане звена, и прямые линии, соединяющие концы векторов скоростей этих точек на плане скоростей, образуют подобные фигуры. Фигура на плане скоростей повернута относительно фигуры на плане звена на 90° .

Ускорение точки B \vec{a}_B равно геометрической сумме нормально-го \vec{a}_B^n и тангенциального \vec{a}_B^τ . Соответствующие векторы на плане ускорений построены по следующим соотношениям: $a_B^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}$, $\pi n_{AB} = a_B^n / \mu_a$, $a_B^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_{AB}$, $n_{AB} b = a_B^\tau / \mu_a$, где μ_a – масштаб плана ускорений, $\text{м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм}$. Вектор \vec{a}_B^n направлен по прямой BA от точки B к точке A , вектор \vec{a}_B^τ перпендикулярен прямой BA . Аналогичные рассуждения проведем относительно ускорений \vec{a}_C точки C и точки D . Соединим прямыми точки a, b, d, c на плане скоростей и A, B, C, D на плане механизма. Полученные фигуры подобны.

$$\frac{ab}{BA} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC}. \quad (11)$$

Теорема подобия для ускорений. Прямые линии, соединяющие точки на плане звена, и прямые линии, соединяющие концы векторов полных ускорений этих точек на плане ускорений, образуют подобные фигуры.

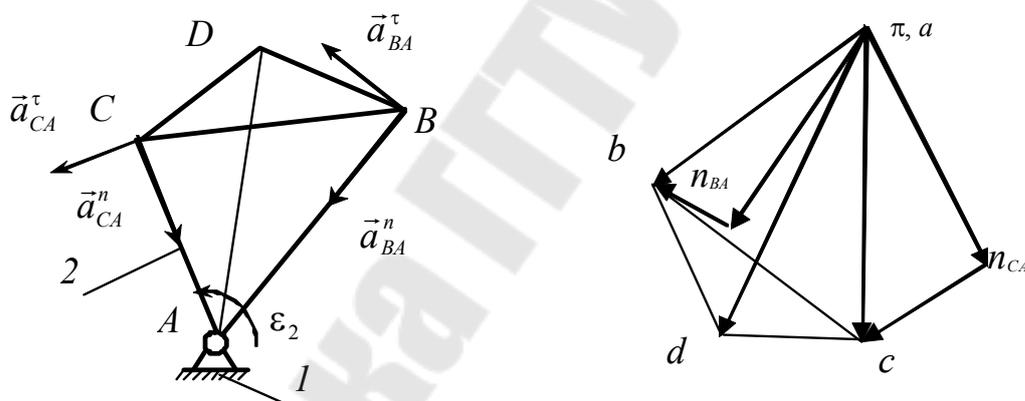


Рис. 8. План положений и план ускорений входного звена

2.4. Построение планов положений механизма

При выполнении кинематического исследования плоского рычажного механизма необходимо построить 8 планов положений. Построение плана положений рассмотрим на примере следующего механизма изображенного на рис. 1. Заданы координаты неподвижных точек A, D и положение оси направляющей y_1-y_2 , расположенной в плоскости чертежа, длины звеньев $l_{AB}, l_{GD}, l_{HG}, l_{GF}$ и l_a .

Приведем алгоритм построение планов положений механизма:

1. Определяют масштабный коэффициент μ_l плана положений механизма. Для этого приближенно, анализируя кинематическую схему механизма, определяют габаритный размер L по горизонтали и вертикали (габаритный размер по горизонтали – это расстояние, измеренное по горизонтали, между двумя наиболее удаленными точками механизма). Тогда ориентировочно масштабный коэффициент μ_l плана положение равен:

$$\mu_l = L/H, \text{ м/мм,}$$

где H – максимальный отрезок на чертеже по горизонтали (вертикали), отражающий габаритный размер, принимаемый произвольно. Для шестизвенного механизма H рекомендуется выбирать в диапазоне (200÷350) мм.

Округляя ориентировочный масштабный коэффициент до ближайшего гостированного значения коэффициента (см. ГОСТ 2.30268), получаем масштабный коэффициент μ_l .

2. Зная масштабный коэффициент μ_l , определяем длины отрезков, изображающие все звенья механизма:

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l}, \quad GD = \frac{l_{GD}}{\mu_l}, \quad HG = \frac{l_{HG}}{\mu_l}, \quad GF = \frac{l_{GF}}{\mu_l}, \quad a = \frac{l_a}{\mu_l}, \text{ мм.}$$

3. Делаем разметку чертежного листа, т. е. по размерам звеньев механизма определяют расположение оси вращения кривошипа (т. А) и рисуем стойку.

Проводим окружность радиусом AB – определяем траекторию движения характерной точки B на входном звене механизма (рис. 9).

4. Строим нулевое положение механизма, соответствующее крайнему положению выходного звена (при выполнении курсового проекта, как правило, выходное звено принадлежит 1-й группе Ассура и образует со стойкой вращательную либо поступательную кинематическую пару) (рис. 9). Методика определения крайних положений типовых четырехзвенных механизмов приведена в п. 2.1.

5. Разбиваем окружность радиусом AB на 8 равных частей. При $\omega = \text{const}$ равные углы поворота кривошипа соответствуют равным промежуткам времени. Полученные точки нумеруем по направлению угловой скорости ω кривошипа начиная с нулевой точки (B_0) и соединяем их с осью A вращения кривошипа (см. рис. 10). Отрезки AB_i

($i = 0, 1, \dots, 7$) соответствуют 8 планам положений начального механизма.

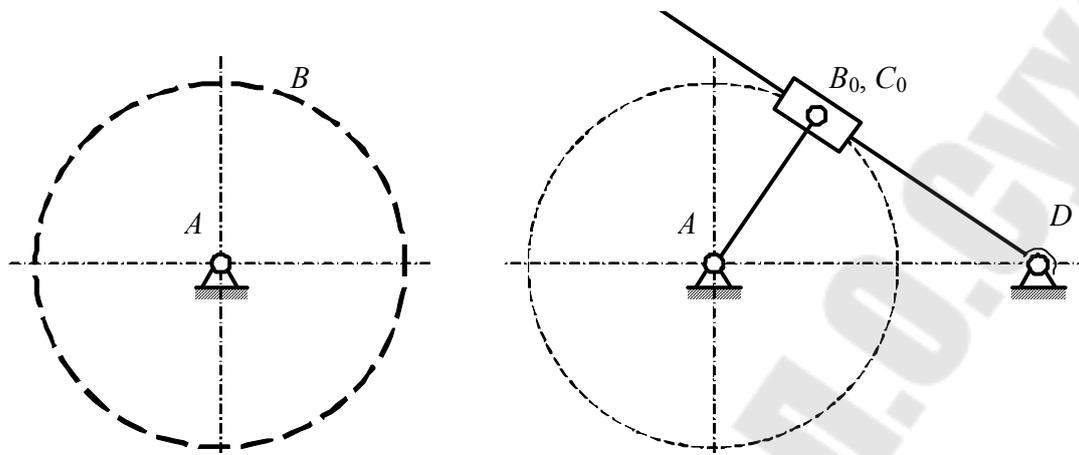


Рис. 9. Построение плана положений

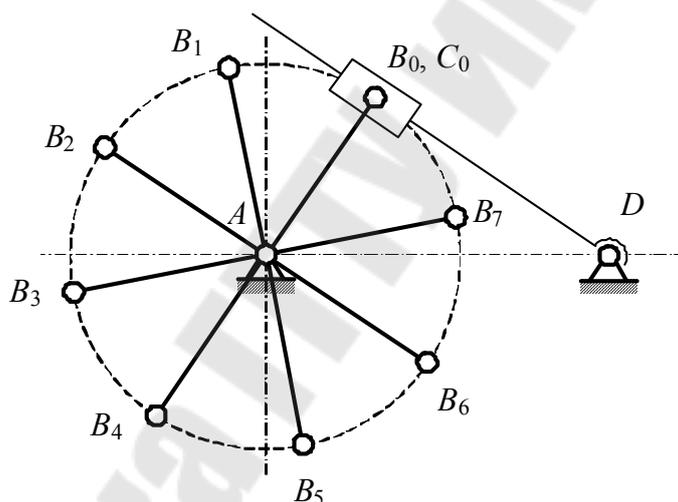


Рис. 10. Построение плана положений

6. Строим план положений 1-й группы Ассура (метод засечек). Определяем положение характерных точек первой структурной группы (свободных кинематических пар присоединения) в каждом положении начального звена. Для нулевого положения: точка C на плане положения совпадает с точкой B ; точка D неподвижна и ее положение определяется линейным параметром AD . Соединив точки C и D , определим положение звена CD (рис. 11). Проводим окружность радиуса DH и находим на прямой CD положение точки H .

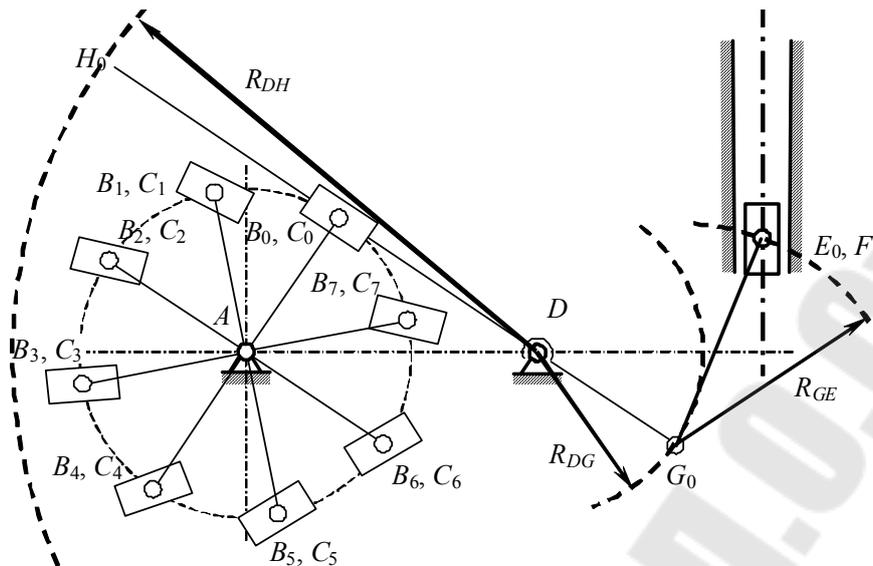


Рис. 11. Построение плана положений

Строим план положений 2-й группы Ассура. Определяем положение характерных точек группы Ассура: показываем неподвижную направляющую y_1-y_1 , проводим окружность радиуса DG и находим на прямой CD положение точки G . Положение точки F , движущейся по направляющей y_1-y_1 , получим на пересечении оси y_1-y_1 с дугой окружности, описанной из точки G радиусом GF . Соединив точку F с точкой G , получим положение звена 5 и ползуна 6 (рис. 11).

Аналогично строим остальные планы положений механизма (рис. 12).

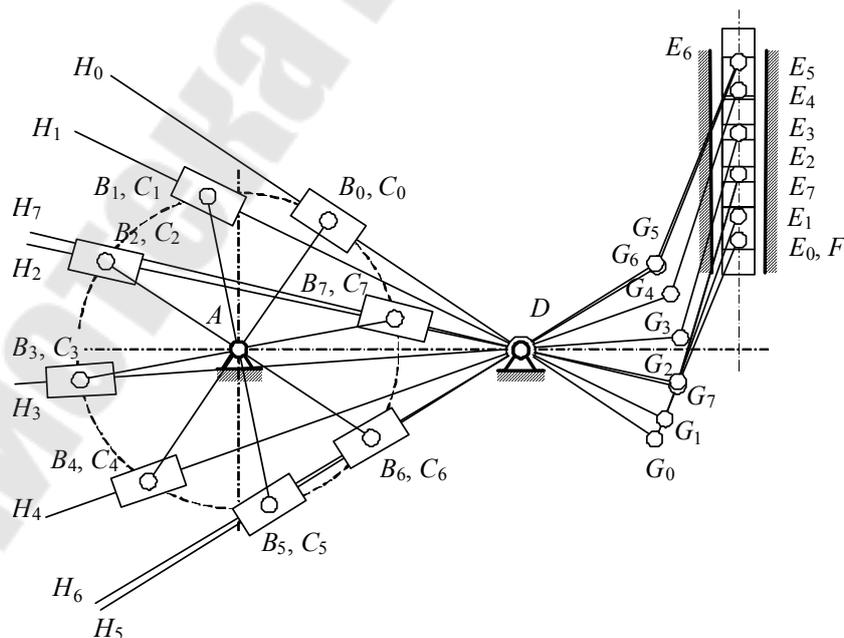


Рис. 12. Построение плана положений

2.5. Построение планов скоростей и ускорений механизма

Приведем примеры кинематического анализа типовых четырехзвенных механизмов.

2.5.1. Кривошипно-ползунный механизм

Построить план скоростей и план ускорений для заданного положения кривошипно-ползунного механизма рис. 13 (группа Ассура II класса 2-го типа). Известны размеры звеньев l_{AB} и l_{BC} и угловая скорость звена 2: $\omega_2 = \text{const}$.

Для звена 2 определяем величину скорости точки B : $V_B = \omega_2 \cdot l_{AB}$. Вектор \vec{V}_B перпендикулярен отрезку AB и направлен в сторону, соответствующую направлению ω_2 . Выбираем произвольный по величине отрезок pb . Тогда масштабный коэффициент плана скоростей определяется по формуле: $\mu_v = V_B / pb$. Выбираем полюс плана скоростей p . Через полюс проводим прямую, перпендикулярную AB и откладываем отрезок pb по направлению \vec{V}_B . Скорость точки A равна нулю: $V_A = 0$. Следовательно, точка a на плане скоростей будет совпадать с полюсом p .

Приведем здесь алгоритм расчета группы Ассура II класса 2-го типа. Выразим скорость внутренней характерной точки C группы Ассура (внутренней кинематической пары C) относительно внешних характерных точек группы Ассура B и D (внешних кинематических пар B и D). В векторной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}; \\ \vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}, \end{cases} \quad (12)$$

где \vec{V}_C – абсолютная скорость точки C ; \vec{V}_B – абсолютная скорость точки B ; \vec{V}_{CB} – относительная скорость точки C относительно B ; \vec{V}_D – абсолютная скорость точки D ; \vec{V}_{CD} – относительная скорость точки C относительно D .

Выражаем скорость внешних характерных точек группы Ассура B и D (внешних кинематических пар B и D). Скорость точки B уже определена. Кинематическая пара D является поступательной кинематической парой. В этом случае точка D принадлежит только одному звену –

направляющей (в нашем случае направляющая является стойкой). Следовательно, скорость точки D равна нулю: $\vec{V}_D = 0$.

Кинематическая пара C – вращательная, следовательно точка C принадлежит одновременно двум звеньям, образующим эту кинематическую пару, т. е. звеньям 3 и 4.

Рассмотрим относительную скорость точки C относительно B \vec{V}_{CB} :

– точки C и B принадлежат одному звену 3 (1-й способ разложения движения);

– вектор относительной скорости точки C относительно B направлен по касательной к траектории относительного движения, т. е. лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку CB : $\vec{V}_{CB} \perp CB$.

Рассмотрим относительную скорость точки C относительно D \vec{V}_{CD} :

– точки C и D принадлежат двум звеньям (2-й способ разложения движения);

– вектор относительной скорости точки C относительно D лежит на прямой, параллельной направляющей $\vec{V}_{CD} \parallel x-x$.

Согласно векторным уравнениям (12) проводим построения на плане скоростей. Скорость точки D равна нулю, следовательно, точка d совпадает с полюсом p . Применяем правило треугольника для сложения векторов. 1-е уравнение: через точку b проводим прямую, перпендикулярную BC ; 2-е уравнение: через точку d проводим прямую, параллельную $x-x$. Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку c . Отрезок pc плана скоростей изображает в выбранном масштабе скорость точки C : $V_C = pc \cdot \mu_v$. Как видно из чертежа, вектору относительной скорости \vec{V}_{CB} на плане скоростей соответствует отрезок bc со стрелкой, направленной к точке c , т. е. буквенное обозначение вектора относительной скорости на плане скоростей следует читать в порядке, обратном по сравнению с порядком букв в индексе соответствующей скорости. Величина относительной скорости: $V_{CB} = bc \cdot \mu_v$.

Пользуясь построенным планом скоростей, определим угловую скорость звена 3 и звена 4:

$$\omega_3 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{bc \cdot \mu_v}{BC \cdot \mu_l}, \quad \omega_4 = \omega_1 = 0, \text{ с}^{-1}.$$

Для определения направления ω_3 переносим вектор скорости \vec{V}_{CB} в точку C механизма и рассматриваем движение точки C относитель-

но точки B в направлении скорости \vec{V}_{CB} . На рис. 13 показано направление ω_3 .

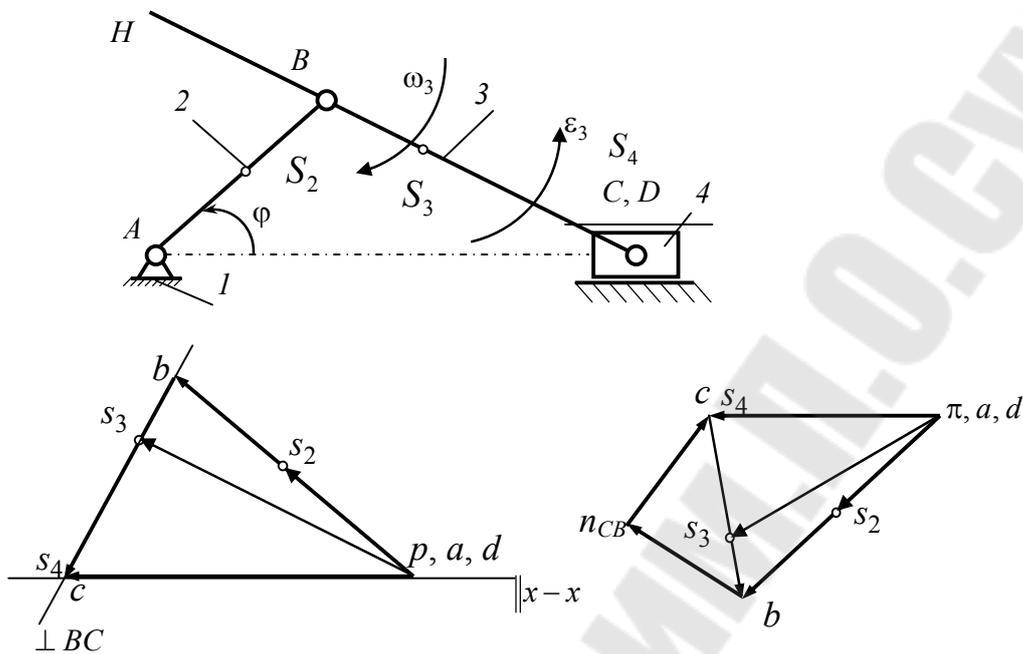


Рис. 13. План положений, план скоростей и план ускорений кривошипно-ползунного механизма

Для определения скорости центров масс звеньев воспользуемся теоремой подобия. Покажем центры масс звеньев на плане положений:

- звено 2 – точка S_2 делит звено 2 (AB) пополам, $AS_2 = AB/2$;
- звено 3 – точка S_3 делит звено 3 (CH) пополам, $CS_3 = CH/2$;
- звено 4 – точка S_4 совпадает с точкой C .

Тогда на плане скоростей получим:

- точка s_2 делит отрезок ab пополам, $as_2 = ab/2$;
- точка s_3 : $cs_3/CS_3 = cb/CB$, $cs_3 = (cb \cdot CS_3)/CB$;
- точка s_4 совпадает с точкой c .

На плане скоростей показываем точки s_2, s_3, s_4 . Тогда:

$$V_{s_2} = ps_2 \cdot \mu_v, \text{ м/с}; V_{s_3} = ps_3 \cdot \mu_v, \text{ м/с}; V_{s_4} = ps_4 \cdot \mu_v, \text{ м/с}.$$

Построение плана ускорений начинаем с определения ускорения точки B . Так как угловая скорость кривошипа принята постоянной, то ускорение точки B состоит только из нормального ускорения, величина которого определяется по формуле

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}, \text{ м/с}^2 \quad (\varepsilon_2 = d\omega_2/dt = 0, a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_{AB} = 0).$$

Направлено это ускорение по кривошипу AB от точки B к точке A (к центру вращения). Выбираем произвольный отрезок πb . Масштабный коэффициент плана ускорений определяется отношением $\mu_a = a_B / \pi b$. Выбираем полюс плана ускорений π . Через полюс проводим прямую, параллельную AB , и откладываем отрезок πb по направлению \vec{a}_B . Ускорение точки A равно нулю: $a_A = 0$. Следовательно, точка a на плане ускорений будет совпадать с полюсом π .

Рассматриваем группу Ассура. Выразим ускорение внутренней характерной точки C группы Ассура (кинематической пары C) относительно внешних характерных точек группы Ассура B и D (внешних кинематических пар B и D). При этом учтем: точки C и B принадлежат одному звену 3 (1-й способ разложения движения); точки C и D принадлежат двум звеньям (2-й способ разложения движения).

В векторной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau; \\ \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^{\text{кор}} + \vec{a}_{CD}^{\text{ск}}, \end{cases} \quad (13)$$

где \vec{a}_C – абсолютное ускорение точки C ; \vec{a}_B – абсолютное ускорение точки B ; \vec{a}_{CB}^n – нормальное ускорение точки C относительно B ; \vec{a}_{CB}^τ – относительное касательное (тангенциальное) ускорение точки C относительно B ; \vec{a}_D – абсолютное ускорение точки D ; $\vec{a}_{CD}^{\text{кор}}$ – ускорение кориолиса точки C относительно D ; $\vec{a}_{CD}^{\text{ск}}$ – ускорение скольжения точки C относительно D .

Выражаем ускорение внешних характерных точек группы Ассура B и D (внешних кинематических пар B и D).

Точка B принадлежит звеньям 2 и 3. Ускорение точки B , принадлежащей 2-му звену, уже определено. Точка D принадлежит стойке. Следовательно, ускорение точки D равно нулю: $\vec{a}_D = 0$.

Рассмотрим относительные ускорения точки C относительно B : – величина нормального ускорения определяется по формуле

$$a_{CB}^n = \omega_3^2 l_{CB} = \omega_{CB}^2 l_{CB}, \text{ м/с}^2;$$

– длина отрезка bn_{CB} , изображающего на плане ускорений a_{CB}^n , равна

$$bn_{CB} = a_{CB}^n / \mu_a, \text{ мм};$$

– вектор нормального ускорения $\vec{a}_{CB}^{\rightarrow n}$ (при вращательном движении относительно точки B) направлен к центру вращения, т. е. параллельно CB от C к B ; вектор тангенциального ускорения $\vec{a}_{CB}^{\rightarrow \tau}$ точки C относительно B направлен по касательной к траектории относительного движения, т. е. лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку CB : $\vec{a}_{CB}^{\rightarrow \tau} \perp CB$.

Рассмотрим относительные ускорения точки C относительно D .

Ускорение кориолиса $a_{CD}^{\text{кор}}$ вычисляется по формуле (9). В нашем случае: V_r – линейная относительная скорость, т. е. скорость между точками C и D , $V_r = V_{CD}$; ω_e – угловая переносная скорость (угловая скорость направляющей, т. е. звена I), $\omega_e = \omega_1 = 0$. Следовательно, $a_{CD}^{\text{кор}} = 2\omega_e \cdot V_r = 2\omega_1 \cdot V_{CD} = 0$.

Длина отрезка dk_{CD} , изображающего на плане ускорений $a_{CD}^{\text{кор}}$, равна

$$dk_{CD} = a_{CD}^{\text{кор}} / \mu_a = 0, \text{ мм.}$$

Вектор ускорения скольжения $\vec{a}_{CD}^{\text{ск}}$ точки C относительно D направлен по направляющей, т. е. параллельно оси x : $\vec{a}_{CD}^{\text{ск}} \parallel x - x$.

Согласно векторным равенствам (13) проводим построения на плане ускорений. Ускорение точки D равно нулю, следовательно, точка d совпадает с полюсом π . Применяем правило треугольника для сложения векторов. 1-е уравнение: через точку b проводим луч, параллельный звену CB в направлении от C к B , и на нем откладываем подсчитанный отрезок bn_{CB} , изображающий $\vec{a}_{CB}^{\rightarrow n}$, а через конец этого направленного отрезка проводим прямую, перпендикулярную BC . 2-е уравнение: ускорение кориолиса равно нулю, следовательно, точка k_{CD} совпадает с точкой d . Через точку k_{CD} проводим прямую, параллельную $x-x$.

Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку c . Отрезок πc плана ускорений изображает в выбранном масштабе ускорение точки C : $a_C = \pi c \cdot \mu_a$.

Пользуясь построенным планом ускорений, определим угловое ускорение звена 3 и звена 4 :

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{CB}^{\rightarrow \tau}}{l_{CB}} = \frac{n_{CB}c \cdot \mu_v}{BC \cdot \mu_l}, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_1 = 0, \quad \text{с}^{-2}.$$

Для определения направления ε_3 переносим вектор касательного ускорения \vec{a}_{CB}^τ в точку C механизма и рассматриваем движение точки C относительно точки B в направлении ускорения \vec{a}_{CB}^τ . На рис. 13 показано дуговое направление ε_3 .

Для определения ускорений центров масс звеньев воспользуемся теоремой подобия.

Положение характерных точек s_2, s_3, s_4 на плане ускорений определяем по следующим условиям:

- точка s_2 делит отрезок ab пополам, $as_2 = ab/2$;
- точка s_3 : $cs_3/CS_3 = cb/CB$, $cs_3 = (cb \cdot CS_3)/CB$;
- точка s_4 совпадает с точкой c .

На плане ускорений показываем точки s_2, s_3, s_4 . Тогда:

$$a_{s_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2; \quad a_{s_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2; \quad a_{s_4} = \pi s_4 \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2.$$

2.5.2. Кулисный механизм

Для механизма с качающейся кулисой построить план скоростей и план ускорений при заданной $\omega_2 = \text{const}$ и заданных размерах l_{AB} и l_{AD} (группа Ассура II класса 3-го типа).

Определяем величину скорости точки B : $V_B = \omega_2 \cdot l_{AB}$. Вектор \vec{V}_B перпендикулярен отрезку AB и направлен в сторону, соответствующую направлению ω_2 . Выбираем произвольный по величине отрезок pb . Масштабный коэффициент плана скоростей определяется по формуле $\mu_v = V_B / pb$. Выбираем полюс плана скоростей p . Через полюс проводим прямую, перпендикулярную AB и откладываем отрезок pb по направлению \vec{V}_B . Скорость точки A равна нулю: $V_A = 0$. Точка a на плане скоростей будет совпадать с полюсом p .

Приведем здесь алгоритм расчета группы Ассура II класса 3-го типа. Выразим скорость внутренней характерной точки C группы Ассура (внутренней кинематической пары C) относительно внешних характерных точек группы Ассура B и D (внешних кинематических пар B и D). В векторной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}; \\ \vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}. \end{cases} \quad (14)$$

Выражаем скорость внешних характерных точек группы Ассур B и D (внешних кинематических пар B и D). Скорость точки B определена. Кинематическая пара D является вращательной кинематической парой. Точка D принадлежит двум звеньям, образующим эту кинематическую пару, т. е. звеньям 1 и 4 . Следовательно, скорость точки D равна нулю $\vec{V}_D = 0$. Кинематическая пара C – поступательная. Точка C принадлежит одному звену – звену 4 (направляющей).

Точки C и B принадлежат двум звеньям (2-й способ разложения движения): $\vec{V}_{CB} \parallel DH$. Точки C и D принадлежат одному звену (1-й способ разложения движения): $\vec{V}_{CD} \perp CD$.

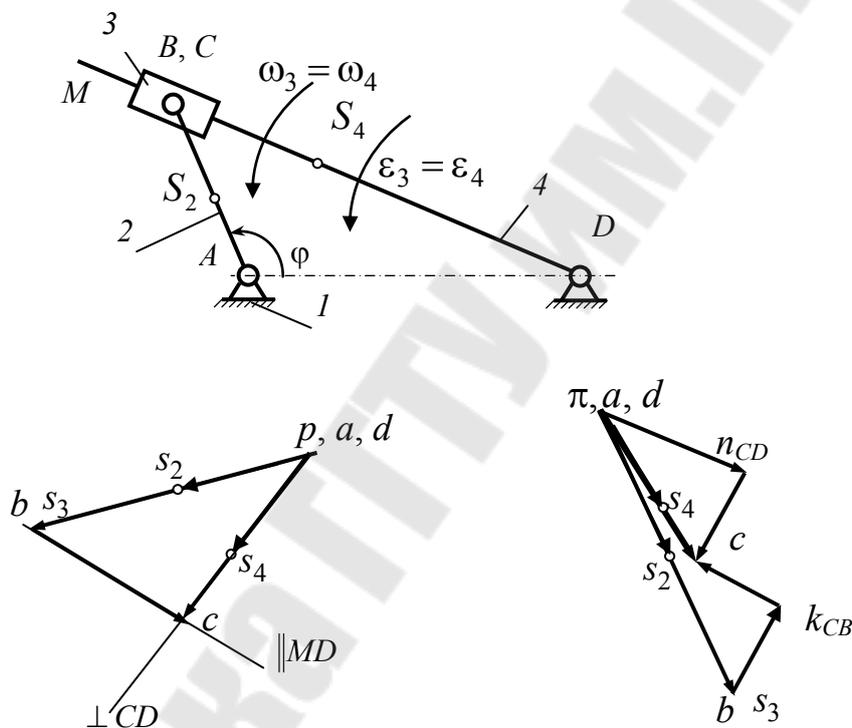


Рис. 14. План положений, план скоростей и план ускорений кулисного механизма

Строим план скоростей. Скорость точки D равна нулю, следовательно, точка d совпадает с полюсом p . 1-е уравнение: через точку b проводим прямую, параллельную DH ; 2-е уравнение: через точку d проводим прямую, перпендикулярную DC . Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку c . Как видно из чертежа, вектору относительной скорости \vec{V}_{CB} на плане скоростей соответствует отрезок bc со стрелкой, направленной к точке c . Величина относительной скорости определяется по формуле $V_{CB} = bc \cdot \mu_v$.

Пользуясь построенным планом скоростей, определим угловую скорость звена 4 и звена 3:

$$\omega_4 = \frac{V_{CD}}{l_{CD}} = \frac{dc \cdot \mu_v}{DC \cdot \mu_l}, \quad \omega_3 = \omega_4, \quad \text{с}^{-1}.$$

Для определения направления ω_4 переносим вектор скорости \vec{V}_{CD} в точку C механизма и рассматриваем движение точки C относительно точки D в направлении скорости \vec{V}_{CD} . На рис. 14 показано направление ω_4 .

Скорости центров масс звеньев определим по теореме подобия. Покажем центры масс звеньев на плане положений:

- звено 2 – точка S_2 делит звено 2 (AB) пополам, $AS_2 = AB/2$;
- звено 3 – точка S_3 совпадает с точкой B ;
- звено 4 – точка S_4 делит звено 4 (DH) пополам, $DS_4 = DH/2$;

Тогда на плане скоростей получим:

- точка s_2 делит отрезок ab пополам, $as_2 = ab/2$;
- точка s_3 совпадает с точкой b ;
- точка s_4 : $ds_4 / DS_4 = cd / CD$, $ds_4 = (cd \cdot DS_4) / CD$.

На плане скоростей показываем точки s_2, s_3, s_4 . Тогда:

$$V_{s_2} = ps_2 \cdot \mu_v, \text{ м/с}; \quad V_{s_3} = ps_3 \cdot \mu_v, \text{ м/с}; \quad V_{s_4} = ps_4 \cdot \mu_v, \text{ м/с}.$$

Построение плана ускорений начинаем с определения ускорения точки B :

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}, \text{ м/с}^2 \quad (\vec{a}_{BA}^\tau = 0).$$

Направлено это ускорение по кривошипу AB от точки B к точке A (к центру вращения). Выбираем произвольный отрезок πb . Масштабный коэффициент плана ускорений определяется отношением $\mu_a = a_B / \pi b$. Выбираем полюс плана ускорений π . Через полюс проводим прямую, параллельную AB и откладываем отрезок πb по направлению \vec{a}_B . Ускорение точки A равно нулю: $a_A = 0$. Следовательно, точка a на плане ускорений будет совпадать с полюсом π .

Рассматриваем группу Ассура. Выразим ускорение внутренней характерной точки C группы Ассура (внутренней кинематической пары C) относительно внешних характерных точек группы Ассура B и D (внешних кинематических пар B и D). При этом учтем: точки C и D принадлежат одному звену – звену 4 (1-й способ разложения движе-

ния); точки C и B принадлежат двум звеньям (2-й способ разложения движения). В векторной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^{\text{кор}} + \vec{a}_{CB}^{\text{ск}}; \\ \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}^n + \vec{a}_{CD}^{\tau}. \end{cases} \quad (15)$$

Ускорение точки B , принадлежащей 2-му звену, уже определено. Ускорение точки D равно нулю: $\vec{a}_D = 0$.

Рассмотрим относительные ускорения точки C относительно B : ускорение кориолиса $a_{CB}^{\text{кор}}$ вычисляется по формуле (9). В нашем случае: V_r – линейная относительная скорость, т. е. скорость между точками C и B , $V_r = V_{CB}$; ω_e – угловая переносная скорость (угловая скорость направляющей, т. е. звена 4), $\omega_e = \omega_4$.

Следовательно, $a_{CB}^{\text{кор}} = 2\omega_e \cdot V_r = 2\omega_4 \cdot V_{CB}$.

Длина отрезка bk_{CB} , изображающего на плане ускорений $a_{CB}^{\text{кор}}$, равна

$$bk_{CB} = a_{CB}^{\text{кор}} / \mu_a, \text{ мм.}$$

Вектор ускорения скольжения $\vec{a}_{CB}^{\text{ск}}$ точки C относительно B направлен по направляющей, т. е. параллельно кулисе, $\vec{a}_{CB}^{\text{ск}} \parallel DC$.

Рассмотрим относительные ускорения точки C относительно D :
– величина нормального ускорения определяется по формуле

$$a_{CD}^n = \omega_4^2 l_{CD} = \omega_{CD}^2 l_{CD}, \text{ м/с}^2;$$

– длина отрезка dn_{CD} , изображающего на плане ускорений a_{CD}^n , равна

$$dn_{CD} = a_{CD}^n / \mu_a, \text{ мм};$$

– вектор нормального ускорения \vec{a}_{CD}^n направлен к центру вращения, т. е. параллельно CD от C к D ; вектор тангенциального ускорения \vec{a}_{CD}^{τ} направлен по касательной к траектории относительного движения, т. е. лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку CD : $\vec{a}_{CD}^{\tau} \perp CD$.

Строим план ускорений. Ускорение точки D равно нулю, следовательно, точка d совпадает с полюсом π . 1-е уравнение: направле-

ние кориолисова ускорения $\vec{a}_{CB}^{\text{кор}}$ находится путем поворота относительной скорости \vec{V}_{CB} на 90° в направлении переносного вращения, т. е. в направлении вращения направляющей (по дуговому направлению ω_4) (рис. 15).

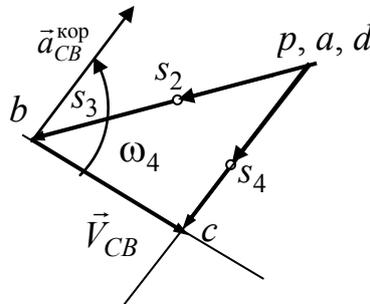


Рис. 15. Определение направления ускорения кориолиса

На плане скоростей относительной скорости \vec{V}_{CB} соответствует отрезок (cb) со стрелкой в сторону c . Этот отрезок и надо поворачивать на 90° в сторону ω_4 . Следовательно, через точку b проводим луч по направлению $\vec{a}_{CB}^{\text{кор}}$ и на нем откладываем подсчитанный отрезок bk_{CB} , изображающий $\vec{a}_{CB}^{\text{кор}}$. Далее через точку k_{CB} проводим прямую, параллельную DC . 2-е уравнение: через точку d проводим луч, параллельный звену CD в направлении от C к D , и на нем откладываем подсчитанный отрезок dn_{CD} , изображающий \vec{a}_{CD}^n , а через конец этого направленного отрезка проводим прямую, перпендикулярную DC . Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку s .

Отрезок ps плана ускорений изображает в выбранном масштабе ускорение точки C : $a_C = ps \cdot \mu_a$.

Пользуясь построенным планом ускорений, определим угловое ускорение звена 4 и звена 3:

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{CD}^\tau}{l_{CD}} = \frac{n_{CD}c \cdot \mu_v}{DC \cdot \mu_l}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4, \quad \text{с}^{-2}.$$

Для определения направления ε_4 переносим вектор ускорения \vec{a}_{CD}^τ в точку C механизма и рассматриваем движение точки C относительно точки D в направлении ускорения \vec{a}_{CD}^τ . На рис. 14 показано направление ε_4 .

Для определения ускорений центров масс звеньев воспользуемся теоремой подобия (см. формулы для скоростей). Тогда:

$$a_{s_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2; a_{s_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2; a_{s_4} = \pi s_4 \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2.$$

2.5.3. Шарнирный четырехзвенный механизм

Построить план скоростей и план ускорений для заданного положения шарнирного четырехзвенного механизма (рис. 16), если известны размеры звеньев механизма и $\omega_2 = \text{const}$ (группа Ассура II класса 1-го типа).

Скорость точки B : $V_B = \omega_2 \cdot l_{AB}$, $\vec{V}_B \perp AB$ и направлен в сторону, соответствующую направлению ω_2 . Выбираем отрезок pb . Тогда масштабный коэффициент плана скоростей определяется по формуле $\mu_v = V_B / pb$. Выбираем полюс плана скоростей p . Через полюс проводим прямую, перпендикулярную AB , и откладываем отрезок pb по направлению \vec{V}_B . Скорость точки A равна нулю: $V_A = 0$. Следовательно, точка a на плане скоростей будет совпадать с полюсом p .

Выразим скорость внутренней характерной точки C группы Ассура относительно внешних характерных точек (внешних кинематических пар). В векторной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}; \\ \vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}. \end{cases} \quad (16)$$

Выражаем скорость внешних характерных точек группы Ассура B и D (внешних кинематических пар B и D).

Скорость точки B , принадлежащая 2-му звену, уже определена. Скорость точки D равна нулю: $\vec{V}_D = 0$.

Точки C и B принадлежат одному звену – звену 3 (1-й способ разложения движения), $\vec{V}_{CB} \perp CB$. Точки C и D принадлежат одному звену – звену 4 (1-й способ разложения движения), $\vec{V}_{CD} \perp CD$.

Согласно векторным уравнениям (16) проводим построения на плане скоростей. Скорость точки D равна нулю, следовательно точка d совпадает с полюсом p . 1-е уравнение: через точку b проводим прямую, перпендикулярную BC ; 2-е уравнение: через точку d проводим прямую, перпендикулярную DC . Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку c . Как видно из чертежа, вектору относи-

тельной скорости \vec{V}_{CB} на плане скоростей соответствует отрезок bc со стрелкой, направленной к точке c , вектору относительной скорости \vec{V}_{CD} на плане скоростей соответствует отрезок dc со стрелкой, направленной к точке c . Величины относительных скоростей:

$$V_{CB} = bc \cdot \mu_v; \quad V_{CD} = dc \cdot \mu_v.$$

Угловую скорость звена 3 и звена 4 определяем по формулам:

$$\omega_3 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{bc \cdot \mu_v}{BC \cdot \mu_l}, \quad \omega_4 = \frac{V_{CD}}{l_{CD}} = \frac{dc \cdot \mu_v}{DC \cdot \mu_l}, \quad c^{-1}.$$

Для определения направления ω_3 переносим вектор скорости \vec{V}_{CB} в точку C механизма и рассматриваем движение точки C относительно точки B в направлении скорости \vec{V}_{CB} , а для определения направления ω_4 переносим вектор скорости \vec{V}_{CD} в точку C механизма и рассматриваем движение точки C относительно точки D в направлении скорости \vec{V}_{CD} . На рис. 16 показано направление ω_3 и ω_4 .

Скорости центров масс звеньев определим по теореме подобия. Покажем центры масс звеньев на плане положений:

- звено 2 – точка S_2 делит звено 2 (AB) пополам, $AS_2 = AB/2$;
- звено 3 – точка S_3 делит звено 3 (CB) пополам, $CS_3 = CB/2$;
- звено 4 – точка S_4 делит звено 4 (CD) пополам, $DS_4 = CD/2$;
- точка S'_4 делит звено CE пополам, $CS'_4 = CE/2$;
- точка S''_4 делит звено DE пополам, $DS''_4 = DE/2$.

Тогда на плане скоростей получим:

- точка s_2 делит отрезок ab пополам, $as_2 = ab/2$;
- точка s_3 делит отрезок cb пополам, $cs_3 = cb/2$.

Положение точки e : $\frac{ce}{CE} = \frac{cd}{CD} = \frac{de}{DE}$, $ce = \frac{cd}{CD}CE$, $de = \frac{cd}{CD}DE$.

Методом циркульных засечек определяем положение точки e .

- Точка s_4 делит отрезок cd пополам, $ds_4 = cd/2$;
- точка s'_4 делит отрезок ec пополам, $cs'_4 = ce/2$;
- точка s''_4 делит отрезок ed пополам, $ds''_4 = de/2$.

На плане скоростей показываем точки s_2, s_3, s_4, s'_4 и s''_4 . Тогда:

$$V_{s_2} = ps_2 \cdot \mu_v; \quad V_{s_3} = ps_3 \cdot \mu_v; \quad V_{s_4} = ps_4 \cdot \mu_v; \quad V_{s'_4} = ps'_4 \cdot \mu_v; \quad V_{s''_4} = ps''_4 \cdot \mu_v.$$

Построение плана ускорений начинаем с определения ускорения точки B , величина которого определяется по формуле

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}, \text{ м/с}^2 \quad (\vec{a}_{BA}^\tau = 0).$$

Направлено это ускорение по кривошипу AB от точки B к точке A . Выбираем произвольный отрезок πb . Масштабный коэффициент плана ускорений определяется отношением $\mu_a = a_B / \pi b$. Выбираем полюс плана ускорений π . Через полюс проводим прямую, параллельную AB , и откладываем отрезок πb по направлению \vec{a}_B . Ускорение точки A равно нулю: $a_A = 0$. Следовательно, точка a на плане ускорений будет совпадать с полюсом π .

Выразим ускорение внутренней характерной точки C группы Ассура (внутренней кинематической пары C) относительно внешних характерных точек группы Ассура B и D (внешних кинематических пар B и D). В векторной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau; \\ \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^n + \vec{a}_{CD}^\tau. \end{cases} \quad (17)$$

Ускорение точки B известно. Ускорение точки D равно нулю: $\vec{a}_D = 0$.

Величина нормального ускорения \vec{a}_{CB}^n определяется по формуле

$$a_{CB}^n = \omega_3^2 l_{CB} = \omega_{CB}^2 l_{CB}, \text{ м/с}^2;$$

длина отрезка bn_{CB} , изображающего на плане ускорений a_{CB}^n , равна

$$bn_{CB} = a_{CB}^n / \mu_a, \text{ мм};$$

вектор нормального ускорения \vec{a}_{CB}^n направлен параллельно CB от C к B ; вектор тангенциального ускорения \vec{a}_{CB}^τ точки C относительно B лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку CB : $\vec{a}_{CB}^\tau \perp CB$.

Величина нормального ускорения \vec{a}_{CD}^n определяется по формуле

$$a_{CD}^n = \omega_4^2 l_{CD} = \omega_{CD}^2 l_{CD}, \text{ м/с}^2;$$

длина отрезка dn_{CD} , изображающего на плане ускорений a_{CD}^n , равна

$$dn_{CD} = a_{CD}^n / \mu_a, \text{ мм};$$

вектор нормального ускорения \vec{a}_{CD}^n направлен параллельно CD от C к D ; вектор тангенциального ускорения \vec{a}_{CD}^τ точки C относительно D лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку CD : $\vec{a}_{CD}^\tau \perp CD$.

Строим план ускорений. Точка d совпадает с полюсом π . 1-е уравнение: через точку b проводим луч, параллельный звену CB в направлении от C к B , и на нем откладываем подсчитанный отрезок bn_{CB} , изображающий \vec{a}_{CB}^n , а через конец этого направленного отрезка проводим прямую, перпендикулярную BC . 2-е уравнение: через точку d проводим луч, параллельный звену CD в направлении от C к D , и на нем откладываем подсчитанный отрезок dn_{CD} , изображающий \vec{a}_{CD}^n , а через конец этого направленного отрезка проводим прямую, перпендикулярную DC . Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку c .

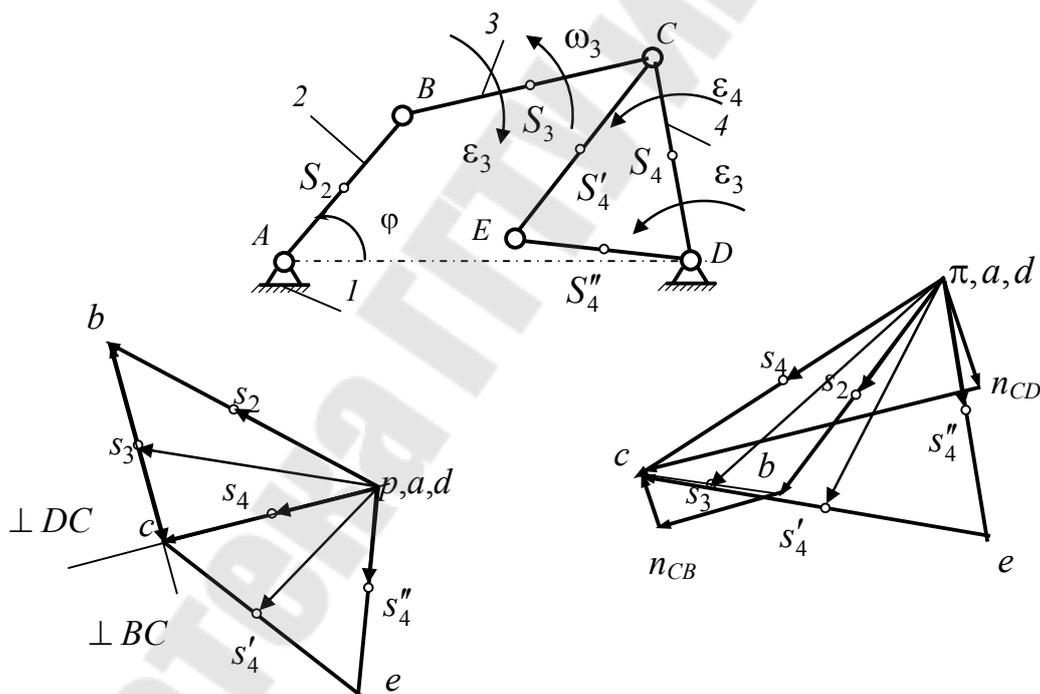


Рис. 16. План положений, план скоростей и план ускорений шарнирного четырехзвенника

Угловые ускорения звена 3 и звена 4 определяем по формулам:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}} = \frac{n_{CB}c \cdot \mu_v}{BC \cdot \mu_l}; \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{CD}^\tau}{l_{CD}} = \frac{n_{CD}c \cdot \mu_a}{DC \cdot \mu_l}, \quad c^{-2}.$$

Для определения направления ε_3 переносим вектор ускорения \vec{a}_{CB}^τ в точку C механизма и рассматриваем движение точки C относительно точки B в направлении ускорения \vec{a}_{CB}^τ . Для определения направления ε_4 переносим вектор ускорения \vec{a}_{CD}^τ в точку C механизма и рассматриваем движение точки C относительно точки D в направлении скорости \vec{a}_{CD}^τ . На рис. 16 показано направление ε_3 и ε_4 .

Для определения ускорений центров масс звеньев воспользуемся теоремой подобия (см. формулы для скоростей). Тогда:

$$a_{s_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a, \quad a_{s_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a, \quad a_{s_4} = \pi s_4 \cdot \mu_a, \quad a_{s_4'} = \pi s_4' \cdot \mu_a, \quad a_{s_4''} = \pi s_4'' \cdot \mu_a.$$

2.5.4. Синусный механизм

Построим план скоростей и план ускорений для заданного положения синусного механизма (рис. 17), $\omega_2 = \text{const}$ (группа Ассур II класса 5-го типа).

Скорость точки B : $V_B = \omega_2 \cdot l_{AB}$, $\vec{V}_B \perp AB$ и направлен в сторону, соответствующую направлению ω_2 . Выбираем отрезок pb . Тогда масштабный коэффициент плана скоростей определяется по формуле $\mu_v = V_B / pb$. Выбираем полюс плана скоростей p . Через полюс проводим прямую, перпендикулярную AB , и откладываем отрезок pb по направлению \vec{V}_B . Скорость точки A равна нулю: $V_A = 0$. Следовательно, точка a на плане скоростей будет совпадать с полюсом p .

Запишем векторные уравнения группы Ассур для плана скоростей:

$$\begin{cases} \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}; \\ \vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}. \end{cases} \quad (18)$$

Скорость точки B уже определена. Точка D принадлежит только одному звену – направляющей (в нашем случае направляющей является стойка). Следовательно, скорость точки D равна нулю: $\vec{V}_D = 0$. Кинематическая пара C – поступательная, следовательно, точка C принадлежит только звену 4. Точки C и B принадлежат двум звеньям (2-й способ разложения движения): $\vec{V}_{CB} \parallel y - y$. Точки C и D принадлежат двум звеньям (2-й способ разложения движения): $\vec{V}_{CD} \parallel x - x$.

Строим план скоростей. Точка d совпадает с полюсом p .
 1-е уравнение: через точку b проводим прямую, параллельную $y-y$.
 2-е уравнение: через точку d проводим прямую, параллельную $x-x$.
 Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку c .

Определим угловую скорость звена 3 и звена 4:

$$\omega_3 = \omega_4 = \omega_1 = 0.$$

Скорости центров масс звеньев определим по теореме подобия. Покажем центры масс звеньев на плане положений:

звено 2 – точка S_2 делит звено 2 (AB) пополам, $AS_2 = AB/2$;

звено 3 – точка S_3 совпадает с точкой B .

Тогда на плане скоростей получим:

точка s_2 делит отрезок ab пополам, $as_2 = ab/2$;

точка s_3 совпадает с точкой b .

Звено 4 совершает поступательное движение, следовательно, на плане скоростей точка s_4 совпадает с точкой c .

На плане скоростей показываем точки s_2, s_3, s_4 . Тогда:

$$V_{s_2} = ps_2 \cdot \mu_v, \quad V_{s_3} = ps_3 \cdot \mu_v, \quad V_{s_4} = ps_4 \cdot \mu_v, \quad \text{м/с.}$$

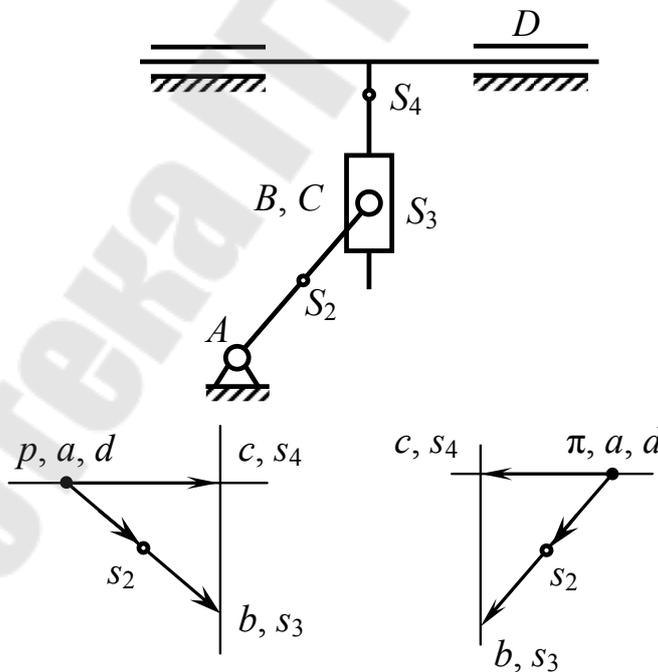


Рис. 17. План положений, план скоростей и план ускорений синусного механизма

Построение плана ускорений начинаем с определения ускорения точки B , величина которого определяется по формуле

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}, \text{ м/с}^2 \quad (\vec{a}_{BA}^\tau = 0).$$

Направлено это ускорение по кривошипу AB от точки B к точке A . Выбираем произвольный отрезок πb . Масштабный коэффициент плана ускорений определяется отношением $\mu_a = a_B / \pi b$. Выбираем полюс плана ускорений π . Через полюс проводим прямую, параллельную AB , и откладываем отрезок πb по направлению \vec{a}_B . Ускорение точки A равно нулю: $a_A = 0$. Следовательно, точка a на плане ускорений будет совпадать с полюсом π .

Запишем векторные уравнения группы Ассур для плана ускорений:

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^{\text{кор}} + \vec{a}_{CB}^{\text{ск}}; \\ \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^{\text{кор}} + \vec{a}_{CD}^{\text{ск}}. \end{cases} \quad (19)$$

Ускорение точки B определено. Ускорение точки D равно нулю: $\vec{a}_D = 0$.

Величина кориолисова ускорения $\vec{a}_{CB}^{\text{кор}}$ определяется по формуле (9). В нашем случае: $\omega_e = \omega_3 = 0$, то $a_{CB}^{\text{кор}} = 2\omega_3 V_{CB} = 0$. Вектор ускорения скольжения $\vec{a}_{CB}^{\text{ск}}$ направлен по направляющей параллельно оси y : $\vec{a}_{CB}^{\text{ск}} \parallel y - y$. Величина кориолисова ускорения $\vec{a}_{CD}^{\text{кор}}$ вычисляется по формуле (9). Здесь $\omega_e = \omega_1 = 0$, следовательно, $a_{CD}^{\text{кор}} = 2\omega_1 \cdot V_{CD} = 0$.

Вектор ускорения скольжения $\vec{a}_{CD}^{\text{ск}}$ точки C относительно D направлен по направляющей, т. е. параллельно оси x : $\vec{a}_{CD}^{\text{ск}} \parallel x - x$.

Строим план ускорений. Точка d совпадает с полюсом π . 1-е уравнение: ускорение $\vec{a}_{CB}^{\text{кор}}$ равно нулю, следовательно, точка k_{CB} совпадает с точкой b . Через точку k_{CB} проводим линию, параллельную $y - y$. 2-е уравнение: ускорение $\vec{a}_{CD}^{\text{кор}}$ равно нулю, следовательно, точка k_{CD} совпадает с точкой d . Через точку k_{CD} проводим прямую, параллельную $x - x$. Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку c .

Определим угловое ускорение звена 3 и звена 4:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_1 = 0, \text{ с}^{-2}.$$

Для определения ускорений центров масс звеньев воспользуемся теоремой подобия (см. формулы для скоростей). Тогда:

$$a_{s_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a, \quad a_{s_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a, \quad a_{s_4} = \pi s_4 \cdot \mu_a, \quad \text{м/с}^2.$$

2.5.5. Тангенсный механизм

Построить план скоростей и план ускорений для заданного положения тангенсного механизма. Угловая скорость звена 2: $\omega_2 = \text{const}$ (группа Ассур II класса 4-го типа).

Скорость точки B : $V_B = \omega_2 \cdot l_{AB}$, $\vec{V}_B \perp AB$ и направлен в сторону, соответствующую направлению ω_2 , где l_{AB} определяем с помощью плана положений: $l_{AB} = AB \cdot \mu_l$. Выбираем отрезок pb . Масштабный коэффициент плана скоростей определяется по формуле $\mu_v = V_B / pb$. Выбираем полюс плана скоростей p . Через полюс проводим прямую, перпендикулярную AB , и откладываем отрезок pb по направлению \vec{V}_B . Скорость точки A равна нулю: $V_A = 0$. Следовательно, точка a на плане скоростей будет совпадать с полюсом p .

Запишем векторные уравнения группы Ассур для плана скоростей:

$$\begin{cases} \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}; \\ \vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}. \end{cases} \quad (20)$$

Скорость точки B , принадлежащая 2-му звену, уже определена. Скорость точки D равна нулю: $\vec{V}_D = 0$.

Точки C и B принадлежат двум звеньям (2-й способ разложения движения), $\vec{V}_{CB} \parallel AN$. Точки C и D принадлежат двум звеньям (2-й способ разложения движения); $\vec{V}_{CD} \parallel x-x$.

Строим план скоростей. Скорость точки D равна нулю, следовательно, точка d совпадает с полюсом p . 1-е уравнение: через точку b проводим прямую, параллельную AN . 2-е уравнение: через точку d проводим прямую, параллельную $x-x$. Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку c . Величина относительной скорости:

$$V_{CB} = bc \cdot \mu_v.$$

Угловая скорость звена 3 и звена 4 определяется по формулам:

$$\omega_3 = \omega_2; \quad \omega_4 = \omega_1 = 0.$$

Покажем центры масс звеньев на плане положений:

звено 2 – точка S_2 делит звено 2 (AH) пополам, $AS_2 = AH/2$;

звено 3 – точка S_3 совпадает с точкой C ;

звено 4 – точка S_4 также совпадает с точкой C .

Тогда на плане скоростей получим:

точка s_2 : $as_2 = (ab \cdot AS_2) / AB$;

точка s_3 совпадает с точкой c ;

точка s_4 совпадает с точкой c .

На плане скоростей показываем точки s_2, s_3, s_4 . Тогда:

$$V_{s_2} = ps_2 \cdot \mu_v, \quad V_{s_3} = ps_3 \cdot \mu_v, \quad V_{s_4} = ps_4 \cdot \mu_v, \quad \text{м/с.}$$

Найдем ускорение точки B :

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}, \quad \text{м/с}^2, \quad (\vec{a}_{BA}^\tau = 0).$$

Направлено это ускорение по кривошипу AB от точки B к точке A . Выбираем произвольный отрезок πb . Масштабный коэффициент плана ускорений определяется отношением $\mu_a = a_B / \pi b$. Выбираем полюс плана ускорений π . Через полюс проводим прямую, параллельную AB и откладываем отрезок πb по направлению \vec{a}_B . Точка a на плане ускорений будет совпадать с полюсом π .

Запишем векторные уравнения группы Ассур для плана ускорений:

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^{\text{кор}} + \vec{a}_{CB}^{\text{ск}}; \\ \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^{\text{кор}} + \vec{a}_{CD}^{\text{ск}}. \end{cases} \quad (21)$$

Ускорение точки B известно. Ускорение точки D равно нулю: $\vec{a}_D = 0$. Ускорение Кориолиса $\vec{a}_{CB}^{\text{кор}}$ определяется по формуле

$$a_{CB} = 2\omega_e V_r = 2\omega_2 V_{CB}, \quad \text{м/с}^2.$$

Длина отрезка bk_{CB} , изображающего на плане ускорений $a_{CB}^{\text{кор}}$, равна

$$bk_{CB} = a_{CB}^{\text{кор}} / \mu_a, \quad \text{мм.}$$

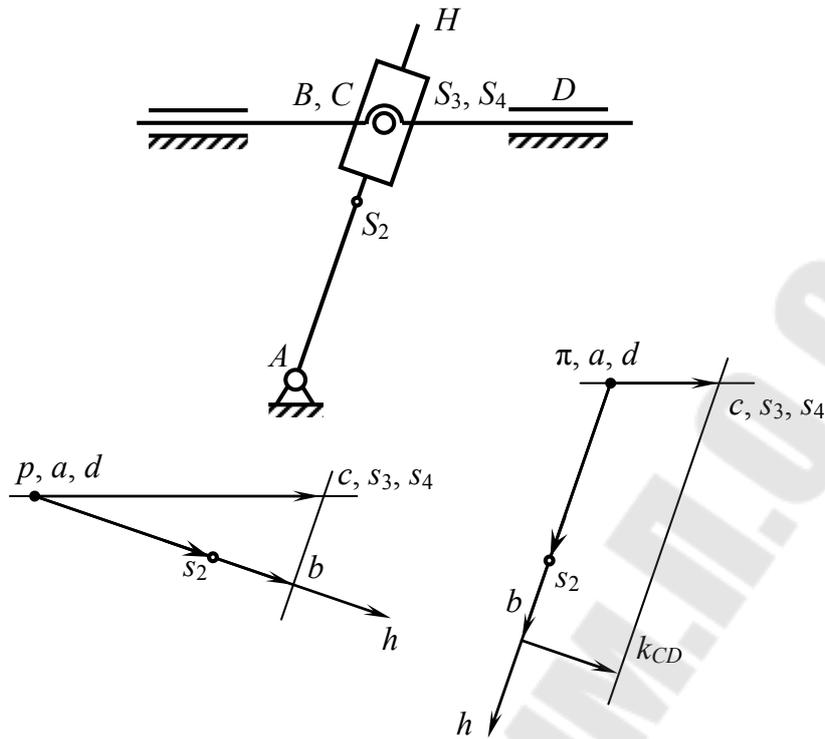


Рис. 18. План положений, план скоростей и план ускорений тангенсного механизма

Вектор ускорения скольжения \vec{a}_{CB}^{ck} направлен по направляющей, параллельно AH : $\vec{a}_{CB}^{ck} \parallel AH$.

Величина ускорения Кориолиса \vec{a}_{CD}^{kop} вычисляется по формуле (9). В нашем случае $\omega_e = \omega_1 = 0$. Следовательно, $a_{CD}^{kop} = 2\omega_e V = 2\omega_1 \cdot V_{CD} = 0$.

Вектор ускорения скольжения \vec{a}_{CD}^{ck} точки C относительно D направлен по направляющей, т.е. параллельно оси x : $\vec{a}_{CD}^{ck} \parallel x - x$.

Строим план ускорений. Ускорение точки D равно нулю, следовательно точка d совпадает с полюсом π . 1-е уравнение: направление кориолисова ускорения \vec{a}_{CB}^{-kop} находится путем поворота относительной скорости \vec{V}_{CB} на 90° в направлении переносного вращения, т.е. в направлении вращения звена 2. Следовательно, через точку b проводим луч по направлению \vec{a}_{CB}^{-kop} , и на нем откладываем подсчитанный отрезок bk_{CB} , изображающий \vec{a}_{CB}^{-kop} . Далее через точку k_{CB} проводим прямую, параллельную звену AH . 2-е уравнение: ускорение Кориолиса равно нулю, следовательно, точка k_{CD} совпадает с точкой d . Через

точку k_{CD} проводим прямую, параллельную $x-x$. Точка пересечения этих прямых определяет искомую точку s .

Определим угловое ускорение звена 3 и звена 4:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_1 = 0, \quad \text{с}^{-2}.$$

Для определения ускорений центров масс звеньев воспользуемся теоремой подобия (см. формулы для скоростей). Тогда:

$$a_{s_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a, \quad a_{s_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a, \quad a_{s_4} = \pi s_4 \cdot \mu_a, \quad \text{м/с}^2.$$

2.5.6. Шестизвенный механизм

Для заданного положения шестизвенного механизма построить план скоростей и план ускорений при заданной угловой скорости звена 2: $\omega_2 = \text{const}$.

Скорость точки B : $V_B = \omega_2 \cdot l_{AB}$, $\vec{V}_B \perp AB$ и направлен в сторону, соответствующую направлению ω_2 . Выбираем отрезок pb . Тогда масштабный коэффициент плана скоростей определяется по формуле $\mu_v = V_B / pb$. Выбираем полюс плана скоростей p . Через полюс проводим прямую, перпендикулярную AB , и откладываем отрезок pb по направлению \vec{V}_B . Скорость точки A равна нулю: $V_A = 0$. Следовательно, точка a на плане скоростей будет совпадать с полюсом p .

Рассматриваем первую группу Ассур (см. расчет группы Ассур II класса 3-го типа).

Векторные уравнения группы Ассур для скоростей имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}; \\ \vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}. \end{cases} \quad (22)$$

Скорость точки D равна нулю: $\vec{V}_D = 0$. $\vec{V}_{CB} \parallel DH$; $\vec{V}_{CD} \perp CD$.

Строим план скоростей. Из плана скоростей находим:

$$V_C = pc \cdot \mu_v, \quad V_{CB} = bc \cdot \mu_v.$$

Угловая скорость звена 3 и звена 4:

$$\omega_4 = \frac{V_{CD}}{l_{CD}} = \frac{dc \cdot \mu_v}{DC \cdot \mu_l}, \quad \omega_3 = \omega_4, \quad \text{с}^{-1}.$$

На рис. 19 покажем дуговое направление ω_4 .

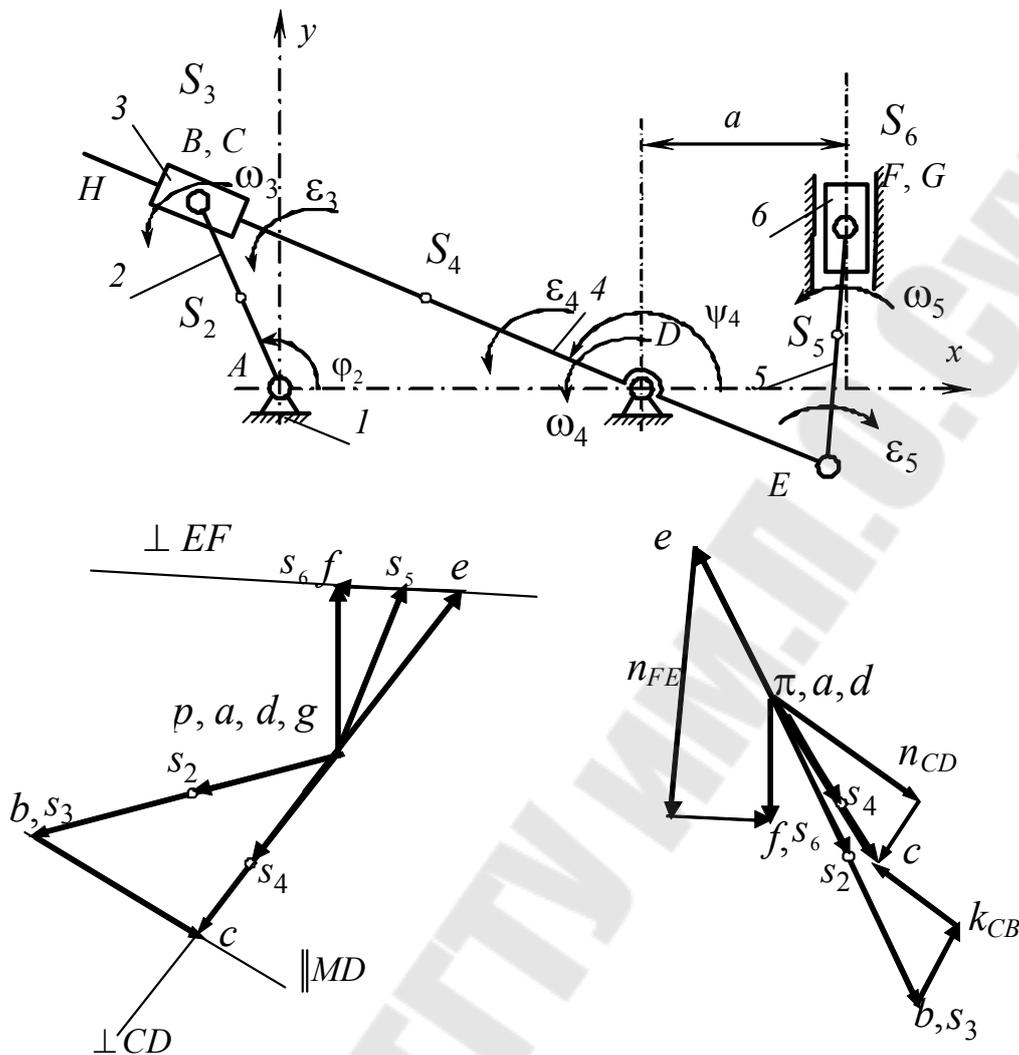


Рис. 19. План положений, план скоростей и план ускорений шестизвенного механизма

Вторая группа Ассура (см. расчет группы Ассура II класса 2-го типа). Векторные уравнения группы Ассура для скоростей имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{V}_F = \vec{V}_E + \vec{V}_{FE}; \\ \vec{V}_F = \vec{V}_G + \vec{V}_{FG}. \end{cases} \quad (23)$$

Положение точки e на плане скоростей определим по теореме подобия: $\frac{dc}{DC} = \frac{de}{DE}$, откуда $de = \frac{dc}{DC} DE$, мм. $\vec{V}_G = 0$; $\vec{V}_{FE} \perp FE$; $\vec{V}_{FG} \parallel y - y$.

Строим план скоростей. Из плана скоростей:

$$V_F = pf \cdot \mu_v, \quad V_{FE} = fe \cdot \mu_v.$$

Угловая скорость звена 5 и звена 6:

$$\omega_5 = \frac{V_{FE}}{l_{FE}} = \frac{fe \cdot \mu_v}{FE \cdot \mu_l}, \quad \omega_6 = \omega_1 = 0, \text{ с}^{-1}.$$

На рис. 19 показано дуговое направление ω_5 .

Покажем центры масс звеньев на плане положений:

звено 2 – точка S_2 делит звено 2 (AB) пополам, $AS_2 = AB/2$;

звено 3 – точка S_3 совпадает с точкой B ;

звено 4 – точка S_4 делит звено 4 (EH) пополам, $ES_4 = EH/2$;

звено 5 – точка S_5 делит звено 5 (FE) пополам, $ES_5 = EF/2$;

звено 6 – точка S_6 совпадает с точкой F .

Тогда на плане скоростей получим:

точка s_2 делит отрезок ab пополам, $as_2 = ab/2$;

точка s_3 совпадает с точкой b ;

точка s_4 : $ds_4 = (cd \cdot DS_4)/CD$;

точка s_5 делит отрезок fe пополам, $fs_5 = fe/2$;

точка s_6 совпадает с точкой f .

На плане скоростей показываем точки s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 . Тогда:

$$V_{s_2} = ps_2 \cdot \mu_v, \quad V_{s_3} = ps_3 \cdot \mu_v, \quad V_{s_4} = ps_4 \cdot \mu_v, \quad V_{s_5} = ps_5 \cdot \mu_v, \quad V_{s_6} = ps_6 \cdot \mu_v.$$

План ускорений. Ускорение точки B определяем по формуле

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}.$$

Направлено это ускорение по кривошипу AB от точки B к точке A . Выбираем произвольный отрезок πb . Масштабный коэффициент плана ускорений определяется отношением $\mu_a = a_B / \pi b$. Выбираем полюс плана ускорений π . Через полюс проводим прямую, параллельную AB , и откладываем отрезок πb по направлению \vec{a}_B . Точка a на плане ускорений будет совпадать с полюсом π .

Первая группа Ассура. Векторные уравнения группы Ассура для ускорений имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^{\text{кор}} + \vec{a}_{CB}^{\text{ск}}; \\ \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}^n + \vec{a}_{CD}^{\tau}. \end{cases} \quad (24)$$

Ускорение точки B определено. Ускорение точки D равно: $\vec{a}_D = 0$.

Ускорение кориолиса $a_{CB}^{\text{кор}}$ вычисляется по формуле

$$a_{CB}^{\text{кор}} = 2\omega_e \cdot V_r = 2\omega_4 \cdot V_{CB}.$$

Длина отрезка bk_{CB} , изображающего на плане ускорений $a_{CB}^{\text{кор}}$, равна

$$bk_{CB} = a_{CB}^{\text{кор}} / \mu_a, \text{ мм.}$$

Направление $\vec{a}_{CB}^{\text{кор}}$ находится путем поворота относительной скорости \vec{V}_{CB} на 90° в направлении ω_4 .

Вектор ускорения скольжения $\vec{a}_{CB}^{\text{ск}}$ направлен по направляющей параллельно DH : $\vec{a}_{CB}^{\text{ск}} \parallel DH$.

Величина нормального ускорения \vec{a}_{CD}^n определяется по формуле

$$a_{CD}^n = \omega_4^2 l_{CD} = \omega_{CD}^2 l_{CD}, \text{ м/с}^2;$$

длина отрезка dn_{CD} , изображающего на плане ускорений a_{CD}^n , равна

$$dn_{CD} = a_{CD}^n / \mu_a, \text{ мм};$$

вектор нормального ускорения \vec{a}_{CD}^n направлен к центру вращения, т. е. параллельно CD от C к D ; $\vec{a}_{CD}^\tau \perp CD$.

Строим план ускорений для 1-й группы Ассура.

Пользуясь построенным планом ускорений, определим угловое ускорение звена 4 и звена 3:

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{CD}^\tau}{l_{CD}} = \frac{n_{CD}c \cdot \mu_v}{DC \cdot \mu_l}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4, \text{ с}^{-2}.$$

На рис. 19 показано дуговое направление ε_4 .

Вторая группа Ассура. Векторные уравнения группы Ассура для плана ускорений имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{a}_F = \vec{a}_E + \vec{a}_{FE}^n + \vec{a}_{FE}^\tau; \\ \vec{a}_F = \vec{a}_G + \vec{a}_{FG}^{\text{кор}} + \vec{a}_{FG}^{\text{ск}}. \end{cases} \quad (25)$$

Положение точки e на плане ускорений определим по теореме подобия: $\frac{dc}{DC} = \frac{de}{DE}$, откуда $de = \frac{dc}{DC} DE$, мм. $\vec{a}_G = 0$.

Величина нормального ускорения \vec{a}_{FE}^n определяется по формуле

$$a_{FE}^n = \omega_5^2 l_{FE} = \omega_{FE}^2 l_{FE}, \text{ м/с}^2;$$

длина отрезка en_{FE} , изображающего на плане ускорений a_{FE}^n , равна

$$en_{FE} = a_{FE}^n / \mu_a, \text{ мм};$$

вектор нормального ускорения \vec{a}_{FE}^n направлен к центру вращения, т. е. параллельно FE от F к E ; $\vec{a}_{FE}^\tau \perp FE$.

Ускорение кориолиса $a_{FG}^{\text{кор}}$ вычисляется по формуле (9). В нашем случае $\omega_6 = \omega_1 = 0$ и $a_{CD}^{\text{кор}} = 0$. Вектор ускорения скольжения $\vec{a}_{FG}^{\text{ск}}$ точки направлен по направляющей, т. е. параллельно оси y : $\vec{a}_{FG}^{\text{ск}} \parallel y - y$.

Строим план ускорений для 2-й группы Ассура.

Угловое ускорение звена 5 и звена 6 равны:

$$\varepsilon_5 = \frac{a_{FG}^\tau}{l_{FG}} = \frac{n_{FG} f \cdot \mu_a}{FG \cdot \mu_l}, \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_1 = 0, \text{ с}^{-2}.$$

На рис. 19 показано направление ε_5 . Для определения ускорений центров масс звеньев воспользуемся теоремой подобия (см. формулы для скоростей). Тогда:

$$a_{s_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a, \quad a_{s_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a, \quad a_{s_4} = \pi s_4 \cdot \mu_a, \quad a_{s_5} = \pi s_5 \cdot \mu_a, \quad a_{s_6} = \pi s_6 \cdot \mu_a.$$

3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность данного метода заключается в том, что положения (линейные, угловые координаты), скорости и ускорения звеньев, а также передаточные функции определяются в виде аналитических выражений. Аналитические методы исследования позволяют проводить анализ с заданной степенью точности. Кроме того, создание математических моделей механизмов позволяет решать задачи их оптимального синтеза при использовании ЭВМ. В данном методическом пособии приведен метод базисного вектора. Данный метод пригоден

для плоских рычажных механизмов, в состав которых входят группы Ассур II класса и основан на проецировании векторов на оси координат. При этом количество векторов сведено к минимуму. Рассмотрим далее данный метод на примере типовых механизмов.

3.1. Шарнирный четырехзвенный механизм

Приведем здесь алгоритм расчета шарнирного четырехзвенника.

Дано: l_{OA} , l_{AB} , l_{BC} , l_d , l_h , φ_2 , ω_2 , ε_2 .

Выделим **базисный** вектор группы. Если внешняя кинематическая пара группы Ассур вращательная, то начало (конец) базисного вектора совпадает с этой точкой. При поступательной внешней кинематической паре начало (конец) базисного вектора будет принадлежать точке звена, образующего данную кинематическую пару и не входящую в группу Ассур. *Базисный вектор 1-й группы Ассур \vec{e}_1 (\overline{CA}).*

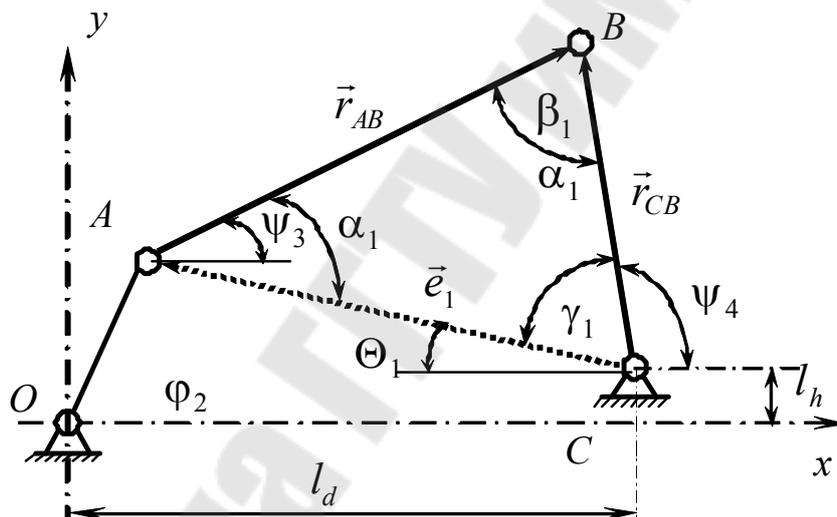


Рис. 20. Расчетная схема шарнирного четырехзвенного механизма

Найдем координаты точек начала и конца базисного вектора (эти точки **обязательно** будут принадлежать предыдущей структурной группе). Определим передаточные функции этих точек (аналог скорости и аналог ускорения).

Координаты: $x_A = l_{OA} \cos(\varphi_2)$, $y_A = l_{OA} \sin(\varphi_2)$, $x_C = l_d$, $y_C = l_h$.

$$\begin{aligned} \text{Аналог скорости: } \frac{dx_A}{d\varphi_2} &= -l_{OA} \sin(\varphi_2), \quad \frac{dy_A}{d\varphi_2} = l_{OA} \cos(\varphi_2), \quad \frac{dx_C}{d\varphi_2} = 0, \\ \frac{dy_C}{d\varphi_2} &= 0. \quad \text{Аналог ускорений: } \frac{d^2x_A}{d\varphi_2^2} = -l_{OA} \cos(\varphi_2), \quad \frac{d^2y_A}{d\varphi_2^2} = -l_{OA} \sin(\varphi_2), \\ \frac{d^2x_C}{d\varphi_2^2} &= 0, \quad \frac{d^2y_C}{d\varphi_2^2} = 0. \end{aligned}$$

Построим векторы, соединяющие начало и конец базисного вектора с внутренней кинематической парой, и покажем их ориентацию относительно осей координат. Вектор \vec{r}_{AB} соединяет точку A (конец базисного вектора) с внутренней кинематической парой B . Направление угла ψ_3 примем против часовой стрелки от оси отсчета (как правило, за ось отсчета принимают горизонтальную ось, направленную вправо, т. е. ось, параллельную оси x). Аналогично вектор \vec{r}_{CB} и угол ψ_4 .

Модуль вектора \vec{r}_{AB} равен l_{AB} , вектора \vec{r}_{CB} равен l_{CB} .

Выразим координату внутренней кинематической пары группы Ассура через координаты начала и конца базисного вектора:

$$x_B = x_A + l_{AB} \cos(\psi_3) = x_C + l_{CB} \cos(\psi_4); \quad (26)$$

$$y_B = y_A + l_{AB} \sin(\psi_3) = y_C + l_{CB} \sin(\psi_4). \quad (27)$$

Задача о положениях. Формально положения звеньев можно определить из уравнений (26) и (27), однако прямое решение этих уравнений приведет не к одному значению угла ψ_3 , а к четырем значениям и возникнет необходимость выбора единственного значения угла ψ_3 . Рассмотрим контур ABC . Определим угол Θ_1 , ориентирующий базисный вектор:

$$\tan(\Theta_1) = \frac{(y_A - y_C)}{-(x_A - x_C)}, \quad \Theta_1 = \arctan \left[\frac{(y_A - y_C)}{-(x_A - x_C)} \right].$$

Длина базисного вектора $e_1 = S_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$.

Каждый из внутренних углов треугольника ABC меньше 180° . Найдем эти углы:

$$\cos(\alpha_1) = \frac{l_{AB}^2 + S_{AC}^2 - l_{BC}^2}{2 \cdot S_{AC} \cdot l_{AB}}, \quad \cos(\beta_1) = \frac{l_{AB}^2 - S_{AC}^2 + l_{BC}^2}{2 \cdot l_{BC} \cdot l_{AB}}, \quad \gamma_1 = 180 - \alpha_1 - \beta_1.$$

Рассматривая контур ABC (рис. 20), найдем углы ψ_3 и ψ_4 :

$$\psi_3 = \alpha_1 - \Theta_1, \quad \psi_4 = 180 - \gamma_1 - \Theta_1.$$

Задача о скоростях и ускорениях. Продифференцируем по φ_2 уравнения (26) и (27):

$$\frac{dx_A}{d\varphi_2} - l_{AB} \sin(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} = \frac{dx_C}{d\varphi_2} - l_{CB} \sin(\psi_4) \frac{d\psi_4}{d\varphi_2}; \quad (28)$$

$$\frac{dy_A}{d\varphi_2} + l_{AB} \cos(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} = \frac{dy_C}{d\varphi_2} + l_{CB} \cos(\psi_4) \frac{d\psi_4}{d\varphi_2}. \quad (29)$$

Уравнения (28), (29) представляют систему двух **линейных алгебраических** уравнений с двумя неизвестными: $\frac{d\psi_3}{d\varphi_2}$, $\frac{d\psi_4}{d\varphi_2}$. Решая эту систему уравнений, найдем неизвестные величины $\frac{d\psi_3}{d\varphi_2}$, $\frac{d\psi_4}{d\varphi_2}$.

Угловые скорости звеньев:

$$\omega_3 = \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \omega_2, \quad \omega_4 = \frac{d\psi_4}{d\varphi_2} \omega_2. \quad (30)$$

Для определения ускорений продифференцируем уравнения (28) и (29) по φ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_A}{d\varphi_2^2} - l_{AB} \cos(\psi_3) \left[\frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \right]^2 - l_{AB} \sin(\psi_3) \frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2} = \\ = \frac{d^2 x_C}{d\varphi_2^2} - l_{CB} \cos(\psi_4) \left[\frac{d\psi_4}{d\varphi_2} \right]^2 - l_{CB} \sin(\psi_4) \frac{d^2 \psi_4}{d\varphi_2^2}; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_A}{d\varphi_2^2} - l_{AB} \sin(\psi_3) \left[\frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \right]^2 + l_{AB} \cos(\psi_3) \frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2} = \\ = \frac{d^2 y_C}{d\varphi_2^2} - l_{CB} \sin(\psi_4) \left[\frac{d\psi_4}{d\varphi_2} \right]^2 + l_{CB} \cos(\psi_4) \frac{d^2 \psi_4}{d\varphi_2^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Решаем систему уравнений (31) и (32) и находим аналоги ускорений 3-го и 4-го звеньев: $\frac{d^2\psi_3}{d\varphi_2^2}$, $\frac{d^2\psi_4}{d\varphi_2^2}$.

Угловые ускорения звеньев:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \varepsilon_2 + \frac{d^2\psi_3}{d\varphi_2^2} \omega_2^2, \quad \varepsilon_4 = \frac{d\psi_4}{d\varphi_2} \varepsilon_2 + \frac{d^2\psi_4}{d\varphi_2^2} \omega_2^2. \quad (33)$$

Примечание. В формулы (30) и (33) аналоги скоростей входят со своим алгебраическим знаком.

Положение, скорость и ускорение отдельных точек. Для определения кинематических параметров точек звеньев группы Ассура необходимо выразить эту точку через точку начала (конца) базисного вектора. Приведем пример определения кинематических параметров для центра масс третьего звена.

Координаты центра масс третьего звена:

$$x_{S3} = x_A + l_{AS3} \cos(\psi_3), \quad y_{S3} = y_A + l_{AS3} \sin(\psi_3). \quad (34)$$

Скорость центра масс третьего звена. Продифференцируем по φ_2 уравнения (34):

$$\frac{dx_{S3}}{d\varphi_2} = \frac{dx_A}{d\varphi_2} - l_{AS3} \sin(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2}, \quad \frac{dy_{S3}}{d\varphi_2} = \frac{dy_A}{d\varphi_2} + l_{AS3} \cos(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2}. \quad (35)$$

Проекция вектора скорости и модуль вектора скорости определяем по формулам:

$$V_{S3x} = \omega_2 \frac{dx_{S3}}{d\varphi_2}, \quad V_{S3y} = \omega_2 \frac{dy_{S3}}{d\varphi_2},$$

$$V_{S3} = \sqrt{V_{S3x}^2 + V_{S3y}^2} = \omega_2 \sqrt{\left(\frac{dx_{S3}}{d\varphi_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_{S3}}{d\varphi_2}\right)^2}. \quad (36)$$

Направление вектора скорости определяем с помощью направляющих косинусов.

Ускорение центра масс третьего звена. Продифференцируем по φ_2 уравнения (35):

$$\frac{d^2x_{S3}}{d\varphi_2^2} = \frac{d^2x_A}{d\varphi_2^2} - l_{AS3} \cos(\psi_3) \left[\frac{d\psi_3}{d\varphi_2}\right]^2 - l_{AS3} \sin(\psi_3) \frac{d^2\psi_3}{d\varphi_2^2}; \quad (37)$$

$$\frac{d^2 y_{S3}}{d\varphi_2^2} = \frac{d^2 y_A}{d\varphi_2^2} - l_{AS3} \sin(\psi_3) \left[\frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \right]^2 + l_{AS3} \cos(\psi_3) \frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2}. \quad (38)$$

Проекции вектора скорости и модуль вектора скорости определяем по формулам:

$$a_{S3x} = \omega_2^2 \frac{d^2 x_{S3}}{d\varphi_2^2} + \varepsilon_2 \frac{dx_{S3}}{d\varphi_2}, \quad a_{S3y} = \omega_2^2 \frac{d^2 y_{S3}}{d\varphi_2^2} + \varepsilon_2 \frac{dy_{S3}}{d\varphi_2},$$

$$a_{S3} = \sqrt{a_{S3x}^2 + a_{S3y}^2}. \quad (39)$$

Направление вектора ускорения определяем с помощью направляющих косинусов.

3.2. Кривошипно-ползунный механизм

Одна внешняя кинематическая пара группы Ассур вращательная (А). Следовательно, конец (начало) базисного вектора будет совпадать с точкой А. Вторая кинематическая пара поступательная (С), которая образована звеньями 4 и 1. В рассматриваемую группу не входит 1-е звено, следовательно, конец (начало) базисного вектора будет принадлежать этому звену. Выберем точку О. Базисный вектор 1-й группы Ассур \vec{e}_1 (\overline{OA}).

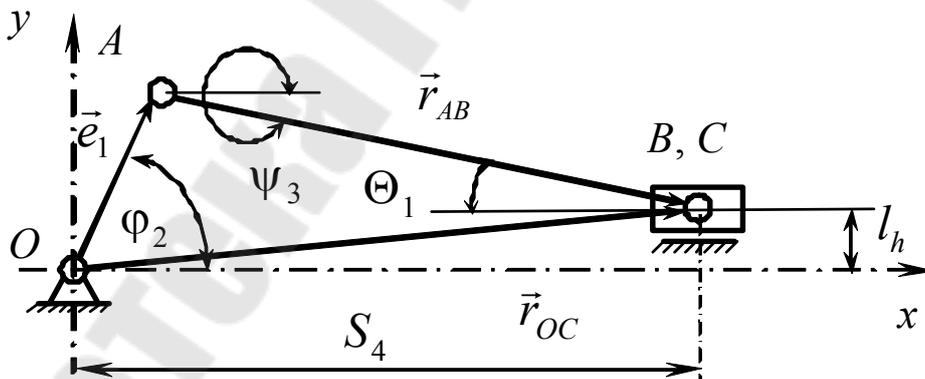


Рис. 21. Расчетная схема кривошипно-ползунного механизма

Найдем координаты точек начала и конца базисного вектора. Определим их аналог скорости и аналог ускорения:

Координаты: $x_A = l_{OA} \cos(\varphi_2)$, $y_A = l_{OA} \sin(\varphi_2)$, $x_O = 0$, $y_O = 0$.

Аналог скорости: $\frac{dx_A}{d\varphi_2} = -l_{OA} \sin(\varphi_2), \quad \frac{dy_A}{d\varphi_2} = l_{OA} \cos(\varphi_2), \quad \frac{dx_O}{d\varphi_2} = 0,$

$$\frac{dy_O}{d\varphi_2} = 0.$$

Аналог ускорений: $\frac{d^2 x_A}{d\varphi_2^2} = -l_{OA} \cos(\varphi_2), \quad \frac{d^2 y_A}{d\varphi_2^2} = -l_{OA} \sin(\varphi_2),$

$$\frac{d^2 x_O}{d\varphi_2^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_O}{d\varphi_2^2} = 0.$$

Построим векторы, соединяющие начало и конец базисного вектора с внутренней кинематической парой, и покажем их ориентацию относительно осей координат. Вектор \vec{r}_{AB} соединяет точку A (конец базисного вектора) с внутренней кинематической парой B . Направление угла ψ_3 примем против часовой стрелки от оси отсчета. Вторым вектор – \vec{r}_{OC} . Данный вектор удобно разложить на две составляющие: одна параллельна оси x (S_4), вторая – оси y (l_h).

Выразим координату внутренней кинематической пары группы Ассура через координаты начала и конца базисного вектора:

$$x_B = x_A + l_{AB} \cos(\psi_3) = S_4, \quad y_B = y_A + l_{AB} \sin(\psi_3) = l_h. \quad (40)$$

Задача о положениях. Найдем угол ψ_3 и расстояние S_4 . Определим угол Θ_1 :

$$\sin(\Theta_1) = \frac{(y_A - y_B)}{l_{AB}} = \frac{(y_A - l_h)}{l_{AB}}, \quad \Theta_1 = \arcsin\left[\frac{(y_A - l_h)}{l_{AB}}\right], \quad \psi_3 = 360 - \Theta_1.$$

Величину S_4 найдем из первого уравнения системы (40).

Задача о скоростях и ускорениях. Продифференцируем по φ_2 систему уравнений (40):

$$\frac{dx_A}{d\varphi_2} - l_{AB} \sin(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} = \frac{dS_4}{d\varphi_2}, \quad \frac{dy_A}{d\varphi_2} + l_{AB} \cos(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} = 0. \quad (41)$$

Решая систему уравнений (41), найдем неизвестные аналоги скоростей $\frac{d\psi_3}{d\varphi_2}, \quad \frac{dS_4}{d\varphi_2}$.

$$\text{Угловые скорости звеньев: } \omega_3 = \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \omega_2, \quad \omega_4 = 0.$$

Скорость точки B равна: $V_B = \frac{dS_4}{d\varphi_2} \omega_2$.

Для определения ускорений продифференцируем систему уравнений (41) по φ_2 :

$$\frac{d^2 x_A}{d\varphi_2^2} - l_{AB} \cos(\psi_3) \left[\frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \right]^2 - l_{AB} \sin(\psi_3) \frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2} = \frac{d^2 S_4}{d\varphi_2^2}; \quad (42)$$

$$\frac{d^2 y_A}{d\varphi_2^2} - l_{AB} \sin(\psi_3) \left[\frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \right]^2 + l_{AB} \cos(\psi_3) \frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2} = 0. \quad (43)$$

Решаем систему уравнений (42) и (43) и находим аналоги ускорений 3-го и 4-го звеньев: $\frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2}$, $\frac{d^2 S_4}{d\varphi_2^2}$.

Угловые ускорения звеньев: $\varepsilon_3 = \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \varepsilon_2 + \frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2} \omega_2^2$, $\varepsilon_4 = 0$.

Ускорение точки B равно: $a_B = \frac{dS_4}{d\varphi_2} \varepsilon_2 + \frac{d^2 S_4}{d\varphi_2^2} \omega_2^2$.

3.3. Кулисный механизм

Выделим **базисный** вектор группы Ассура. Две внешние кинематические пары – вращательные. *Базисный вектор 1-й группы Ассура* \vec{e}_1 (\overline{AC}).

Найдем координаты точек начала и конца базисного вектора. Определим их аналог скорости и аналог ускорения:

Координаты: $x_A = l_{OA} \cos(\varphi_2)$, $y_A = l_{OA} \sin(\varphi_2)$, $x_C = l_d$, $y_C = l_h$.

Аналог скорости: $\frac{dx_A}{d\varphi_2} = -l_{OA} \sin(\varphi_2)$, $\frac{dy_A}{d\varphi_2} = l_{OA} \cos(\varphi_2)$, $\frac{dx_C}{d\varphi_2} = 0$,

$$\frac{dy_C}{d\varphi_2} = 0.$$

Аналог ускорений: $\frac{d^2 x_A}{d\varphi_2^2} = -l_{OA} \cos(\varphi_2)$, $\frac{d^2 y_A}{d\varphi_2^2} = -l_{OA} \sin(\varphi_2)$,

$$\frac{d^2 x_C}{d\varphi_2^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_C}{d\varphi_2^2} = 0.$$

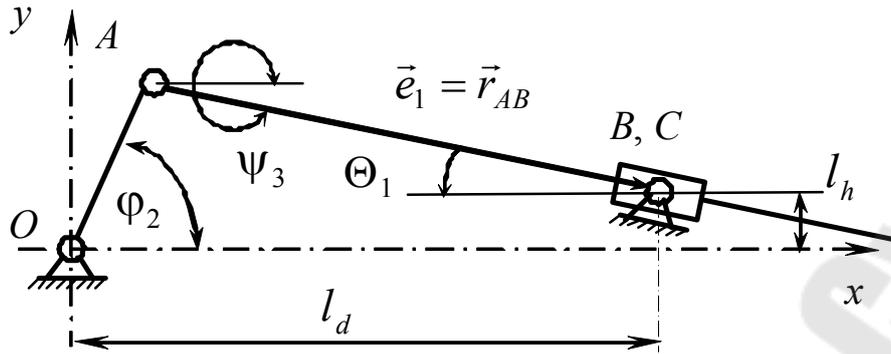


Рис. 22. Расчетная схема кулисного механизма

Построим векторы, соединяющие начало и конец базисного вектора с внутренней кинематической парой, и покажем их ориентацию относительно осей координат. Вектор \vec{r}_{AB} соединяет точку A (конец базисного вектора) с внутренней кинематической парой B . Направление угла ψ_3 примем против часовой стрелки от оси отсчета. Точка C геометрически совпадает с точкой B .

Отметим, что длина вектора \vec{r}_{AB} изменяется с изменением угла φ_2 . Обозначим модуль вектора $\vec{r}_{AB} = S_{AB}$.

Выразим координату внутренней кинематической пары группы Ассура через координаты начала и конца базисного вектора:

$$x_B = x_A + S_{AB} \cos(\psi_3) = x_C, \quad y_B = y_A + S_{AB} \sin(\psi_3) = y_C. \quad (44)$$

Задача о положениях. Рассмотрим контур ABC . Определим угол Θ_1 , ориентирующий базисный вектор:

$$\tan(\Theta_1) = \frac{(y_A - y_C)}{-(x_A - x_C)}, \quad \Theta_1 = \arctan \left[\frac{(y_A - y_C)}{-(x_A - x_C)} \right].$$

Длина базисного вектора $e_1 = S_{AC} = S_{AB} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$.
 $\psi_3 = 360 - \Theta_1$.

Задача о скоростях и ускорениях. Продифференцируем по φ_2 систему уравнений (44):

$$\frac{dx_A}{d\varphi_2} - S_{AB} \sin(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} + \cos(\psi_3) \frac{dS_{AB}}{d\varphi_2} = 0; \quad (45)$$

$$\frac{dy_A}{d\varphi_2} + S_{AB} \cos(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} + \sin(\psi_3) \frac{dS_{AB}}{d\varphi_2} = 0. \quad (46)$$

Решаем систему уравнений (45), (46): найдем неизвестные аналогии скоростей $\frac{d\psi_3}{d\varphi_2}$, $\frac{dS_{AB}}{d\varphi_2}$.

Угловые скорости звеньев: $\omega_3 = \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \omega_2$, $\omega_4 = \omega_4$.

Скорость скольжения в кинематической паре C : $V_{BC} = \frac{dS_{AB}}{d\varphi_2} \omega_2$.

Для определения ускорений продифференцируем уравнения (45) и (46) по φ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_A}{d\varphi_2^2} - 2 \cdot \frac{dS_{AB}}{d\varphi_2} \sin(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} - S_{AB} \cos(\psi_3) \left[\frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \right]^2 - \\ - S_{AB} \sin(\psi_3) \frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2} + \cos(\psi_3) \frac{d^2 S_{AB}}{d\varphi_2^2} = 0; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_A}{d\varphi_2^2} + 2 \cdot \frac{dS_{AB}}{d\varphi_2} \cos(\psi_3) \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} - S_{AB} \sin(\psi_3) \left[\frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \right]^2 - \\ - S_{AB} \cos(\psi_3) \frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2} + \sin(\psi_3) \frac{d^2 S_{AB}}{d\varphi_2^2} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Решаем систему уравнений (47) и (48) и находим аналогии ускорений $\frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2}$, $\frac{d^2 S_{AB}}{d\varphi_2^2}$.

Угловые ускорения звеньев: $\varepsilon_3 = \frac{d\psi_3}{d\varphi_2} \varepsilon_2 + \frac{d^2 \psi_3}{d\varphi_2^2} \omega_2^2$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_3$.

Ускорение скольжения в кинематической паре C :

$$a_{BC}^{ck} = \frac{dS_{AB}}{d\varphi_2} \varepsilon_2 + \frac{d^2 S_{AB}}{d\varphi_2^2} \omega_2^2.$$

3.4. Синусный механизм

Выделим **базисный** вектор группы Ассура. Внешняя кинематическая пара группы Ассура (A) – вращательная. Следовательно, начало (конец) базисного вектора будет совпадать с точкой A . Вторая кинематическая пара поступательная (C), которая образована звеньями 4 и 1.

В рассматриваемую группу не входит 1-е звено, следовательно, конец (начало) базисного вектора будет принадлежать этому звену. Выберем точку O . Базисный вектор 1-й группы Ассур \vec{e}_1 (\overline{OA}).

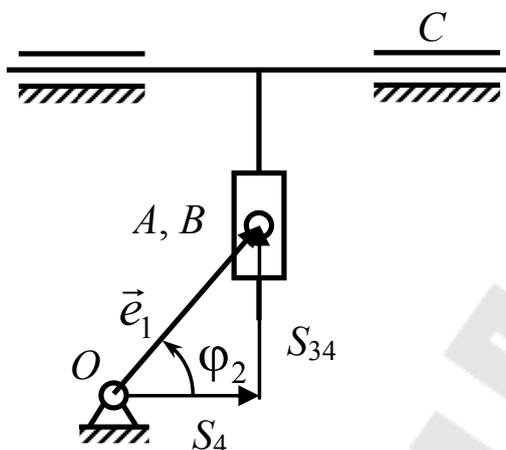


Рис. 23. Расчетная схема синусного механизма

Найдем координаты точек начала и конца базисного вектора. Определим их аналог скорости и аналог ускорения.

Координаты: $x_A = l_{OA} \cos(\varphi_2)$, $y_A = l_{OA} \sin(\varphi_2)$, $x_O = 0$, $y_O = 0$.

Аналог скорости: $\frac{dx_A}{d\varphi_2} = -l_{OA} \sin(\varphi_2)$, $\frac{dy_A}{d\varphi_2} = l_{OA} \cos(\varphi_2)$, $\frac{dx_O}{d\varphi_2} = 0$,

$$\frac{dy_O}{d\varphi_2} = 0.$$

Аналог ускорений: $\frac{d^2 x_A}{d\varphi_2^2} = -l_{OA} \cos(\varphi_2)$, $\frac{d^2 y_A}{d\varphi_2^2} = -l_{OA} \sin(\varphi_2)$,

$$\frac{d^2 x_O}{d\varphi_2^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_O}{d\varphi_2^2} = 0.$$

Построим векторы, соединяющие начало и конец базисного вектора с внутренней кинематической парой, и покажем их ориентацию относительно осей координат. Вектор \vec{r}_{AB} является нулевым, так как точки A (конец базисного вектора) и B совпадают. Второй вектор – \vec{r}_{OC} . Данный вектор удобно разложить на две составляющие: одна параллельна оси x (S_4), вторая – оси y (S_{34}).

Выразим координату внутренней кинематической пары группы Ассур через координаты начала и конца базисного вектора. Данные

два уравнения являются основными уравнениями для определения скоростей и ускорений.

$$x_B = x_A = S_4, \quad y_B = y_A = S_{34}. \quad (49)$$

Задача о положениях. Из системы уравнений (49) находим:

$$S_4 = x_A, \quad S_{34} = y_A. \quad (50)$$

Задача о скоростях и ускорениях. Продифференцируем систему уравнений (50) по φ_2 :

$$\frac{dS_4}{d\varphi_2} = \frac{dx_A}{d\varphi_2}, \quad \frac{dS_{34}}{d\varphi_2} = \frac{dy_A}{d\varphi_2}. \quad (51)$$

Найдем скорость скольжения в кинематической паре **B** и скорость 4-го звена:

$$V_{BA} = \frac{dS_{34}}{d\varphi_2} \omega_2, \quad V_4 = \frac{dS_4}{d\varphi_2} \omega_2.$$

Для определения ускорений продифференцируем уравнения (51) по φ_2 :

$$\frac{d^2 S_4}{d\varphi_2^2} = \frac{d^2 x_A}{d\varphi_2^2}, \quad \frac{d^2 S_{34}}{d\varphi_2^2} = \frac{d^2 y_A}{d\varphi_2^2}. \quad (52)$$

Найдем ускорение скольжения в кинематической паре **B** и ускорение 4-го звена:

$$a_{BA}^{ck} = \frac{dS_{34}}{d\varphi_2} \varepsilon_2 + \frac{d^2 S_{34}}{d\varphi_2^2} \omega_2^2, \quad a_4 = \frac{dS_4}{d\varphi_2} \varepsilon_2 + \frac{d^2 S_4}{d\varphi_2^2} \omega_2^2. \quad (53)$$

Угловые скорости и ускорения звеньев:

$$\omega_4 = \omega_3 = \omega_1 = 0, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_3 = \varepsilon_1 = 0.$$

3.5. Тангенсный механизм

Выделим **базисный** вектор группы Ассура. Две внешних кинематические пары группы Ассура поступательные. В рассматриваемую группу не входят 1 и 2 звенья. Примем, что конец и начало базисного вектора будут совпадать с точкой **O**. *Базисный вектор 1-й группы Ассура \vec{e}_1 (\overline{OO}).* Данный вектор является нулевым.

Найдем координаты точек начала и конца базисного вектора. Определим их аналог скорости и аналог ускорения.

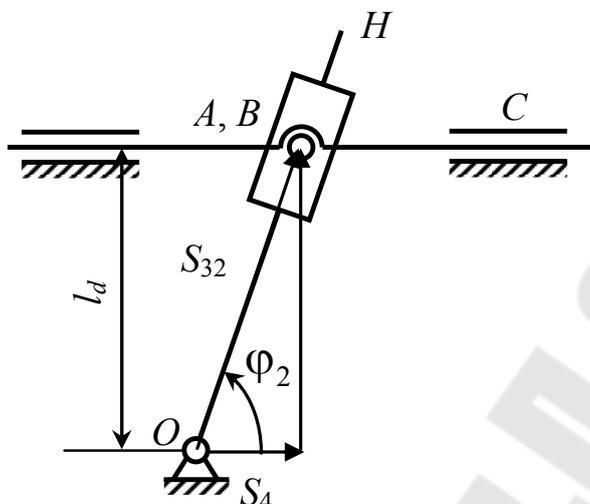


Рис. 24. Расчетная схема тенгенсного механизма

Координаты: $x_O = 0, y_O = 0$.

Аналог скорости: $\frac{dx_O}{d\varphi_2} = 0, \frac{dy_O}{d\varphi_2} = 0$.

Аналог ускорений: $\frac{d^2x_O}{d\varphi_2^2} = 0, \frac{d^2y_O}{d\varphi_2^2} = 0$.

Построим векторы, соединяющие начало и конец базисного вектора с внутренней кинематической парой, и покажем их ориентацию относительно осей координат. Вектор \vec{r}_{OA} . Второй вектор – \vec{r}_{OA} – разложим на две составляющие: одна параллельна оси x (S_4), вторая – оси y (l_d).

Выразим координату внутренней кинематической пары группы Ассура через координаты начала и конца базисного вектора.

$$x_B = S_{23} \cos(\varphi_2) = S_4, \quad y_B = S_{23} \sin(\varphi_2) = l_d. \quad (54)$$

Задача о положениях. Из уравнений (54) находим:

$$S_{23} = l_d / \sin(\varphi_2), \quad S_4 = S_{23} \cos(\varphi_2). \quad (55)$$

Задача о скоростях и ускорениях. Продифференцируем систему уравнений (55) по φ_2 :

$$\frac{dS_{23}}{d\varphi_2} = (-l_d \cdot \cos(\varphi_2)) / \sin^2(\varphi_2), \quad \frac{dS_4}{d\varphi_2} = \frac{dS_{23}}{d\varphi_2} \cos(\varphi_2) - S_{23} \sin(\varphi_2). \quad (56)$$

Найдем скорость скольжения в кинематической паре A и скорость 4-го звена:

$$V_{BA} = \frac{dS_{23}}{d\varphi_2} \omega_2, \quad V_4 = \frac{dS_4}{d\varphi_2} \omega_2.$$

Для определения ускорений продифференцируем уравнения (56) по φ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S_{23}}{d\varphi_2^2} &= \left[(2l_d \cdot \cos^2(\varphi_2)) / \sin^3(\varphi_2) \right] + l_d / \sin(\varphi_2), \\ \frac{d^2 S_4}{d\varphi_2^2} &= \frac{d^2 S_{23}}{d\varphi_2^2} \cos(\varphi_2) - 2 \frac{dS_{23}}{d\varphi_2} \sin(\varphi_2) - S_{23} \cos(\varphi_2). \end{aligned} \quad (57)$$

Найдем ускорение скольжения в кинематической паре B и ускорение 4-го звена:

$$a_4 = \frac{dS_4}{d\varphi_2} \varepsilon_2 + \frac{d^2 S_4}{d\varphi_2^2} \omega_2^2. \quad (58)$$

Угловые скорости и ускорения звеньев:

$$\omega_3 = \omega_2, \quad \omega_4 = \omega_1 = 0, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_1 = 0. \quad (59)$$

Литература

1. Теория механизмов и механика машин : учеб. для вузов / К. В. Фролов [и др.] ; под ред. Г. А. Тимофеева. – М. : МГТУ, 2009. – 687 с.
2. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин : учеб. для вузов / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 639 с.
3. Теория механизмов и машин : учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / М. З. Коловский [и др]. – М. : Издат. центр «Академия», 2006. – 560 с.
4. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование : учеб. пособие для вузов / под ред. Г. А. Тимофеева, Н. В. Умнова. – М. : МГТУ, 2010. – 154 с.
5. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин : учеб. пособие для вузов / Н. И. Левитский. – М. : Наука, 1990. – 590 с.

Содержание

1. Основные положения.....	3
1.1. Задачи кинематического анализа механизмов.....	3
1.2. Геометрические и кинематические характеристики механизмов.....	3
2. Метод планов положений, скоростей и ускорений.....	5
2.1. Построение траекторий точек механизма и крайних положений механизма.....	5
2.1.1. Кривошипно-ползунный механизм.....	5
2.1.2. Шарнирный четырехзвенный механизм.....	6
2.1.3. Кулисный механизм.....	7
2.2. Основные уравнения для скоростей и ускорений.....	7
2.3. Общие положения плана скоростей и плана ускорений.....	10
2.4. Построение планов положений механизма.....	12
2.5. Построение планов скоростей и ускорений механизма.....	16
2.5. Кривошипно-ползунный механизм.....	16
2.5.2. Кулисный механизм.....	21
2.5.3. Шарнирный четырехзвенный механизм.....	26
2.5.4. Синусный механизм.....	30
2.5.5. Тангенсный механизм.....	33
2.5.6. Шестизвенный механизм.....	36
3. Кинематический анализ рычажного механизма аналитическим методом.....	40
3.1. Шарнирный четырехзвенный механизм.....	41
3.2. Кривошипно-ползунный механизм.....	45
3.3. Кулисный механизм.....	47
3.4. Синусный механизм.....	49
3.5. Тангенсный механизм.....	51
Литература.....	54

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Кроль Дмитрий Григорьевич
Иноземцева Наталья Владимировна
Лискович Михаил Ильич

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Практикум
по курсу «Теория механизмов и машин»
для студентов машиностроительных специальностей
дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор
Компьютерная верстка

Н. В. Гладкова
Н. Б. Козловская

Подписано в печать 8.11.12.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,08.

Изд. № 24.

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр Учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».

ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48