

УДК 519.3:539.3:624.131

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГИБА ДИСКА ПЕРЕКРЫТИЯ В СТРУКТУРЕ КАРКАСНОГО ЗДАНИЯ

А.В. БЫХОВЦЕВ, В.Е. БЫХОВЦЕВ, К.С. КУРОЧКА

*Учреждение образования «Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины», Республика Беларусь*

Введение

Разработка и внедрение энергоресурсосберегающих технологий в промышленном и гражданском строительстве приводит к постановке ряда оригинальных задач. Одной из таких задач является расчёт и проектирование диска перекрытия сборно-монолитного каркаса здания. Диск перекрытия физически является сложной структурой, свойства которой неоднородны во всём объёме. В силу этого расчёт диска перекрытия по деформациям является математически сложной задачей. Её эффективное решение может быть получено методами математического моделирования на основе теории систем и системного подхода, методов нелинейной теории упругости и метода конечных элементов и (или) суперэлементов при использовании современных компьютерных технологий. От степени изученности системы в целом, от уровня подхода к описанию её функций и принятой методологии исследования зависит энергоматериалоёмкость системы в физической реализации.

Постановка задачи

Основной целью работы является разработка и исследование механико-математических моделей деформирования и прогибов диска перекрытия при учёте особенностей его структуры и свойств. В качестве рабочей гипотезы принято: диск перекрытия рассматривается как сложная неоднородная линейно-деформируемая пространственная система, определённая в n -связанной области. Оригинальным результатом работы является унифицированная технология компьютерного объектно-ориентированного моделирования прогибов диска перекрытия каркаса здания.

Предпосылки математического моделирования прогиба диска перекрытия.

Моделирование прогиба диска перекрытия при условии упругого деформирования будем производить исходя из основных положений теории изгиба тонких плит. Размеры плиты: h , a , b – толщина, ширина и длина плиты, причём $h \ll a$. На плиту действует система вертикальных сил. При разработке метода и алгоритма расчёта прогиба диска перекрытия примем следующие предпосылки (гипотезы Кирхгофа):

- Толщина плиты не изменяется:

$$\varepsilon_z = 0. \tag{1}$$

- После изгиба плиты нормаль к её срединной плоскости сохраняется:

$$\gamma_{yz} = 0 \text{ и } \gamma_{zx} = 0. \tag{2}$$

- Все точки срединной плоскости в горизонтальной плоскости не перемещаются:

$$u_{z=0} = v_{z=0} = 0. \quad (3)$$

Можно не считать деформации и напряжения по оси z .

Из уравнений Коши при условии (1) имеем: $\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = 0$. Это значит, что функция прогиба w не зависит от z , т. е. $w = w(x, y)$. Из условия (2) следует, что прямоугольник, образованный осями z и x или z и y , не изменяется. Следовательно, на основании уравнений Коши получим:

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = 0, \quad \text{отсюда} \quad \frac{dv}{dz} = -\frac{dw}{dy} \quad \text{и} \quad \frac{du}{dz} = -\frac{dw}{dx}.$$

Интегрируя эти выражения по z , будем иметь:

$$v = -z \frac{dw}{dy} + f_1(x, y), \quad u = -z \frac{dw}{dx} + f_2(x, y),$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции.

Из условия (3) следует: $f_1 = f_2 = 0$. Поэтому $v = -z \frac{dw}{dy}$, $u = -z \frac{dw}{dx}$ и

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = -z \frac{d^2 w}{dy^2}; \quad \varepsilon_{xy} = -2z \frac{d^2 w}{dx dy};$$

то есть при прогибе тонкой плиты деформации будут представлены вектором, содержащим только три ненулевые компоненты: $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}]^T$. В случае малого

перемещения выражения $-z \frac{d^2 w}{dx^2}$, $-z \frac{d^2 w}{dy^2}$ обозначают кривизну срединной

плоскости по направлению x и y . Поэтому они называются деформациями тонкой пластинки. Введём обозначение $\chi = [-\frac{d^2 w}{dx^2}, -\frac{d^2 w}{dy^2}, -2 \frac{d^2 w}{dx dy}]^T$, тогда получим

$$\varepsilon = z \cdot \chi.$$

Предположение 1 позволяет не считать деформации слоя на уровне z (σ_z), откуда для физических уравнений будем иметь:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E z}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{d^2 w}{dx^2} \\ -\frac{d^2 w}{dy^2} \\ -2 \frac{d^2 w}{dx dy} \end{bmatrix}.$$

При изгибе напряжённое состояние будет определяться изгибающими и крутящими моментами на единицу длины в направлениях x и y : $M = [M_x, M_y, M_{xy}]^T$, где

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{d^2 w}{dx^2} \\ -\frac{d^2 w}{dy^2} \\ -2 \frac{d^2 w}{dx dy} \end{bmatrix} \quad \text{или } M = D \cdot \chi .$$

Функцию прогиба целесообразно строить в виде полинома, вид которого будет зависеть от принятого метода решения задачи. В настоящей работе алгоритм решения разработан на основе метода конечных элементов. Учитывая сложность структуры и свойств моделируемого диска перекрытия, его дискретизация выполнена пространственными элементами: тетраэдрами или параллелепипедами. Каждый узел таких элементов имеет по три степени свободы, поэтому функцию прогиба для них будем строить в виде полиномов, содержащих 12 или 24 элемента соответственно. Так как эти полиномы должны иметь место во всей области конечного элемента, то, расписывая их для узловых точек, относительно коэффициентов получим системы линейных алгебраических уравнений соответственно 12-го и 24-го порядков. В матричной форме эти системы будут иметь вид: $\delta = B \alpha$, где α – вектор коэффициентов для выбранной формы полинома, δ – вектор обобщённых узловых перемещений, B – матрица, составленная из координат узлов конечного элемента в соответствии с выбранной формой полинома. Из последнего соотношения следует: $\alpha = B^{-1} \delta$. Используя полученные соотношения для конечного элемента деформации и моменты сил можно представить в виде следующих выражений:

$$\chi = C \cdot \alpha = C \cdot B^{-1} \cdot \delta \quad \text{и} \quad M = D \cdot \chi = D \cdot C \cdot B^{-1} \cdot \delta .$$

В соответствии с принципом возможных перемещений можем записать:

$$\delta^{*T} F = \iint_A \chi^{*T} M dx dy = \iint_A \delta^{*T} B^{-1T} C^T D C B^{-1} \delta dx dy ,$$

где A – площадь срединной плоскости элемента,

δ^* – вариация перемещения,

χ^* – вариация деформаций.

Так как узловые перемещения δ и матрица B от координат не зависят, то полученное соотношение преобразуется к виду:

$$F = B^{-1T} \iint_A C^T D C dx dy B^{-1} \delta .$$

Введём обозначение:

$$K = B^{-1T} \iint_A C^T D C dx dy B^{-1} .$$

Тогда предыдущее выражение примет вид: $F = K \delta$. Это будет основное уравнение метода конечных элементов для прогиба плиты. Матрица K зависит от физических свойств элемента и называется матрицей жёсткости. Интегрирование при вычислении этой матрицы возможно аналитическое, но в целом матрица K определяется численно. Построение глобальной матрицы жёсткости для всей системы элементов дискретизированной области производится посредством суммирования локальных матриц жёсткости. Построенная система уравнений будет системой линейных алгеб-

раических уравнений, решать её можно любым известным способом, лучше методом квадратного корня. Результатом решения будут перемещения узловых точек дискретизованной области рассчитываемой конструкции. В соответствии с изложенными основными положениями метода конечно-элементного моделирования диска перекрытия как пространственной сложной системы разработан алгоритм численного решения и программное обеспечение в среде Delphi 5.

Верификация алгоритма и программного обеспечения

Верификация алгоритма и программного обеспечения для моделирования прогиба сложного перекрытия проводилась методом вычислительного эксперимента. Для этого было рассмотрено в качестве тестовых более 10 реальных задач о расчёте прогиба плиты, для которых имеются опубликованные результаты решений другими методами. Все задачи в формализованной постановке сводились к третьей краевой задаче и решались в линейной постановке методом конечных элементов. Их численное решение проводилось для деформируемой области, определяемой векторами $\{hx\}$, $\{hy\}$, $\{hz\}$. Размерность и наполнение этих векторов зависит от специфики каждой конкретной задачи. Результаты компьютерного моделирования для четырёх из рассмотренных задач приведены в таблице 1.

Рассматривалась задача о нахождении прогибов квадратной плиты со стороной $a=2\text{м}$, жёстко заделанной по всем краям, нагруженной сосредоточенной в центре силой $P=392,4\text{ кН}$. Характеристики плиты: коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$; модуль упругости $E = 30 \cdot 10^3\text{ МПа}$.

Решения аналитическое и численное методом конечных элементов этой задачи опубликованы [1, с. 257]. В таблице 1 для точки в центре плиты представлены эти данные и результаты решений, полученные по разработанной методике и программе. Решения проводились для плит толщиной 10, 20, 30 и 40 см.

Таблица 1

Прогибы в центре квадратной плиты

Толщина плиты, см	Прогибы в центре плиты, см		
	Точное значение	МКЭ	МКЭ (Энергия-3Д)
10	0,344	0,353	0,333
20	0,042	0,044	0,041
30	0,0123	0,013	0,012
40	0,005	0,0055	0,006

Из анализа приведенных результатов очевидна достаточно хорошая точность полученных решений. Следовательно, предложенный программный комплекс можно применять для расчёта других задач теории изгиба пластин.

Моделирование прогиба диска перекрытия.

Диск перекрытия сборно-монолитного каркаса здания конструктивно состоит из следующих элементов (рис. 1).

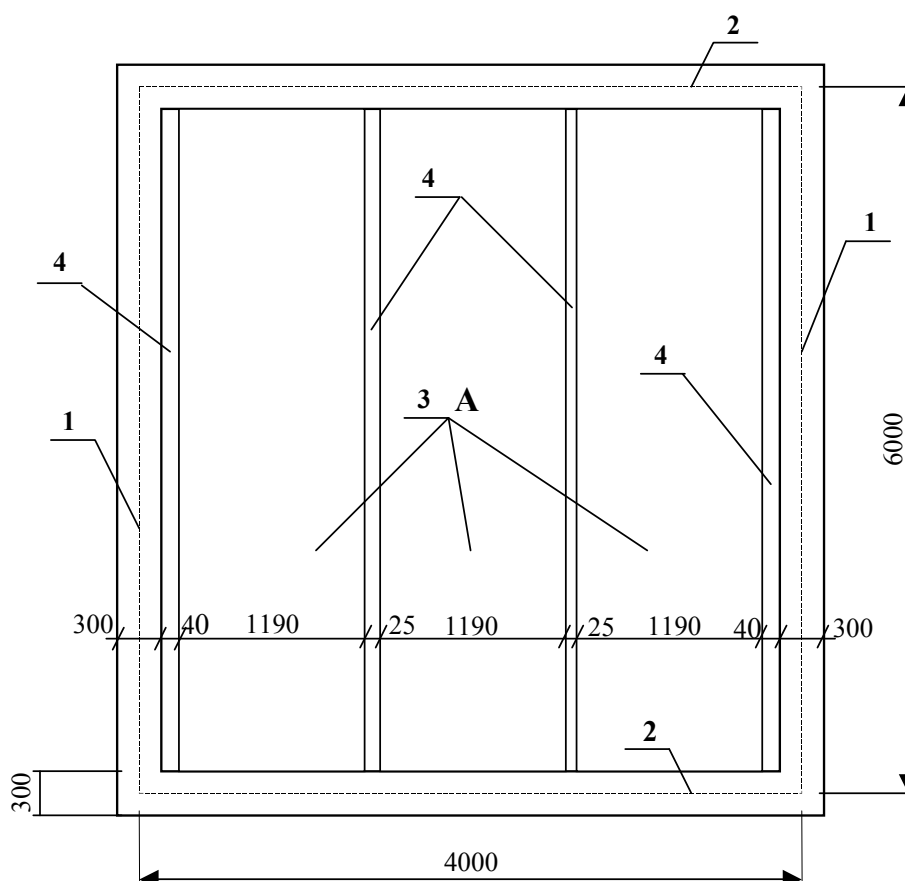


Рис. 1. Диск перекрытия сборно-монолитного каркаса здания: 1 – связевой ригель, 2 – несущий ригель, 3 – многпустотные плиты марки ПК 57.12-8Ат800Т, имеющие горизонтальные сквозные отверстия (рис. 2), 4 – швы

Модуль упругости для ригелей $E = 30 \cdot 10^3$ МПа, для плит $E = 20 \cdot 10^3$ МПа, для замоноличенных швов $E = 16 \cdot 10^3$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$.

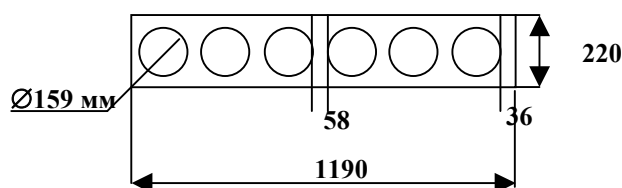


Рис. 2. Поперечное сечение многпустотной плиты марки ПК 57.12-8Ат800Т

Плиты объединены по торцам в одной плоскости несущими и связевыми ригелями в единый диск. Углы крайних плит жёстко закреплены. На плиты действует собственный вес и внешняя, равномерно распределённая на среднюю плиту, нагрузка интенсивностью $q = 6$ кПа. По длине плиты между собой и связевыми ригелями изначально не соединены.

Исследуем прогиб диска перекрытия в зависимости от условий связи его элементов. Диск перекрытия физически является сложной структурой, свойства которой неоднородны во всём объёме. Поэтому дискретизация делается объёмными конечными элементами в виде тетраэдров или параллелепипедов. Всех горизонтальных плоскостей дискретизации 4. Причём сквозные цилиндрические отверстия заменялись равновеликими параллелепипедами.

Для решения задачи были рассмотрены четыре модельные задачи, которые характеризуются следующим образом:

- плиты и связевые ригеля вдоль их длин между собой не соединены;
- плиты между собой вдоль их длин соединены;
- плиты и связевые ригеля вдоль их длин между собой соединены;
- плиты сплошные соединены между собой и с ригелями.

Анализ результатов и выводы

Анализ результатов верификации разработанной методики, алгоритмов и программного обеспечения и результатов решения модельных задач позволяют сделать следующие выводы:

1. Результаты верификации показали достаточно хорошую точность решений, получаемых по разработанной методике и программе.
2. Результаты решений тестовых и модельных задач хорошо соответствуют основным положениям теории изгиба плит.
3. Для рассматриваемого диска перекрытия при загрузке внешней нагрузкой только средней плиты при незамоноличенных швах прогиб происходит у всех плит и несущих ригелей. Максимальный прогиб у средней плиты. Связевые ригеля не прогибаются.
4. При замоноличенных швах между плитами величина прогиба центральной плиты уменьшается. Связевые ригеля не прогибаются.
5. При всех замоноличенных швах величина прогиба центральной плиты уменьшается ещё больше. Связевые ригеля прогибаются.
6. При условии объёмной однородности плит их прогиб минимальный.

Согласно экспериментальным данным прогиб в точке А (рис. 1) составил $w = 0,54$ см, при дискретизации прямоугольными элементами – $w = 0,53$ см, при использовании конечных элементов в форме тетраэдров – $w = 0,52$ см. Таким образом, полученные результаты хорошо соответствуют экспериментальным данным.

Из анализа полученных результатов также следует, что замоноличивание швов между плитами и ригелями обязательно должно производиться раствором, прочность которого при затвердевании близка к прочности конструктивных элементов диска перекрытия. Из изложенного следует, что разработанная методика и программный комплекс, разработанный в среде Delphi 5, позволяют с достаточной для практики точностью проектировать диски перекрытия зданий каркасного типа при учете объёмной структуры и свойств элементов диска перекрытия и условий связи между ними и несущими элементами каркаса здания.

Литература

1. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчётах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 342 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 540 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
4. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
5. Быховцев В.Е. Компактный алгоритм построения матрицы жесткости в методе конечных элементов //Изд. АН БССР, серия ф.-м., № 1. – Наука, 1983, С. 34-37.

Получено 10.07.2001 г.