

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Сельскохозяйственные машины»

П. Е. Родзевич, С. А. Орлов

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**по решению расчетно-графических и контрольных работ
по одноименному курсу для студентов
дневной и заочной форм обучения**

Гомель 2009

УДК 539.3(075.8)
ББК 30.121я73
Р60

*Рекомендовано научно-методическим советом
механико-технологического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 9 от 22.09.2008 г.)*

Рецензент: зав. каф. «Обработка материалов давлением» ГГТУ им. П. О. Сухого
д-р техн. наук, проф. *М. Н. Верещагин*

Родзевич, П. Е.

Р60

Механика материалов : метод. указания по решению расчет.-граф. и контрол. работ по одноим. курсу для студентов днев. и заоч. форм обучения / П. Е. Родзевич, С. А. Орлов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2009. – 118 с. – Систем. требования: РС не ниже Intel Celeron 300 МГц; 32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb; Windows 98 и выше; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://lib.gstu.local>. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены примеры решения типовых задач курса «Механика материалов» с подробными пояснениями.

Для студентов всех специальностей, изучающих курс «Механика материалов» дневной и заочной форм обучения.

**УДК 539.3(075.8)
ББК 30.121я73**

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2009

Оглавление

Цели и задачи.....	4
Введение.....	5
1. Растяжение-сжатие.....	6
2. Расчет статически неопределимых стержней при растяжении-сжатии.....	11
3. Расчет стержневых систем	21
4. Кручение.....	31
5. Геометрические характеристики плоских сечений	42
6. Изгиб.....	57
7. Косой (неплоский) изгиб.....	75
8. Изгиб с кручением.....	83
9. Определение перемещений при изгибе.....	87
10. Расчет статически неопределимых балок при изгибе. Метод сил.....	93
11. Устойчивость сжатых стержней (продольный изгиб).....	108
12. Ударные нагрузки.....	114
Литература.....	118

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

Методическое указание предназначено для студентов механико-технологического и машиностроительного факультета дневного и заочного отделений.

Целью методического указания является систематизация, углубление и расширение знаний студентов, а также возможность применения этих знаний при решении задач курса «Механика материалов».

Для достижения этой цели были рассмотрены основные типовые задачи курса «Механика материалов» с подробными пояснениями, которые охватывают основные разделы курса: растяжение-сжатие; кручение; геометрические характеристики сечений; плоский и неплоский изгибы; изгиб с кручением; устойчивость; динамическое нагружение.

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов является одной из ведущих инженерных наук. В ней изложены принципы и методы расчета частей сооружений, деталей и узлов машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Основным расчетным объектом в курсе механики материалов является брус (стержень), т.е. тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. При нагружении бруса силами F_1, F_2, \dots, F_n (рис. 1) в его поперечном сечении в общем виде будут возникать следующие внутренние силовые факторы, характеризующие каждый вид деформирования:

- продольная сила N при растяжении-сжатии;
- крутящий момент M_z при кручении;
- поперечная сила Q_x, Q_y и изгибающий момент M_x, M_y при изгибе.

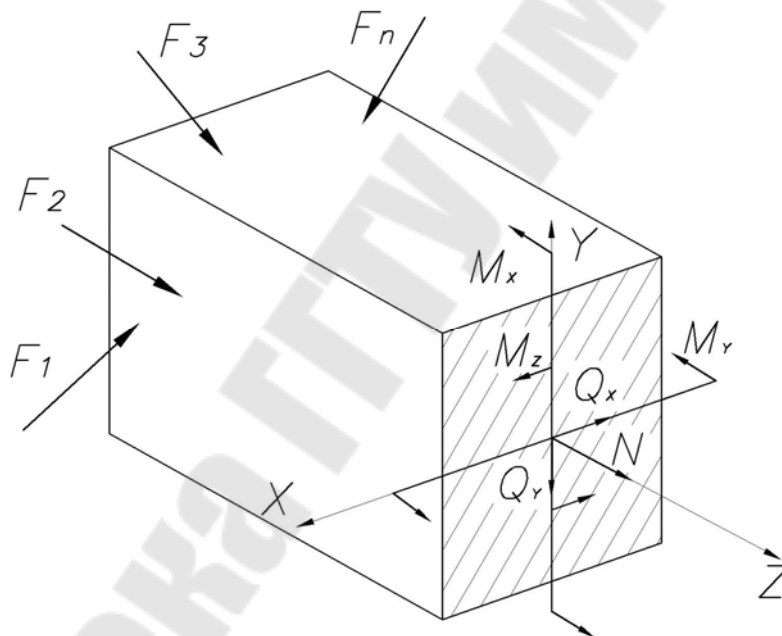


Рис. 1. Внутренние силовые факторы

Определение внутренних силовых факторов является первостепенной задачей при рассмотрении какой-либо конструкции. Их определяют с помощью метода сечений, суть которого в мысленном расчленении бруса плоскостью и рассмотрении равновесия отсеченной части, используя уравнения равновесия статики.

Любой внутренний силовой фактор может быть величиной постоянной или изменяться по какому-либо закону (линейному, параболическому и т.п.). График, изображающий закон изменения силового фактора по длине бруса, называется *эпюрой* силового фактора.

1. РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Растяжением-сжатием называется вид деформирования бруса (стержня), при котором в его поперечном сечении наблюдается только продольная сила. Продольная сила может быть направлена от сечения, вызывая растяжение, и к сечению, вызывая сжатие. Правило знаков при определении продольной силы таково:

если продольная сила вызывает растяжение, то она считается положительной, если вызывает сжатие – отрицательной.

Сила N распределяется по площади A поперечного сечения равномерно. Отношение силы N к площади A называется *нормальным напряжением* (Па)

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Условие прочности при растяжении-сжатии имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение материала бруса на растяжение или сжатие.

Допускаемое напряжение определяется видом материала исходя из его прочностных характеристик и намечаемого коэффициента запаса прочности.

Для пластичного материала (например, сталь) можно использовать следующую формулу

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где σ_T – предел текучести стали;

n_T – коэффициент запаса прочности по пределу текучести,

$$n_T \geq 1.$$

При использовании хрупкого материала (например, чугун), который по разному сопротивляется растяжению и сжатию, используют предел прочности на растяжение и сжатие:

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{B.P.}}{n_B}, \quad [\sigma]_C = \frac{\sigma_{B.C.}}{n_B},$$

где $\sigma_{B.P.}$, $\sigma_{B.C.}$ – предел прочности материала на растяжение и сжатие соответственно;

n_B – коэффициент запаса прочности материала.

При растяжении или сжатии стержень будет удлиняться или укорачиваться. В общем виде удлинение стержня (или участка) можно определить по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z) dz}{EA},$$

где $N(z)$ – продольная сила на участке длиной l ;

E – модуль продольной упругости первого рода, Па;

EA – жесткость при растяжении-сжатии.

Если $N(z) = const$, то

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Таким образом, все поперечные сечения стержня будут перемещаться. Определить перемещение какого-либо сечения можно путем рассмотрения поведения всех предшествующих ему участков, начиная от какого-то неподвижного или условно неподвижного сечения.

Задача № 1

Построить эпюру продольных сил для стержня, изображенного на рисунке 2.

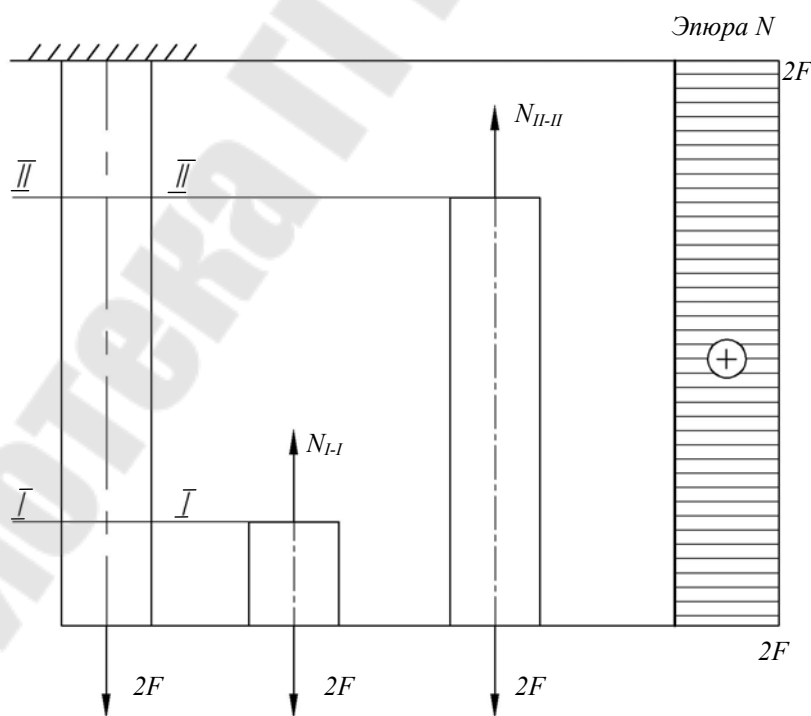


Рис. 2. Стержень и эпюра продольных сил

Определим продольные силы в сечениях $I-I$ и $II-II$. Для этого воспользуемся методом сечений и рассмотрим равновесие нижней отсеченной от стержня части.

$$\sum F_i = 0; N_{I-I} - 2F = 0.$$

Отсюда видно, что

$$N_{I-I} = 2F = const.$$

Продольная сила в сечении направлена верно и имеет по правилу знаков положительный знак, т.к. вызывает растяжение. По аналогии определяется продольная сила в сечении $II-II$.

$$\sum F_i = 0; N_{II-II} - 2F = 0,$$

$$N_{II-II} = 2F = const.$$

Таким образом, продольная сила имеет постоянное значение по всей длине стержня, а сам стержень испытывает растяжение (знак «+»).

Задача № 2

Построить эпюру продольных сил для стержня, изображенного на рисунке 3.

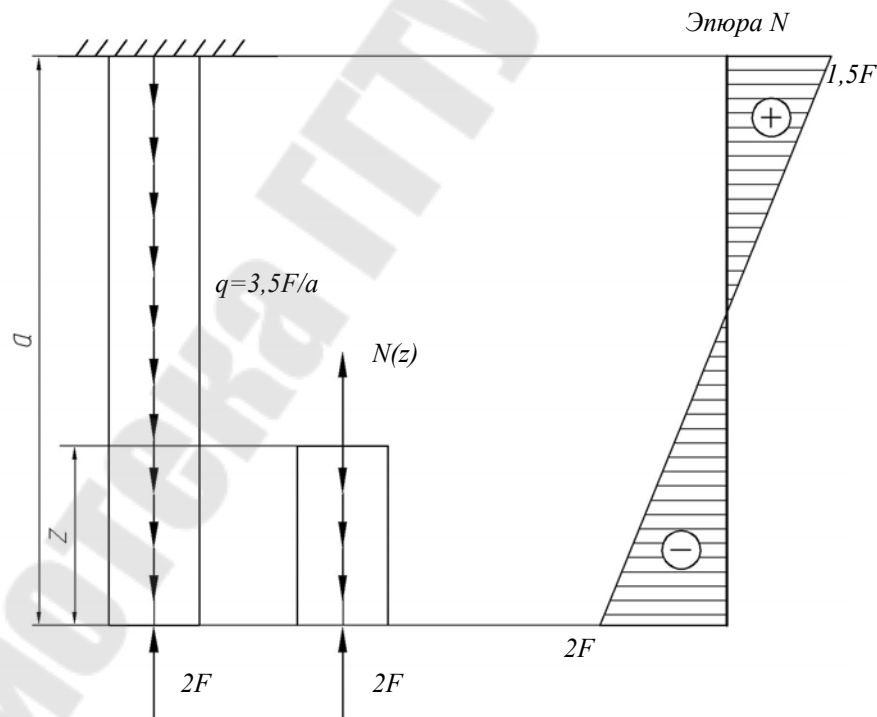


Рис. 3. Стержень и эпюра продольных сил задачи № 2

Рассмотрим сечение, расположенное на расстоянии z от свободного конца стержня.

$$\sum F_i = 0; N(z) + 2F - qz = 0.$$

Отсюда видно, что

$$N(z) = -2F + qz - \text{линейная зависимость.}$$

Необходимо рассмотреть для построения эпюры продольных сил два значения параметра z : $z = 0$ (начало стержня) и $z = a$ (конец стержня).

$$N(z = 0) = -2F + q \cdot 0 = -2F;$$

$$N(z = a) = -2F + qa = -2F + \frac{3,5F}{a}a = +1,5F.$$

В начале стержня наблюдается сжатие ($N(z) = -2F$), а в конце стержень испытывает растяжение ($N(z) = +1,5F$).

Задача № 3

Проверить прочность стального стержня (рис. 4), приняв допустимое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Если прочность не обеспечена – подобрать требуемый размер сечения. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений, если модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Исходные данные: $F_2 = 81$ кН, $F_1 = 9$ кН, $q = 20$ кН/м, $A_2 = 3$ см², $A_1 = 2$ см², $a = 1,2$ м, $b = c = 0,8$ м.

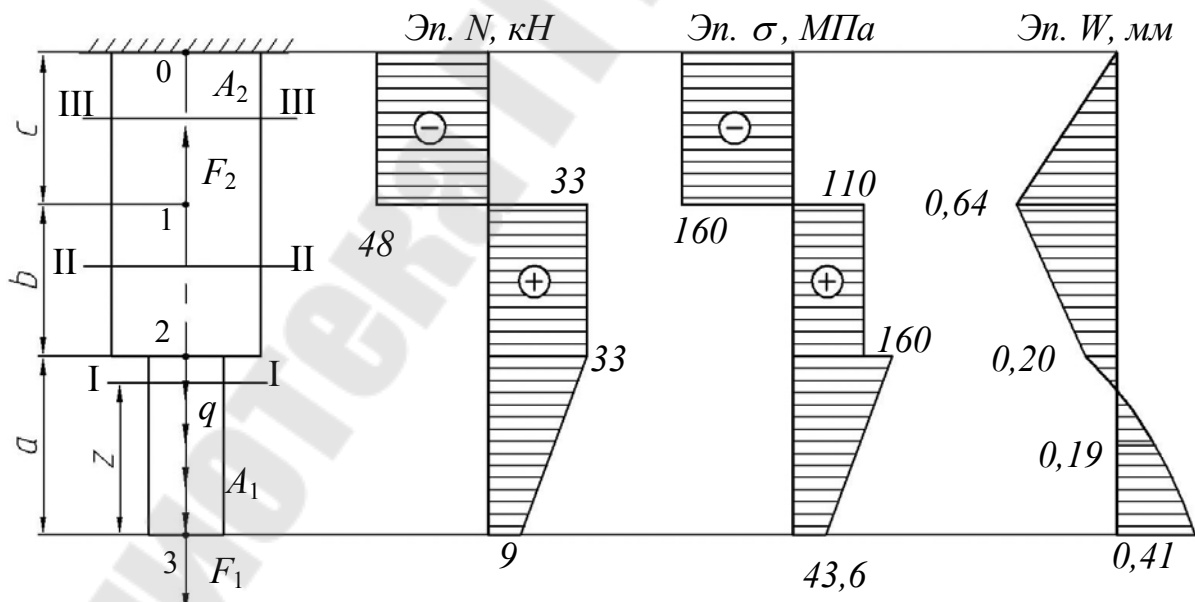


Рис. 4. Стержень, эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений

Решение.

1. Определяем продольные силы в сечениях *I-I*, *II-II*, *III-III*.

С учетом правила знаков имеем:

$$N_I(z) = F_1 + qz,$$

при $z = 0$; $N_I(z) = F_1 = 9$ кН;

при $z = a = 1,2$ м; $N_I(z) = F_1 + qa = 9 + 20 \cdot 1,2 = 33$ кН;

$$N_{II} = F_1 + qa = 9 + 20 \cdot 1,2 = 33 \text{ кН};$$

$$N_{III} = F_1 + qa - F_2 = 9 + 20 \cdot 1,2 - 81 = -48 \text{ кН}.$$

По полученным данным строим эпюру продольных сил (рис. 4).

2. Определяем напряжения в сечениях *I-I*, *II-II*, *III-III*.

$$\sigma_I(z) = \frac{N_I(z)}{A_1},$$

при $z = 0$; $\sigma_I = \frac{9 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 45 \cdot 10^6 \text{ Па} = 45 \text{ МПа} \leq [\sigma]$ – условие

прочности выполняется;

при $z = a$; $\sigma_I = \frac{33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 165 \text{ МПа} > [\sigma]$ – условие прочности не

выполняется.

Необходимо подобрать новый размер сечения на участке a , приняв $\sigma_I(z = a) = [\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Тогда

$$A_I^* \geq \frac{N_I(z = a)}{[\sigma]} = \frac{33 \cdot 10^3}{160} = 206,25 \text{ мм}^2 = 2,0625 \text{ см}^2.$$

$$\sigma_I(z = 0) = \frac{9 \cdot 10^3}{2,0625 \cdot 10^{-4}} = 43,6 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{33 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 110 \text{ МПа} \leq [\sigma] -$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_2} = \frac{-48 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = -160 \text{ МПа} \leq [\sigma] -$$

условия прочности выполняются.

Строим эпюру напряжений (рис. 4).

3. Определяем перемещения характерных сечений и строим эпюру.

Эпюра перемещений строится относительно неподвижного сечения. В данном случае абсолютно неподвижным является сечение жесткой заделки (сечение 0), т.е. $W_0 = 0$.

$$W_1 = W_0 + \Delta l^{0-1} = \frac{N^{0-1}c}{EA_2} = \frac{-48 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = -0,64 \cdot 10^{-3} = -0,64 \text{ мм.}$$

$$W_2 = W_1 + \Delta l^{1-2} = W_1 + \frac{N^{1-2}b}{EA_2} = -0,64 + \frac{33 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = -0,20 \text{ мм.}$$

На участках 0-1 и 1-2 продольные силы имеют постоянные значения. На участке 2-3 продольная сила изменяется по линейному закону. Для правильного решения интеграла необходимо переписать закон изменения продольной силы $N^{2-3}(z)$, при рассмотрении эпюры со стороны жесткой заделки.

Тогда подынтегральное выражение для определения удлинения на участке 2-3 будет иметь вид

$$N^{2-3}(z) = 33 - qz.$$

$$\begin{aligned} W_3 = W_2 + \Delta l^{2-3} &= -0,20 + \int_0^a \frac{N^{2-3}(z)dz}{EA_1^*} = -0,20 + \int_0^a \frac{(33 - qz)dz}{EA_1^*} = -0,20 + \\ &+ \left(\frac{33 \cdot 10^3 \cdot a}{EA_1^*} - \frac{qa^2}{2EA_1^*} \right) = -0,20 + \frac{33 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,0625 \cdot 10^{-4}} - \\ &- \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1,2^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,0625 \cdot 10^{-4}} = 0,41 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Эпюра перемещений на участке 2-3 ограничена параболой, для построения которой необходима промежуточная точка, например, по середине участка.

Тогда

$$\begin{aligned} W_{3'} = W_2 + \Delta l^{2-3'} &= -0,20 + \int_0^{a/2} \frac{N^{2-3}(z)dz}{EA_1^*} = -0,20 + \left(\frac{33 \cdot 10^3 \cdot a/2}{EA_1^*} - \frac{q(a/2)^2}{2EA_1^*} \right) = \\ &= -0,20 + \frac{33 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,0625 \cdot 10^{-4}} - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,6^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,0625 \cdot 10^{-4}} = 0,19 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Строим эпюру перемещений (рис.4).

2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

В статически неопределимых задачах количество неизвестных реакций больше, чем возможное число уравнений статики. Для реше-

ния таких задач составляется дополнительное уравнение – уравнение совместности перемещений (деформаций).

Задача № 4

Раскрыть статическую неопределимость составного стержня (рис. 5) и построить эпюры продольных сил и перемещений поперечных сечений.

1. Решим задачу в отношении существующей схемы и определим перекроется ли зазор $\Delta = \frac{2Fl}{EA}$.

Для этого исследуем поведение верхней и нижней частей в свободном состоянии.

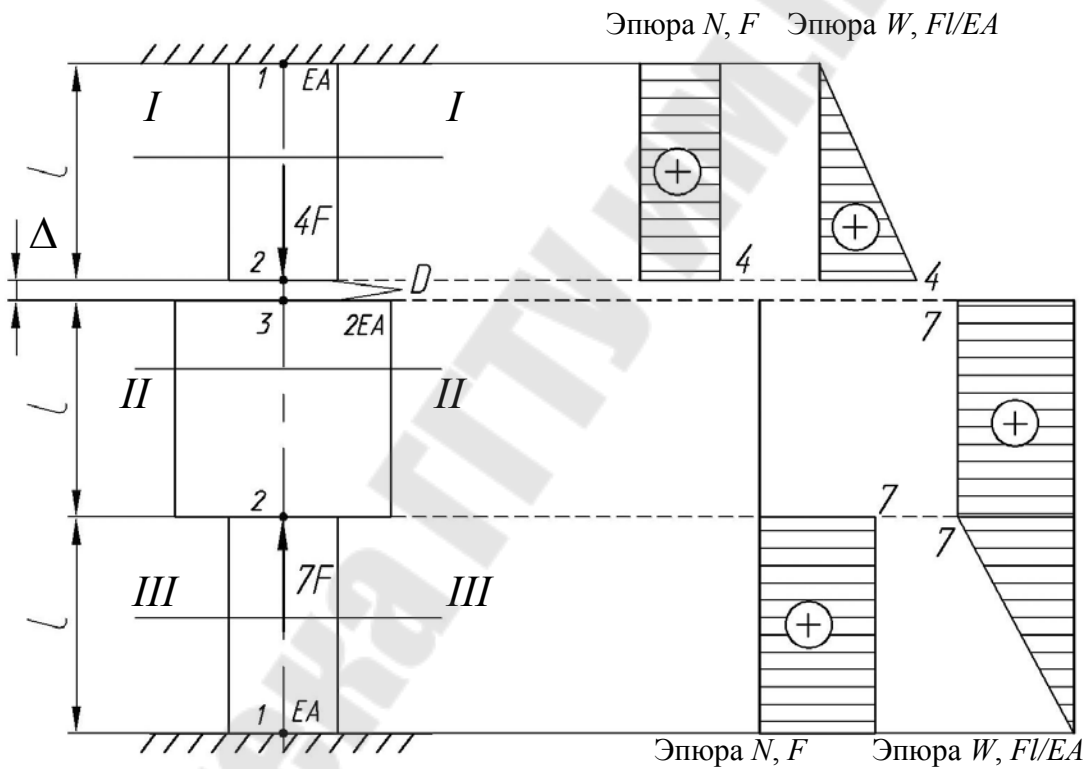


Рис. 5. Схема стержня и эпюры продольных сил и перемещений только от сил $4F, 7F$

Верхняя часть:

$$N_I = 4F;$$

$$W_I = \int \frac{N_I dz}{EA} + C = \frac{4Fz}{EA} + C; \quad W_I(z=0) = W_1 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$W_I = \frac{4Fz}{EA}; \quad W_I(z=l) = \frac{4Fl}{EA}; \quad W_2 = \frac{4Fl}{EA}.$$

Верхняя часть переместилась вниз на величину $\frac{4Fl}{EA}$.

Исследуем поведение нижней части стержня:

$$N_{III} = 7F; \quad N_{II} = 0;$$

$$W_{III} = \int \frac{N_{III} dz}{EA} + C = \frac{7Fz}{EA} + C; \quad W_{III}(z=0) = W_1 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$W_{III} = \frac{7Fz}{EA}; \quad W_{III}(z=l) = \frac{7Fl}{EA}; \quad W_2 = \frac{7Fl}{EA}.$$

$$W_{II} = \int \frac{N_{II} dz}{2EA} + C = 0 + C; \quad W_{II}(z=0) = W_{III}(z=l) \Rightarrow C = \frac{7Fl}{EA};$$

$$W_3 = \frac{7Fl}{EA}.$$

Таким образом, суммарное перемещение сечений 2 и 3 равно

$$W_{\Sigma} = W_2 + W_3 = \frac{4Fl}{EA} + \frac{7Fl}{EA} = \frac{11Fl}{EA} > \Delta = \frac{2Fl}{EA} - \text{зазор перекрывается.}$$

2. Итак, в месте контакта 2-х частей стержня (т. D) возникнет реакция R_D . По III-у закону Ньютона ее действие будет распространяться и на верхнюю, и на нижнюю части. Рассмотрим отдельно ее воздействие на эти части.

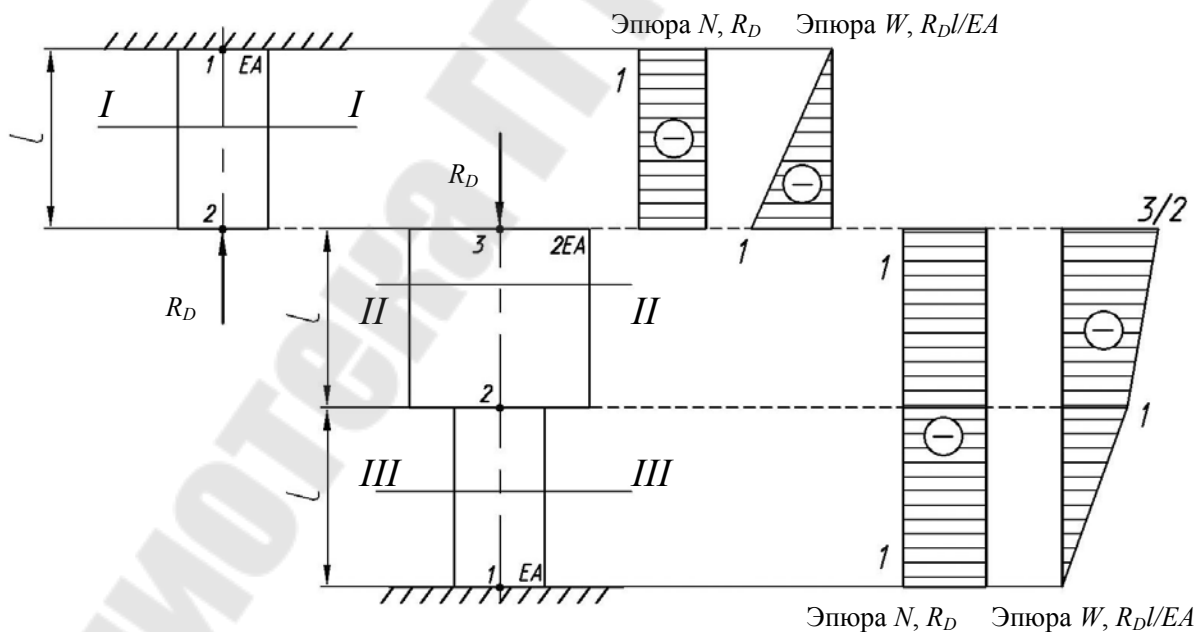


Рис. 6. Схема стержня и эпюры продольных сил и перемещений только от реакции R_D

Верхняя часть:

$$N_I = R_D; \quad W_I = \int \frac{N_I dz}{EA} + C = \frac{R_D z}{EA} + C.$$

$$W_I(z=0) = W_1 = 0 \Rightarrow C = 0; \quad W_I = \frac{R_D z}{EA}; \quad W_I(z=l) = W_2 = \frac{R_D l}{EA}.$$

Итак, под действием силы R_D верхняя часть (т. 2) переместится вверх на величину $\frac{R_D l}{EA}$.

Найдем перемещение т. D , принадлежащей нижнему сечению.

Внутренняя сила на участках I и II , очевидно, постоянна:

$$N_{III} = N_{II} = -R_D \quad - \text{сжатие.}$$

$$W_{III} = \int \frac{N_{III} dz}{EA} + C = \frac{R_D z}{EA} + C; \quad W_{III}(z=0) = W_1 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$W_{III} = \frac{R_D z}{EA}; \quad W_2 = W_{III}(z=l) = \frac{R_D l}{EA}.$$

$$W_{II} = \int \frac{N_{II} dz}{2EA} + C = \frac{R_D z}{2EA} + C; \quad W_{II}(z=0) = W_{III}(z=l) \Rightarrow C = \frac{R_D l}{EA}.$$

$$W_{II} = \frac{R_D z}{2EA} + \frac{R_D l}{EA}.$$

$$W_{II}(z=l) = W_3 = \frac{R_D l}{2EA} + \frac{R_D l}{EA} = \frac{3 R_D l}{2 EA}.$$

3. Условие совместности перемещений должно отражать тот факт, что под действием внешних сил $4F$ и $7F$, а также под действием силы R_D , возникающей в контакте после смыкания частей, предварительный зазор будет иметь значение $\Delta = \frac{2Fl}{EA}$.

$$\Delta = \frac{2Fl}{EA}.$$

$$W_D^{\text{верх}} + W_D^{\text{нижн}} = \Delta.$$

$$\frac{4Fl}{EA} - \frac{R_D l}{EA} + \frac{7Fl}{EA} - \frac{3 R_D l}{2 EA} - \frac{2Fl}{EA} = 0.$$

$$4Fl + 7Fl - 2Fl = R_D l + \frac{3}{2} R_D l.$$

$$9F = \frac{5}{2} R_D \Rightarrow R_D = \frac{9F \cdot 2}{5} = \frac{18}{5} F.$$

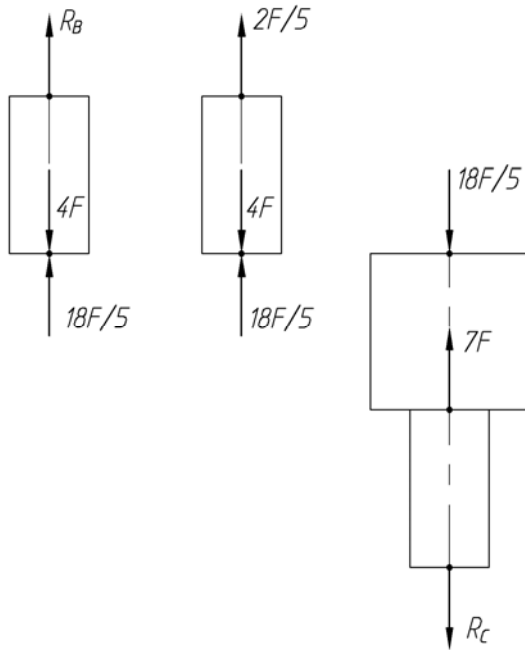


Рис. 7. Схема стержня для определения реакций

После смыкания отдельных частей стержня силу R_D следует рассматривать как силу внутренней природы для всего стержня в целом. Поэтому прямым образом она в расчетах не участвует. Однако с ее помощью можно рассчитать, к примеру, реакцию R_B в верхнем сечении.

$$R_B + \frac{18}{5}F - 4F = 0;$$

$$R_B = 4F - \frac{18}{5}F = \frac{20F}{5} - \frac{18F}{5} = \frac{2}{5}F.$$

Итак, мы не ошиблись в предварительно выбранном направлении реакции R_B . Реакция направлена вверх (см. рис. 7)

$$R_B = \frac{2}{5}F.$$

Можно конечно, рассчитать также и реакцию в нижней части стержня R_C . Для этого рассмотрим схему (см. рис. 7).

$$\frac{18}{5}F + R_C = 7F; \Rightarrow R_C = 7F - \frac{18}{5}F = \frac{35F}{5} - \frac{18F}{5} = \frac{17}{5}F.$$

4. Теперь построим эпюры в первоначальной системе, принимая во внимание найденные реакции в верхней и нижней частях стержня. Систему условно можно изобразить в рабочем состоянии, после смыкания отдельных частей стержня.

Верхняя часть:

$$N_I = \frac{2}{5}F;$$

$$W_I = \int \frac{N_I dz}{EA} + C = \frac{2Fz}{5EA} + C;$$

$$W_I(z=0) = W_1 = 0 \Rightarrow C = 0; \quad W_I = \frac{2Fz}{5EA}; \quad W_I(z=l) = W_2 = \frac{2Fl}{5EA}.$$

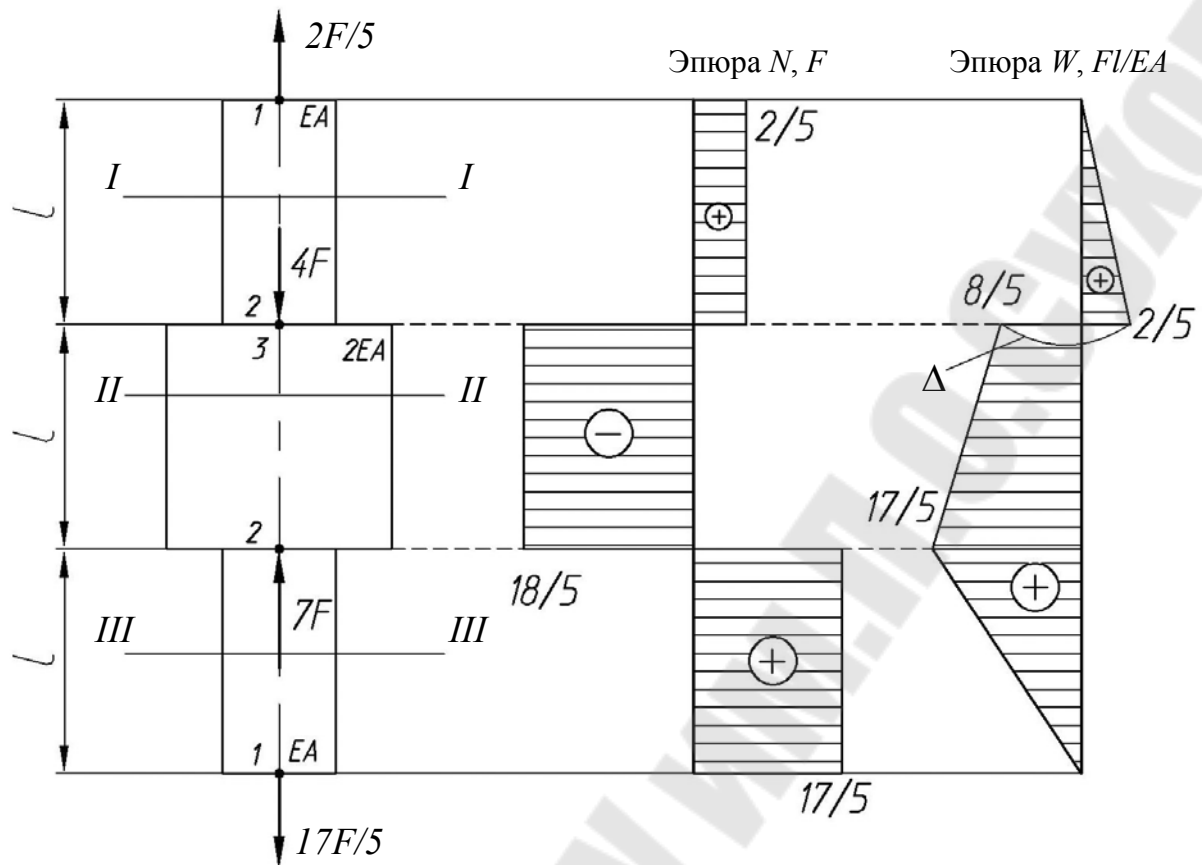


Рис. 8. Окончательная схема стержня и эпюры продольных сил и перемещений

Нижняя часть:

$$N_{III} = \frac{17}{5}F; \quad N_{II} = \frac{11}{5}F - 7F = \frac{17F}{5} - \frac{35F}{5} = -\frac{18}{5}F.$$

$$W_{III} = \int \frac{N_{III} dz}{EA} + C = \frac{17Fz}{5EA} + C; \quad W_{III}(z=0) = W_1 = 0 \Rightarrow C = 0;$$

$$W_{III} = \frac{17Fz}{5EA}; \quad W_{III}(z=l) = W_2 = \frac{17Fl}{5EA}.$$

$$W_{II} = \int \frac{N_{II} dz}{2EA} + C = -\frac{18Fl}{5 \cdot 2EA} + C; \quad W_{II}(z=0) = W_{III}(z=l) \Rightarrow C = \frac{17Fl}{5EA};$$

$$W_{II} = -\frac{18Fl}{10EA} + \frac{17Fl}{5EA};$$

$$W_{II}(z=l) = W_3 = -\frac{18Fl}{10EA} + \frac{34Fl}{10EA} = \frac{16Fl}{10EA} = \frac{8Fl}{5EA}.$$

По полученным данным строим эпюры продольных сил и перемещений (см. рис. 8).

Заметим, что для эпюры перемещений приняты разные системы отсчета: верхнее сечение переместилось вниз на величину $\frac{2Fl}{5EA}$, а нижнее – вверх на величину $\frac{8Fl}{5EA}$.

Таким образом, суммарный зазор между двумя частями стержня составляет

$$\frac{2Fl}{5EA} + \frac{8Fl}{5EA} = \frac{10Fl}{5EA} = \frac{2Fl}{EA}.$$

Задача решена верно!

Задача № 5

Раскрыть статическую неопределимость стержня (рис. 9) и построить эпюры продольных сил и перемещений поперечных сечений.

1. Решим задачу в отношении существующей схемы и определим, перекроется ли зазор $\Delta = \frac{2Fl}{EA}$.

Продольные силы в сечениях равны

$$N_{III} = 0; \quad N_{II} = 4F; \quad N_I = 3F.$$

Определяем перемещения начиная от заделки:

$$W_I = \int \frac{N_I dz}{EA} + C = \frac{3Fz}{EA} + C; \quad W_I(z=0) = W_1 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$W_I = \frac{3Fz}{EA}; \quad W_2 = W_I(z=l) = \frac{3Fl}{EA}; \quad W_2 = \frac{3Fl}{EA}.$$

$$W_{II} = \int \frac{N_{II} dz}{2EA} + C = \frac{2Fz}{EA} + C; \quad W_{II}(z=0) = W_I(z=l) \Rightarrow C = \frac{3Fl}{EA}.$$

$$W_{II} = \frac{2Fz}{EA} + \frac{3Fl}{EA}; \quad W_3 = W_{II}(z=l) = \frac{2Fl}{EA} + \frac{3Fl}{EA} = \frac{5Fl}{EA}; \quad W_3 = \frac{5Fl}{EA}.$$

$$W_{III} = \int \frac{N_{III} dz}{2EA} + C = 0; \quad W_{III}(z=0) = W_{II}(z=l) \Rightarrow C = \frac{5Fl}{EA}$$

$$W_{III} = \frac{5Fl}{EA}; \quad W_4 = \frac{5Fl}{EA}.$$

Т.к. $W_4 > \Delta$ заключаем, что зазор Δ .

Строим эпюры продольных сил и перемещений.

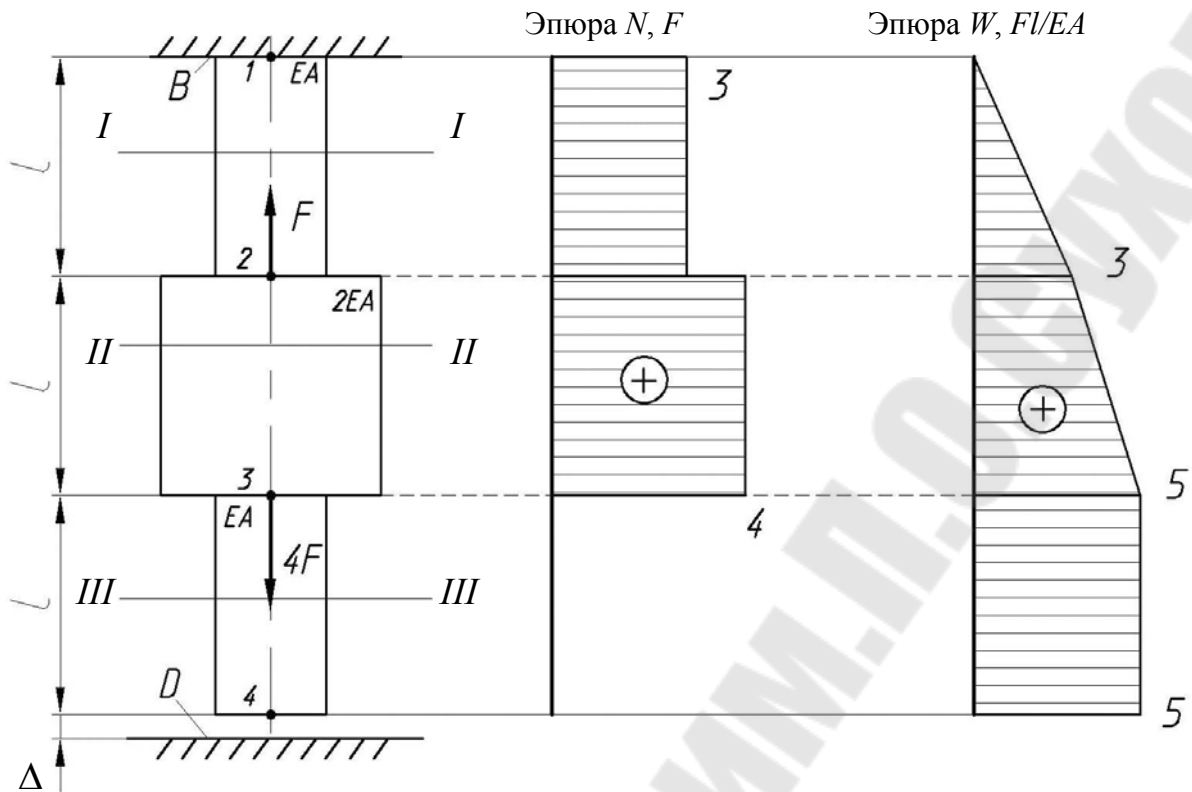


Рис. 9. Схема стержня и эпюры продольных сил и перемещений только от сил $4F, F$

2. Решим задачу в отношении перемещений только от реакции, возникшей в нижней заделке.

$$N_I = R_D; \quad N_{II} = R_D; \quad N_{III} = R_D.$$

$$W_I = \int \frac{N_I dz}{EA} + C = \frac{R_D z}{EA} + C; \quad W_I(z=0) = W_1 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$W_I = \frac{R_D z}{EA}; \quad W_2 = W_I(z=l) = \frac{R_D l}{EA}; \quad W_2 = \frac{R_D l}{EA}.$$

$$W_{II} = \int \frac{N_{II} dz}{2EA} + C = \frac{R_D z}{2EA} + C; \quad W_{II}(z=0) = W_I(z=l) \Rightarrow C = \frac{R_D l}{EA}.$$

$$W_{II} = \frac{R_D z}{2EA} + \frac{R_D l}{EA}; \quad W_3 = W_{II}(z=l) = \frac{R_D l}{2EA} + \frac{R_D l}{EA} = \frac{3 R_D l}{2 EA}; \quad W_3 = \frac{3 R_D l}{2 EA}.$$

$$W_{III} = \int \frac{N_{III} dz}{EA} + C = \frac{R_D z}{EA} + C; \quad W_{III}(z=0) = W_{II}(z=l) \Rightarrow C = \frac{3 R_D l}{2 EA}.$$

$$W_{III} = \frac{R_D z}{EA} + \frac{3 R_D l}{2 EA}; \quad W_4 = W_{III}(z=l) = \frac{R_D l}{EA} + \frac{3 R_D l}{2 EA} = \frac{5 R_D l}{2 EA}.$$

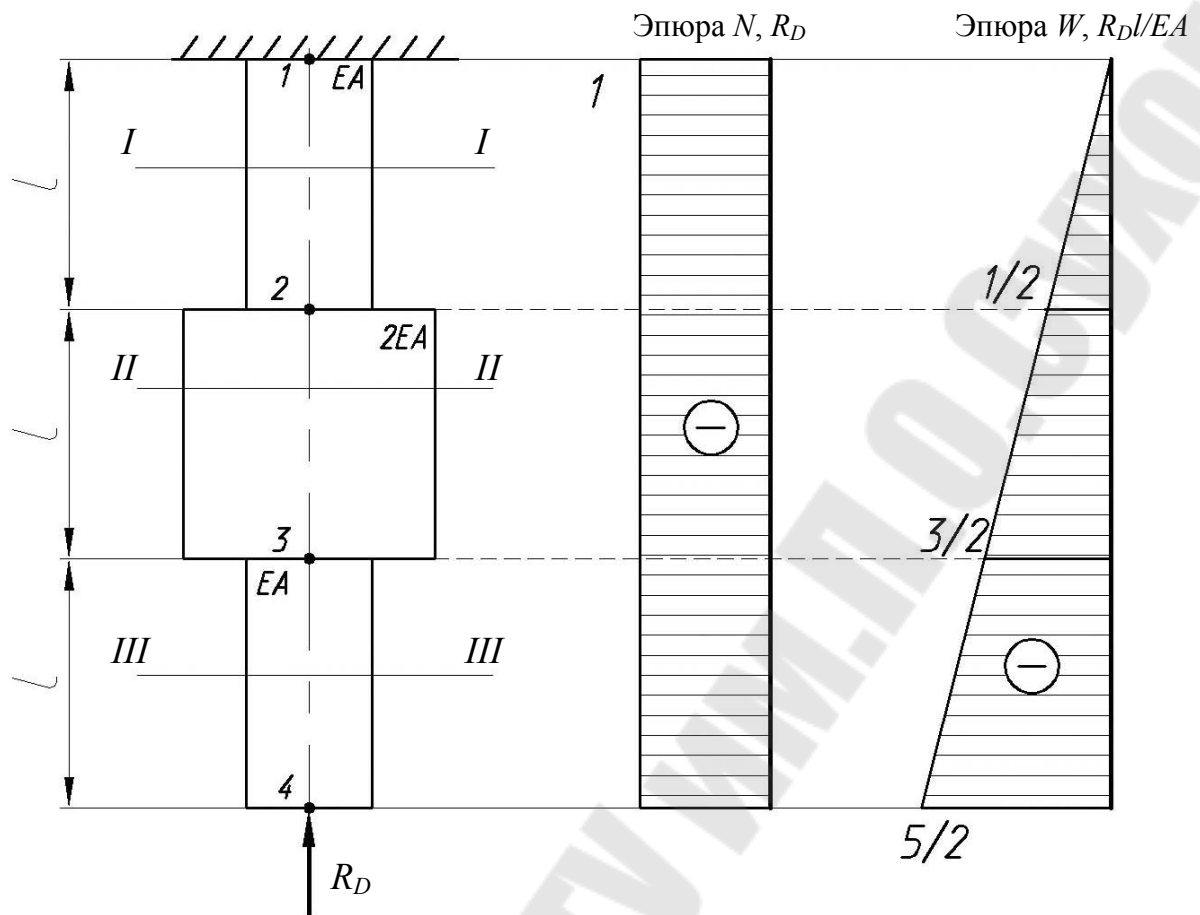


Рис. 10. Схема стержня и эпюры продольных сил и перемещений только от реакции R_D

3. Учитывая существующий зазор Δ составим условие совместности перемещений.

$$W_4^F - \Delta = W_4^{R_D}; \quad \frac{5Fl}{EA} - \frac{2Fl}{EA} = \frac{5 R_D l}{2 EA}.$$

Из последнего условия определим реакцию R_D .

$$\frac{3Fl}{EA} = \frac{5 R_D l}{2 EA}; \quad 3F = \frac{5}{2} R_D \Rightarrow R_D = \frac{6F}{5}.$$

4. Построим эпюры в рассчитанной нами системе.

$$N_{III} = -\frac{6F}{5}; \quad N_{II} = +4F - \frac{6F}{5} = \frac{14}{5}F; \quad N_I = -F + 4F - \frac{6F}{5} = \frac{9F}{5}.$$

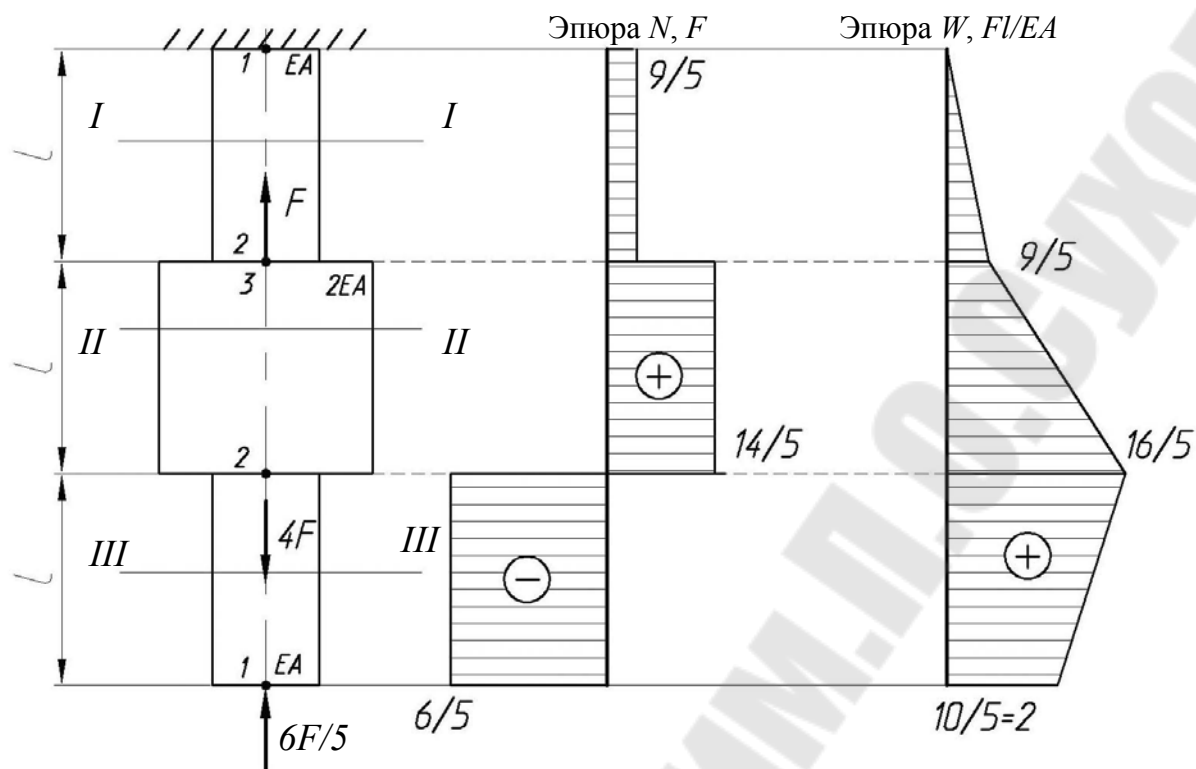


Рис. 11. Окончательная схема стержня и эпюры продольных сил и перемещений

Строим эпюру перемещений.

$$W_I = \int \frac{N_I dz}{EA} + C = \frac{9Fz}{5EA} + C; \quad W_I(z=0) = W_1 = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$W_I = \frac{14Fz}{5EA}; \quad W_2 = W_I(z=l) = \frac{9Fl}{5EA}.$$

$$W_{II} = \int \frac{N_{II} dz}{2EA} + C = \frac{14Fz}{5 \cdot 2EA} + C = \frac{7Fz}{5EA} + C;$$

$$W_{II}(z=0) = W_I(z=l) \Rightarrow C = \frac{9Fl}{5EA}; \quad W_{II} = \frac{7Fz}{5EA} + \frac{9Fl}{5EA};$$

$$W_{II}(z=l) = W_3 = \frac{7Fl}{5EA} + \frac{9Fl}{5EA} = \frac{16Fl}{5EA}.$$

$$W_{III} = \int \frac{N_{III} dz}{EA} + C = -\frac{6Fz}{5EA} + C;$$

$$W_{III}(z=0) = W_{II}(z=l) \Rightarrow C = \frac{21Fl}{5EA};$$

$$W_{III} = -\frac{6Fz}{5EA} + \frac{21Fl}{5EA}; \quad W_{III}(z=l) = W_4 = -\frac{6Fl}{5EA} + \frac{21Fl}{5EA} = \frac{15Fl}{5EA} = \frac{3Fl}{EA}.$$

Проверка условия совместности перемещений:

$$W_4 = \Delta; \quad \frac{2Fl}{EA} = \frac{2Fl}{EA}.$$

Задача решена верно!

3. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Задача № 6

Определить расчетную величину нагрузки F и перемещение узла C упругой системы (рис. 12,а), состоящей из двух стальных стержней. Сечения стержней: $A_1=3 \text{ см}^2$, $A_2=4 \text{ см}^2$. Примем допускаемое напряжение $[\sigma]= 210 \text{ МПа}$. Модуль продольной упругости $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение.

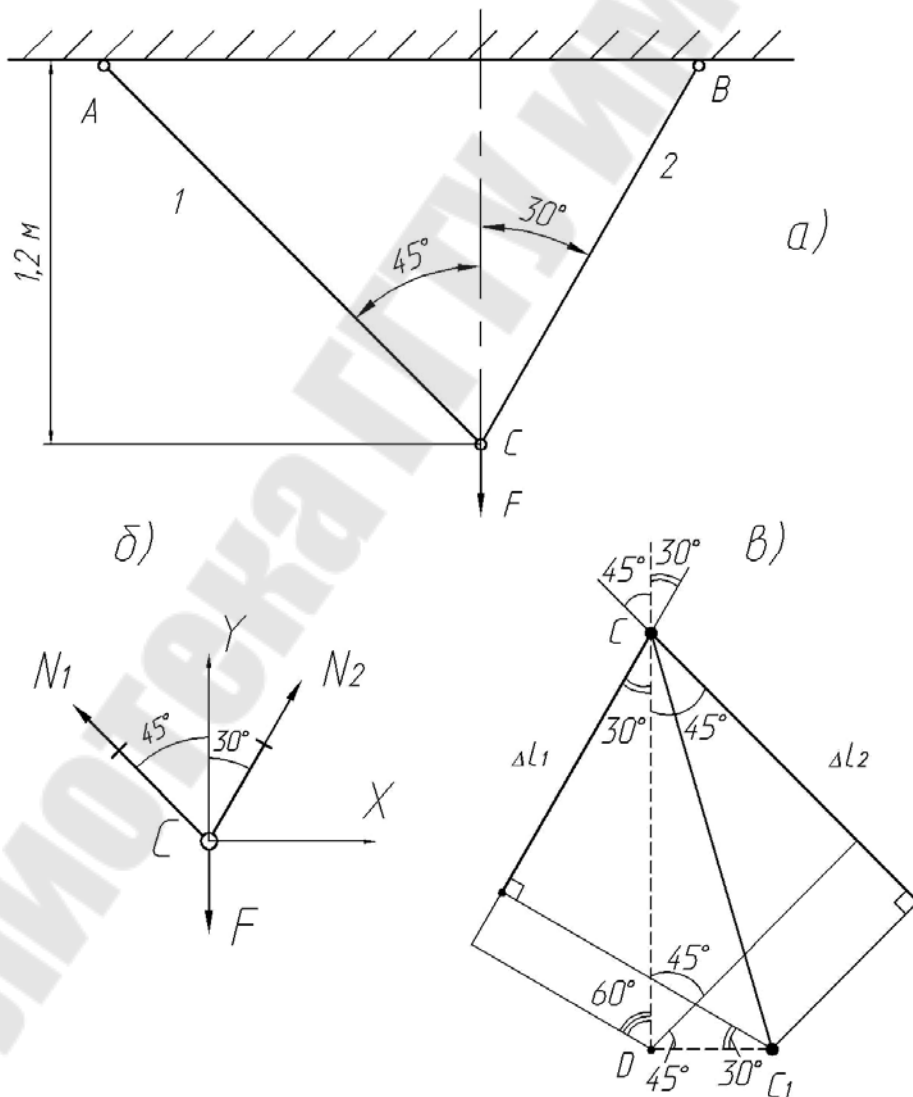


Рис. 12. Стержневая система

1. Находим усилия в стержнях из условия равновесия узла C . Для этого выберем вспомогательную систему осей $X-Y$ и рассмотрим сумму проекций всех сил, приложенных к узлу C (рис. 12,б).

Получим

$$\begin{aligned}\sum F_X &= 0; -N_1 \sin 45 + N_2 \sin 30 = 0; \\ \sum F_Y &= 0, -F + N_1 \cos 45 + N_2 \cos 30 = 0.\end{aligned}$$

Откуда имеем

$$\begin{aligned}N_1 &= 0,517F; \\ N_2 &= 0,732F.\end{aligned}$$

Напряжения в стержнях выразим через силу F :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,517F}{3 \cdot 10^{-4}} = 1753F; \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,732F}{4 \cdot 10^{-4}} = 1830F.\end{aligned}$$

Наиболее напряженным оказался стержень 2, так как в нем возникают наибольшие напряжения, чем в стержне 1. Записываем для него условие прочности

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 1830F \leq [\sigma] = 210 \text{ МПа.}$$

Отсюда

$$[F] \leq \frac{[\sigma]}{1830} = \frac{210 \cdot 10^6}{1830} = 114754 \text{ Н} = 114,75 \text{ кН.}$$

В этом случае величина силы F является экстремальной для данной стержневой системы, поэтому целесообразно округлять в меньшую сторону. Принимаем $F = 114 \text{ кН}$.

Тогда численные значения напряжений в стержнях составят:

$\sigma_1 = 1763 \cdot 114 = 201 \text{ МПа}$, т.е. $\sigma_1 < [\sigma]$ – условие прочности для стержня 1 выполняется;

$\sigma_2 = 1830 \cdot 114 = 208,6 \text{ МПа}$, т.е. $\sigma_2 < [\sigma]$ – условие прочности для стержня 2 выполняется.

2. Определяем перемещение узла C .

Узел C будет перемещаться вниз и влево либо вправо. Для определения полного перемещения узла C рассмотрим отдельно перемещение точки C , принадлежащей каждому стержню.

В данном случае точка C совершает два перемещения: вдоль оси каждого стержня – за счет их удлинения (Δl_1 и Δl_2), а также поворот стержней относительно шарниров A и B . При этом изменение первоначальных углов установки стержней не учитывается, т.к. размеры

стержней как правило намного больше их деформаций.

Удлинения стержней равны

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{0,517 \cdot 114000 \cdot 1,2 / \cos 45}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,67 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{0,732 \cdot 114000 \cdot 1,2 / \cos 30}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,44 \text{ мм}.$$

На продолжении стержня 1 (рис. 12,в) откладываем его удлинение Δl_1 , а на продолжении стержня 2 – Δl_2 . Из концов полученных отрезков восстанавливаем перпендикуляры, пересечение которых в точке C_1 определит новое положение узла C после нагружения системы и деформации стержней. Полное перемещение δ_C может быть найдено как геометрическая сумма его составляющих δ_B и δ_G .

Для определения вертикального и горизонтального перемещения узла C (δ_B и δ_G) проектируем ломаную CDC_1 на направление стержней, получим

$$\Delta l_1 = \delta_B \cos 45 + \delta_G \sin 45;$$

$$\Delta l_2 = \delta_B \cos 30 - \delta_G \sin 30.$$

Отсюда определяем составляющие перемещения узла:

$$\delta_B = \frac{\Delta l_1 \sin 30 + \Delta l_2 \sin 45}{\sin(45 + 30)} = \frac{1,67 \cdot \sin 30 + 1,44 \cdot \sin 45}{\sin(45 + 30)} = 1,919 \text{ мм};$$

$$\delta_G = \frac{\Delta l_1 \cos 30 - \Delta l_2 \cos 45}{\sin(45 + 30)} = \frac{1,67 \cdot \cos 30 - 1,44 \cdot \cos 45}{\sin(45 + 30)} = 0,443 \text{ мм};$$

Полное перемещение

$$\delta_C = \sqrt{\delta_B^2 + \delta_G^2} = \sqrt{1,919^2 + 0,443^2} = 1,97 \text{ мм}.$$

Задача № 7

Для заданной стержневой системы (рис. 13), удерживающей абсолютно жесткий брус, определить диаметры стержней 1 и 2 при известном отношении площадей сечений стержней $A_1 = 2A_2$. Материал стержней – сталь: $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Принять $F = 20$ кН, $a = 1$ м, $\alpha = 45^\circ$.

Решение.

В рассматриваемой задаче расчету подлежат упругие стержни 1 и 2. Размеры указанных стержней неизвестны, для их нахождения необходимо определить внутренние усилия N_1 и N_2 в стержнях.

Рассмотрим условия равновесия абсолютно твердого бруса АВ.

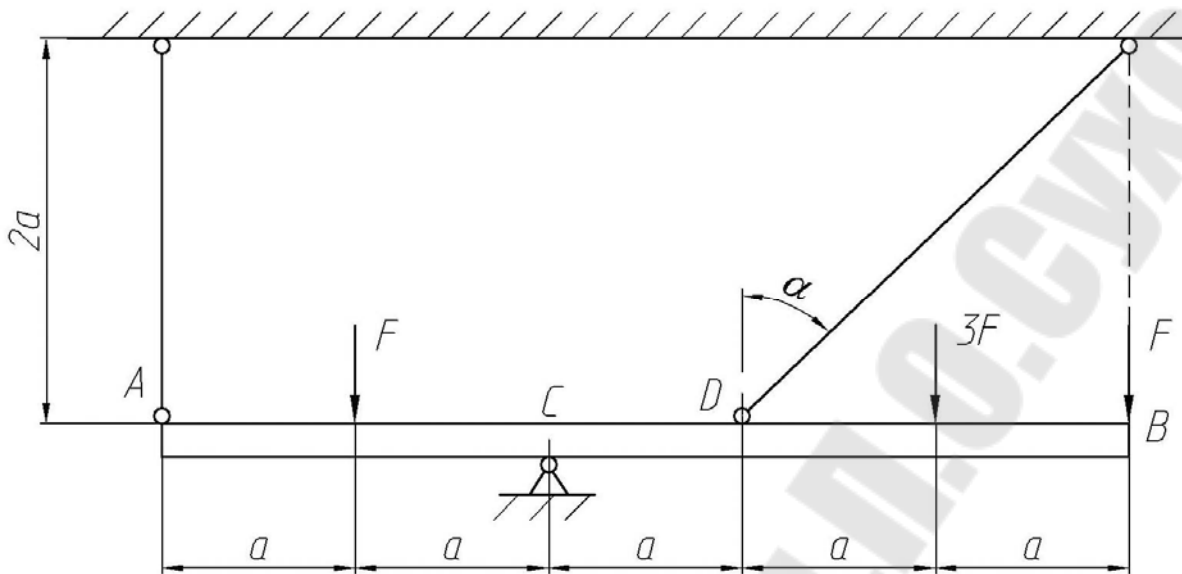


Рис. 13. Заданная стержневая система

Заметим, что в плоской статике возможно составление лишь трех независимых уравнений равновесия. Анализ же стержневой системы указывает на наличие четырех неизвестных (рис. 14). Это внутренние силы N_1 и N_2 , а также реакции в опоре С.

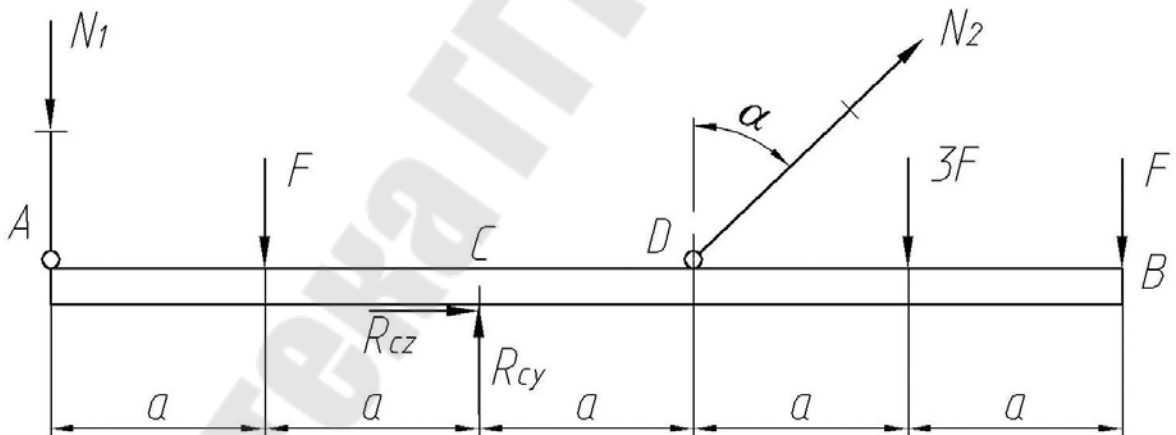


Рис. 14. Заданная стержневая система с отброшенными опорами

Однако, если бы мы интересовались прочностью опоры С, приведенное рассмотрение было бы уместным. Но поскольку предмет нашего анализа составляют упругие стержни 1 и 2, то изучение условий равновесия абсолютно твердого бруса можно упростить, обратив внимание лишь на уравнение в моментах, составленное для оси, проходящей через точку С.

$$\begin{aligned}
\sum M_{ic} = 0; & -N_1 \cdot 2a + 3F \cdot 2a + F \cdot 3a - F \cdot a - N_2 \cdot \cos \alpha \cdot a = 0; \\
& -2N_1 a + 6Fa + 3Fa - Fa - N_2 a \cos \alpha = 0; \\
& -2N_1 a - N_2 a \cos \alpha + 8Fa = 0; \\
& 8Fa = 2N_1 a + N_2 a \cos \alpha. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Закключаем, что задача один раз статически неопределима, т.к. число неизвестных превышает число независимых уравнений статики на единицу.

Общим и универсальным методом раскрытия статической неопределимости является подход, связанный с рассмотрением перемещений в системе. Причем ключевую роль здесь играет принцип неизменности начальных размеров или, как его еще называют, принцип малости деформаций. Рассмотрим систему в деформированном состоянии, не забывая о том, что брус АВ – абсолютно твердый, а значит его материал – недеформируемый (рис. 15).

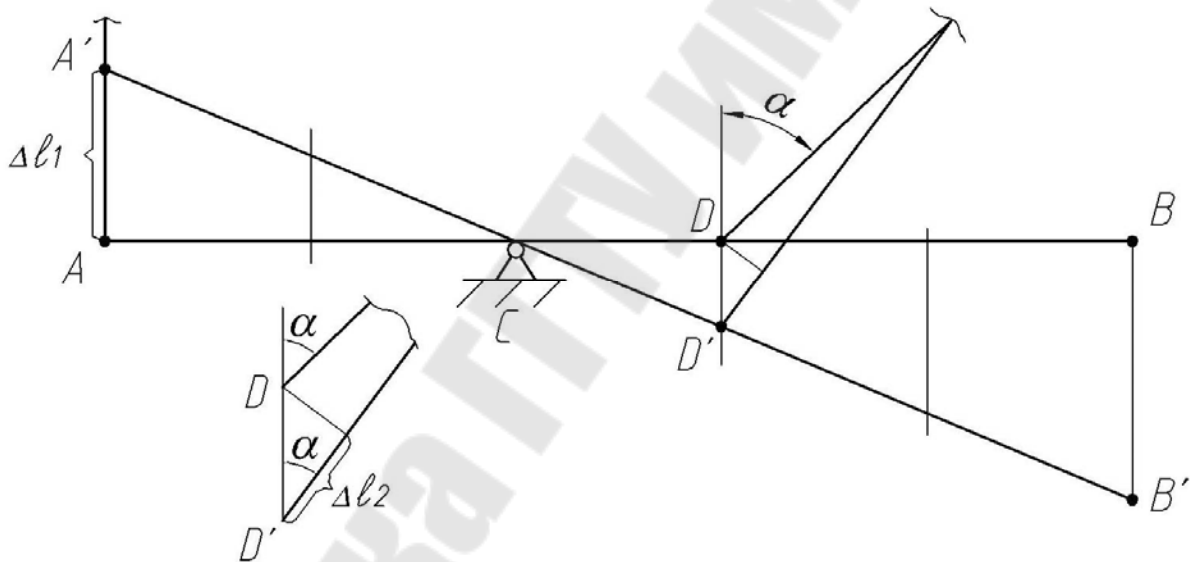


Рис. 15. Схема для составления уравнения совместности перемещений

Такое рассмотрение позволяет нам связать между собой неизвестные удлинения стержней 1 и 2. Однако, если удлинение первого стержня очевидно – это длина отрезка AA', то с удлинением стержня 2 вопрос обстоит сложнее. Рассмотрим его отдельно.

Как упоминалось ранее, принципиальное значение здесь имеет гипотеза о малости деформаций. Итак, получаем:

$$\Delta l_2 = DD' \cdot \cos \alpha \Rightarrow DD' = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha},$$

Из подобия треугольников $\Delta AA'C \approx \Delta DD'C$ имеем:

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{DD'}{DC}.$$

Принимаем во внимание известные соотношения $AA' = \Delta l_1$, $AC = 2a$, $DC = a$, приходим к

$$\frac{\Delta l_1}{2a} = \frac{\Delta l_2}{a \cdot \cos \alpha} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{2 \cdot \Delta l_2}{\cos \alpha} \text{ или } \Delta l_2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta l_1 \cdot \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Важно заметить, что проведенное нами исследование составляет исключительно геометрическую задачу, в то время как составление уравнения равновесия – задачу статическую.

Далее, как говорят, следует уточнить физическую связь между причиной и следствием. Именно, связать внутренние продольные силы N_1 и N_2 с вызываемыми этими силами перемещениями Δl_1 и Δl_2 .

Эта связь выражается известным соотношением

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z) dz}{EA}.$$

В данном случае нет необходимости использовать интеграл, поскольку внутренние силы в стержне, а также жесткости самих стержней постоянны по длине.

Тогда получаем

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}.$$

Принимаем во внимание соотношение $l_1 = 2a$, $l_2 = \frac{2a}{\cos \alpha}$,

$A_2 = \frac{1}{2} A_1$ окончательно имеем

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 2a}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 4a}{EA_1 \cos \alpha}.$$

Воспользовавшись уравнением (3.2), получаем дополнительную к статическому соотношению связь между внутренними силами N_1 и N_2

$$\frac{4N_2 a}{EA_1 \cos \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2N_1 a}{EA_1} \cdot \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \sqrt{2}/2.$$

Упрощая, получаем

$$N_1 = 8N_2. \quad (3.3)$$

Таким образом, имеем систему уравнений (3.1) и (3.3) с двумя неизвестными внутренними силами N_1 и N_2 .

$$8F = 2N_1 + N_2 \sqrt{2} / 2;$$

$$N_1 = 8N_2.$$

Решаем первые уравнения системы, получаем:

$$8F = 16N_2 + N_2 \sqrt{2} / 2, \quad 8F = N_2(16 + \sqrt{2} / 2),$$

$$N_2 = \frac{8F}{16 + \sqrt{2} / 2}, \quad N_1 = \frac{64F}{16 + \sqrt{2} / 2}.$$

Нормальные напряжения в стержнях 1 и 2 определяются по характеру деформирования: первый стержень сжимается, а второй растягивается.

Итак,

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{64F}{(16 + \sqrt{2} / 2) \cdot A_1} \text{ -- (сжатие);}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{8F \cdot 2}{(16 + \sqrt{2} / 2) \cdot A_1} = \frac{16F}{(16 + \sqrt{2} / 2) \cdot A_1} \text{ -- (растяжение).}$$

Поскольку материал стержней одинаково работает на растяжение и на сжатие, то для прочностного анализа выбираем более нагруженный стержень – по нему ведется дальнейший расчет.

$$\sigma_1 = \frac{16F}{(16 + \sqrt{2} / 2) \cdot A_1} \leq [\sigma] \Rightarrow A_1 \geq \frac{16F}{(16 + \sqrt{2} / 2) \cdot [\sigma]}.$$

Подставляя численные данные, получаем:

$$A_1 \geq \frac{16 \cdot 20 \cdot 10^3}{(16 + \sqrt{2} / 2) \cdot 160 \cdot 10^6} = 4,79 \text{ см}^2.$$

Тогда

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \Rightarrow d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_1}{\pi}} = 2,47 \text{ см} = 24,7 \text{ мм.}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_1 = 2,39 \text{ см}^2,$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_2}{\pi}} = 1,74 \text{ см} = 17,4 \text{ мм.}$$

Принимаем с учетом округления в большую сторону:

$$d_1 = 25 \text{ мм}; \quad d_2 = 18 \text{ мм.}$$

Задача № 8

Во сколько раз можно уменьшить диаметр первого стержня в предыдущей задаче, если считать возможным возникновение в мате-

риале стержней пластических деформаций согласно модели Прандтля. Считать $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$.

Решение.

Материал, подчиняющийся диаграмме Прандтля, называют идеально упругопластическим (см. рис. 16).

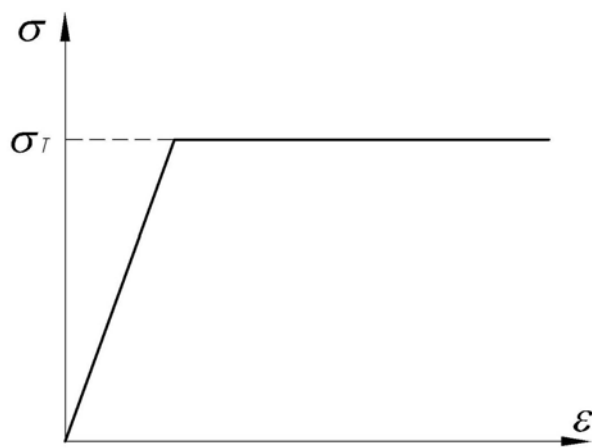


Рис. 16. Диаграмма Прандтля

Особенность рассмотренной задачи состоит в том, что по достижении напряжении текучести материалом первого стержня конструкция может эксплуатироваться. Ее привычное функционирование возможно благодаря второму стержню, материал которого продолжает сопротивляться внешним воздействиям, оставаясь в упругой области.

Итак, в более нагруженном стержне возникают пластические деформации, причем повсюду в пределах длины стержня, так как и первый и второй стержни пребывают в одном напряженном состоянии. Тогда неизвестную площадь можно получить так

$$\sigma_1 = \frac{64 \cdot F}{(16 + \sqrt{2}/2) \cdot A_1^{on}} = \sigma_T \Rightarrow A_1^{on} = \frac{64 \cdot F}{\sigma_T \cdot (16 + \sqrt{2}/2)}$$

Подставляя численные данные, получаем

$$A_1^{on} = \frac{64 \cdot 20 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6 \cdot (16 + \sqrt{2}/2)} = 3,19 \text{ см}^2;$$

$$d_1^{on} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_1}{\pi}} = 2,02 \text{ см};$$

$$A_2^{on} = \frac{1}{2} A_1^{on} = 1,60 \text{ см}^2;$$

$$d_2^{on} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_2}{\pi}} = 1,43 \text{ см}.$$

Как видим, такой подход позволяет снизить расход материала. Заметим, что на практике именно так и поступают в подобных задачах с конструкциями. При этом приведенный расчет называют исследованием опасного состояния, под которым и понимают возникновение напряжений текучести в некоторых наиболее нагруженных местах конструкции. Отметим, что в целом, за счет линейно упругих эле-

ментов, конструкция сохраняет работоспособность.

Интересно поставить вопрос о том, когда же и в каких условиях, конструкция как единое целое, потеряет способность выдерживать внешнюю нагрузку? В условиях предыдущей задачи ответ очевиден – при достижении материалом второго стержня напряжений текучести.

Логично назвать такие условия предварительными для конструкции. Расчет на предельное состояние интересен тем, что позволяет оценить коэффициент запаса – долю безопасности по отношению, например, к опасному состоянию.

С практической точки зрения, предельное состояние означает разрушение конструкции. Представим себе очень дорогое и сложное сооружение или машину. Например, пассажирский самолет или прощ, автомобиль. Несмотря на тонкость и глубину теоретического анализа, часто остается лишь один шанс получить достоверные сведения о возможностях машины как способности сопротивляться внешним воздействиям.

К ней прикладывают нарастающие эксплуатационные нагрузки и доводят, таким образом, до разрушения, фиксируя предельные значения.

Обобщим результаты. Итак, при оценке прочности детали или узла машины мы использовали так называемое допускаемое напряжение $[\sigma]$, которое вводилось в рассмотрение одним из двух способов в зависимости от тела материала: пластичного или хрупкого.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} \text{ или } [\sigma] = \frac{\sigma_B}{n}.$$

Здесь n – коэффициент запаса. Логика такого определения допускаемого напряжения $[\sigma]$ состоит в том, что $n > 1$.

Однако, когда речь идет о конструкции, то оказывается возможным более полно использовать ресурс материала. Так, в описанной выше конструкции мы «разрешили» материалу одного из стержней пребывать в состоянии текучести. При этом конструкция сохраняет свою работоспособность за счет стержня 2, пребывающего в упругом состоянии.

Далее, если поставить или определить величину этого верхнего предела, после которого машина, деталь или конструкция разрушается, то, очевидно, следует ставить соответствующий эксперимент. В случае нашей конструкции этому состоянию соответствует наступление процесса текучести материала второго стержня.

В описанных случаях можно говорить о допускаемых, опасных

и предельных значениях нагрузок, если речь идет об увеличении внешней силы F . Можно также говорить о допустимой, опасной, предельной величине площади поперечного сечения наиболее нагруженного элемента, если речь идет о возможном уменьшении площади поперечного сечения.

В целом же, в самом общем смысле, правильнее говорить о допустимом, опасном или предельном состоянии конструкции в целом, вне зависимости от параметров проектирования. Когда же указывают значение коэффициента запаса, то всегда акцентируют внимание на сравниваемых состояниях.

В этом смысле коэффициент запаса – это не строго фиксированная, определенная раз и навсегда величина, а доля безопасности в некоторых конкретных условиях, выбранных нами исходя из особенностей задачи.

Так, например, можно подсчитать коэффициент запаса, сравнивая опасное состояние с допустимым или предельное с допустимым. Можно сравнивать рассчитанное напряжение с допустимым, опасным или предельным значением и указывать долю безопасности, сравнивая некоторое характерное пороговое значение с рассчитанным – выбранным для оценки.

Вернемся к нашей задаче. Итак, искомое отношение диаметров стержней есть:

$$\frac{d_1}{d_1^{on}} = \frac{2,47}{2,02} = 1,22.$$

Возможно уменьшение диаметра первого стержня в 1,22 раза.

Пусть теперь конструкция окажется в предельных условиях. Как было указано ранее, это возможно либо увеличением силы F , либо уменьшением размера стержня. Для преемственности рассуждений продолжим разговор о диаметрах стержней.

Согласно диаграмме Прандтля материал первого стержня пребывает в состоянии текучести. Предельное состояние определяется текучестью материала второго стержня

$$\sigma_2 = \frac{16 \cdot F}{(16 + \sqrt{2}/2) \cdot A_2^{np}} = \sigma_T \Rightarrow A_2^{np} = \frac{16 \cdot F}{\sigma_T \cdot (16 + \sqrt{2}/2)}.$$

Подставляя численные данные, имеем

$$A_2^{np} = \frac{16 \cdot 20 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6 \cdot (16 + \sqrt{2}/2)} = 0,80 \text{ см}^2.$$

Тогда предельный диаметр второго стержня

$$d_2^{np} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_2^{np}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,80}{\pi}} = 1 \text{ см.}$$

Иначе, если изготовить второй стержень диаметром 1 см, то в условиях текучести первого стержня ($d_1 \leq 2,02$ см) конструкция разрушится.

4. КРУЧЕНИЕ

Кручение – вид деформирования бруса, характеризующийся тем, что в поперечном сечении возникает только крутящий момент M_K .

Крутящий момент вычисляется относительно оси бруса как сумма внешних моментов, приложенных к части бруса, расположенной по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Крутящий момент считается условно *положительным*, если он вращает брус против часовой стрелки, если смотреть в торец отброшенной части бруса, и наоборот – *отрицательным*.

При кручении бруса круглого поперечного сечения (сплошного или кольцевого) в его сечениях возникают лишь касательные напряжения. Максимального значения они достигают на контуре бруса (вала).

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_K^{\max}}{W_P} \leq [\tau], \text{ МПа}$$

где M_K^{\max} – максимальный крутящий момент в сечениях вала, Нм;

W_P – полярный момент сопротивления сечения вала, м³;

$[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\Theta = \frac{M_K^{\max}}{GI_P} \leq [\Theta],$$

где Θ – относительный угол закручивания вала, рад/м или град/м;

G – модуль сдвига материала вала, МПа;

для стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа;

I_P – полярный момент инерции сечения вала, м⁴;

GI_P – жесткость при кручении;

$[\Theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания вала,

$[\Theta] = 2 \div 4$ град/м.

Полярный момент сопротивления и полярный момент инерции сечения вала определяют по формулам:

для сплошного сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4,$$

где d – наружный диаметр вала, м;

для кольцевого сечения

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2D^3 (1 - c^4); \quad I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1D^4 (1 - c^4),$$

где D – наружный диаметр вала, м;

$c = \frac{d}{D}$ – отношение внутреннего диаметра вала к наружному диаметру.

Заметим, что решение задачи о кручении валов прямоугольного и, в частности, квадратного поперечного сечения не может быть получено методами механики материалов. В этом случае прибегают к более тонкому анализу с помощью приемов теории упругости. Возьмем готовое решение для момента сопротивления прямоугольного сечения кручению

$$W_K = \alpha \cdot h \cdot b^2,$$

где α – безразмерный коэффициент, выбираемый в зависимости от отношения сторон прямоугольника h/b .

Теория упругости предлагает следующую формулу для расчета параметра полярного момента инерции при кручении стержня прямоугольного профиля

$$I_K = \beta \cdot h \cdot b^3,$$

где β – безразмерный коэффициент;

Коэффициенты α и β являются справочными величинами.

Угол φ закручивания на участке вала определяют по формуле

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_K(z) dz}{GI_p}, \text{ рад}$$

где l – длина участка (вала), м;

Если на участке $M_K(z) = const$, т.е. имеет постоянное значение, то расчет проводится по формуле

$$\varphi = \frac{M_K l}{GI_p}.$$

Задача № 9

Для заданного стального бруса круглого поперечного сечения диаметром $d = 75$ мм (рис. 17) требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) построить эпюру касательных напряжений по длине бруса;
- 3) построить эпюру углов поворота поперечных сечений.

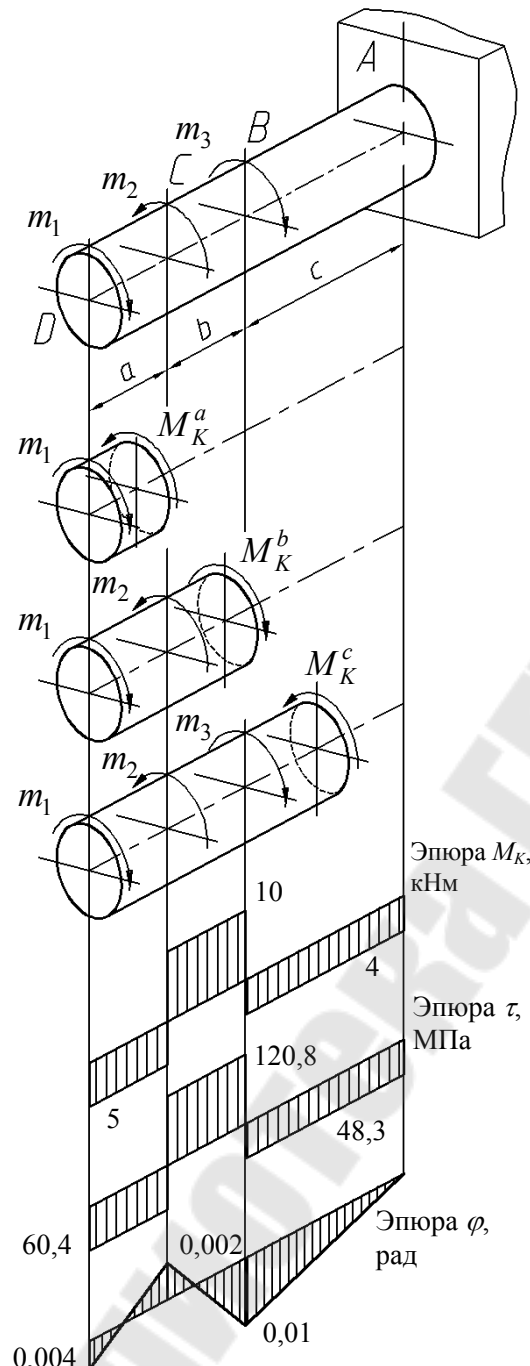


Рис. 17. Схема вала и эпюры моментов, напряжений, углов закручивания

Решение.

1. Строим эпюру крутящих моментов.

Заданный брус имеет три участка: $a = 0,3$ м; $b = 0,3$ м; $c = 0,6$ м.

Для участка a :

$$M_K^a = -m_1 = -5 \text{ кНм.}$$

Для второго b :

$$M_K^b = -m_1 + m_2 = -5 + 15 = 10 \text{ кНм.}$$

Для участка c :

$$M_K^c = -m_1 + m_2 - m_3 = 10 - 14 = -4 \text{ кНм.}$$

В местах приложения внешних моментов на эпюре получают скачки, равные величинам этих моментов.

2. Определяем максимальные касательные напряжения на участках и строим эпюру по длине бруса.

Определим полярный момент сопротивления сечения

$$W_P = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi (0,075)^3}{16} = 8,28 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Тогда на участке a :

$$\tau_{\max}^a = \frac{M_K^a}{W_P} = \frac{-5 \cdot 10^3}{8,28 \cdot 10^{-5}} = -60,4 \text{ МПа.}$$

На участке b :

$$\tau_{\max}^b = \frac{M_K^b}{W_P} = \frac{10 \cdot 10^3}{8,28 \cdot 10^{-5}} = 120,8 \text{ МПа.}$$

На участке c :

$$\tau_{\max}^a = \frac{M_K^c}{W_P} = \frac{-4 \cdot 10^3}{8,28 \cdot 10^{-5}} = -48,3 \text{ МПа.}$$

Эпюра касательных напряжений показана на рисунке 17.

3. Определяем углы закручивания характерных сечений бруса и строим эпюру.

Углы закручивания определяются относительно какого-либо неподвижного или условно неподвижного сечения. В данной схеме сечения A является неподвижным, т.е. $\varphi_A = 0$.

Полярный момент инерции сечения равен

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(0,075)^4}{32} = 3,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Тогда имеем

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{A-B} = \int_0^c \frac{M_K^c(z) dz}{GI_P} = \frac{M_K^c c}{GI_P} = \frac{-4 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3,1 \cdot 10^{-6}} = -0,01 \text{ рад.}$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{B-C} = -0,01 + \frac{M_K^b b}{GI_P} = -0,01 + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,1 \cdot 10^{-6}} = 0,002 \text{ рад.}$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{C-D} = 0,002 + \frac{M_K^a a}{GI_P} = 0,002 + \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,1 \cdot 10^{-6}} = -0,004 \text{ рад.}$$

Эпюра углов закручивания изображена на рисунке 17.

Задача № 10

Вал (рис. 18), имеющий на участках AB и BC трубчатое, а на участке CE квадратное поперечное сечение, закреплен на одном из участков в муфте, которая вызывает на этом участке равномерно распределенный момент интенсивностью m .

На валу закреплены три шкива I, II и III. На шкиве I, передающем момент m_1 , должна быть обеспечена мощность N_1 при постоянной частоте вращения n .

Требуется определить размеры поперечного сечения вала из условия прочности и проверить вал на жесткость при $[\Theta] = 2$ град/м. Модуль сдвига материала вала $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. В расчетах принять следующие данные:

$$a = 0,5 \text{ м}; N_1 = 200 \text{ кВт}; m = 20 \text{ кНм/м}; \frac{d}{D} = 0,5; n = 120 \text{ об/мин},$$
$$[\tau] = 90 \text{ МПа.}$$

Построить эпюру углов закручивания, приняв за начало отсчета шкив I.

Решение.

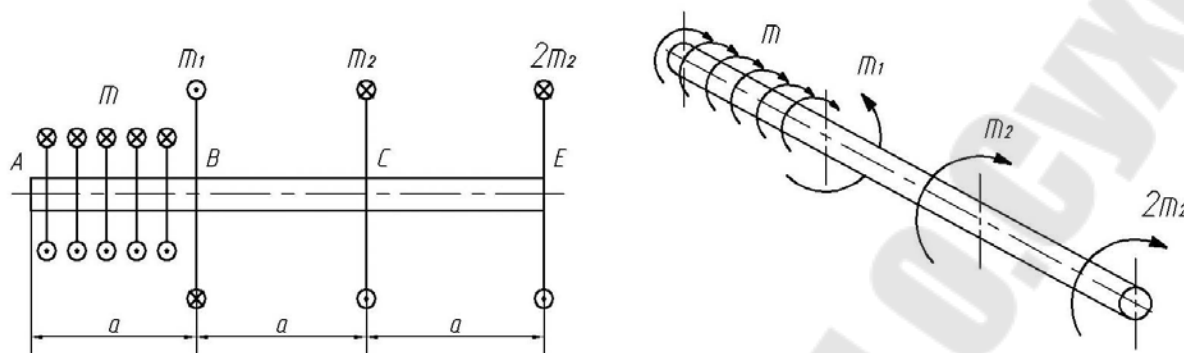


Рис. 18. Схема вала

Итак, на вал поступает мощность N_1 посредством шкива I. В реальности эту мощность передает некий источник, или, как его называют, привод. К примеру, шкив I может быть связан с электродвигателем, двигателем внутреннего сгорания, с ведущим валом коробки передач и прочее. Во всех подобных случаях говорят о том, что на вал посредством шкива I поступает мощность N_1 . Далее, посредством муфты и шкивов II, III мощность N_1 отбирается от вала, или расходуется. Потребителями энергии (мощности) могут быть самые разнообразные устройства, выполняющие некую полезную работу или действие. Более грамотно это звучит так: потребляемая мощность N_1 расходуется на совершение работы против сил полезного сопротивления.

Такое полезное сопротивление может быть связано с необходимостью перемещать грузы посредством различных конвейеров, с необходимостью вращать другой вал в системе трансмиссии автомобиля или трактора и др. Важно лишь то, что всюду в упомянутых случаях идет процесс передачи мощности от условного источника к условному потребителю. Подобные связи между источником и потребителем так и обобщенно называют – передачами. Непременным атрибутом физического описания любой передачи является так называемый коэффициент полезного действия – К.П.Д. Это относительная величина, характеризующая потери при передаче мощности (энергии):

$$\eta = \frac{N_{ex} - N_{вых}}{N_{ex}} \cdot 100\%,$$

где N_{ex} – мощность, поступившая от источника;

$N_{вых}$ – мощность, расходуемая потребителями мощности.

Потери связаны с нежелательным для проектировщика процессом отбора мощности в виде рассеянного в окружающую среду тепла, в виде преодоления сил сопротивления в подшипниках и др.

Обобщенно такие процессы называют рассеянием энергии. Процессы эти вредны, поэтому с ними борются, стараясь довести значение η как можно ближе к 100%. Мы не будем в этой задаче акцентировать внимание на потерях.

Определяем внешний крутящий момент m_1 на основании определения мощности как работы, совершаемой в единицу времени:

$$N_1 = \frac{dA_1}{dt}. \text{ Но } dA_1 = m_1 d\varphi$$

$$N_1 = \frac{m_1 d\varphi}{dt} = m_1 \omega,$$

где ω – угловая скорость вращения вала, рад/с.

По определению угловой скорости ω [рад/с]

$$\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} = \frac{n \cdot \pi}{30}, \text{ тогда } N_1 = m_1 \omega = m_1 \frac{n \cdot \pi}{30} \text{ и } m_1 = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{N_1}{n}.$$

Таким образом, внешний скручивающий момент связан с передаваемой на вал мощностью N_1 при вращении вала с частотой n .

Подставляя численные данные, получаем

$$m_1 = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{200 \cdot 10^3}{120} = 15915,49 \text{ Нм.}$$

При равномерном вращении вала внешние моменты должны быть уравновешены

$$\sum m_{i0} = 0, \quad ma + m_2 + 2m_2 = m_1.$$

Выбор направления отсчета внешнего момента произволен и мы не будем останавливаться на введении некой абсолютной системы координат подобно тому, как это принято в теоретической механике.

В итоге получаем

$$3m_2 = m_1 - ma; \quad m_2 = \frac{m_1 - ma}{3}.$$

Численные данные приводят к

$$m_2 = \frac{15915,49 - 20000 \cdot 0,5}{3} = 1971,83 \text{ Нм.}$$

Рассматривая вал слева направо и применяя метод сечений (рис. 19), получаем следующие выражения для внутренних крутящих моментов. Здесь, изображая вал на схемах, мы игнорируем форму поперечного сечения. В статически определяемых валах:

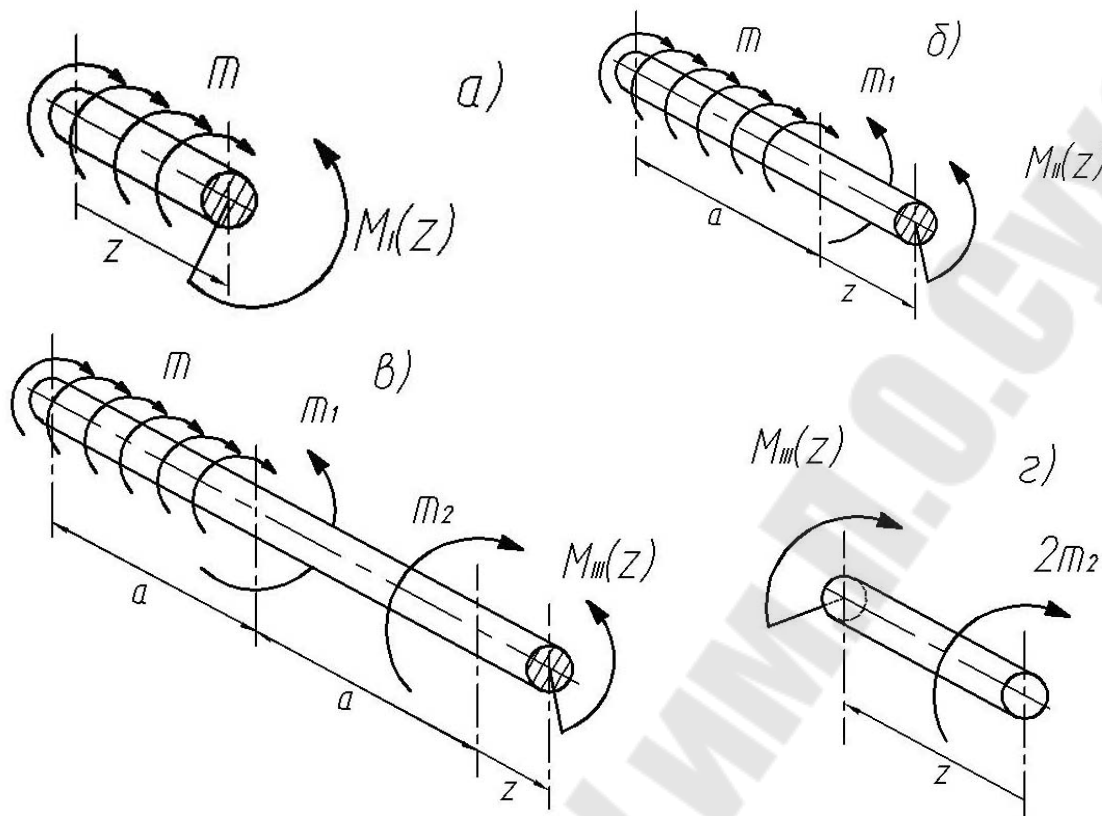


Рис. 19. Применение метода сечений при рассмотрении равновесия на участках вала

Участок АВ (рис. 19,а).

$$M_I - mz = 0, \quad M_I = mz,$$

$$M_I(z = 0) = 0 \text{ Нм};$$

$$M_I(z = a = 0,5) = 20000 \cdot 0,5 = 10000 \text{ Нм}.$$

Участок ВС (рис. 19,б).

$$M_{II} - ma + m_1 = 0, \quad M_{II} = ma - m_1,$$

$$M_{II} = 20000 \cdot 0,5 - 15915,49 = -5915,49 \text{ Нм}.$$

Заметим, что крутящий момент на втором участке принимает постоянное значение, то есть не зависит от текущей координаты z .

Участок СЕ (рис. 19,в).

$$M_{III} - ma + m_1 - m_2 = 0, \quad M_{III} = ma - m_1 + m_2,$$

$$M_{III} = 20000 \cdot 0,5 - 15915,49 + 1971,83 = -3943,66 \text{ Нм}.$$

Проверим найденное решение, определив внутренний момент кручения на участке СЕ (рис. 19,г) рассматривая вал справа налево. Равновесие в моментах дает

$$M_{III} + 2m_2 = 0, \quad M_{III} = -2m_2,$$

$$M_{III} = -2 \cdot 1971,83 = -3943,66 \text{ Нм}.$$

Форма сечения не оказывает влияние на значение внутренних факторов – крутящих моментов.

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов.

Теперь, когда известны значения внутренних крутящих моментов, можно приступить к прочностному анализу.

Ввиду того, что вал имеет различный профиль сечения по длине, то следует рассмотреть все значимые возможные варианты. Очевидно, таких вариантов будет два:

1) на участке AC вал имеет трубчатое сечение, момент сопротивления кручению которого находится по известному выражению

$$W_P = \frac{I_P^{\text{кольцо}} \cdot 2}{D} = \frac{\pi D^3}{16} \cdot \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

В условиях нашего примера $\frac{d}{D} = 0,5$. Поэтому выражение полярного момента сопротивления упростится так

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16} \cdot \left(1 - \frac{1^4}{2^4}\right) = \frac{\pi D^3}{16} \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15\pi D^3}{256}.$$

Итак, для трубчатой части вала имеем

$$W_P = \frac{15\pi D^3}{256}; M_{\max} = 10000 \text{ Нм}.$$

Таким образом, первый вариант проектирования предполагает определение диаметра D поперечного сечения при указанных данных.

2) рассмотрим теперь второй вариант проектирования. На участке CE вал имеет квадратное поперечное сечение, причем сторона квадрата имеет длину $0,8D$.

Для квадратного сечения $h/b = 1$ и $\alpha = 0,208$.

Тогда,

$$W_K = \alpha \cdot b^3,$$

$$W_K = 0,208 \cdot (0,8 \cdot D)^3 = 0,1065 \cdot D^3.$$

Таким образом, второй вариант проектирования определяется следующими исходными данными:

$$W_K = 0,1065 \cdot D^3; M_{\max} = M_{III} = 3943,66 \text{ Нм}.$$

Последовательно проведем прочностные оценки и определим размер сечения D в двух случаях. Совершенно ясно, что окончательный выбор следует оставить за большим из двух полученных значений диаметров.

Итак, для трубчатого сечения имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_P} = \frac{M_{\max} \cdot 256}{15 \cdot \pi \cdot D^3} \leq [\tau].$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\max} \cdot 256}{15 \cdot \pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{10000 \cdot 256}{15 \cdot \pi \cdot 90 \cdot 10^6}} = 8,45 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 84,5 \text{ мм}.$$

Итак, для квадратного сечения имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_P} = \frac{M_{\max}}{0,1065 \cdot D^3} \leq [\tau].$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{0,1065 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{3943,66}{0,1065 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 7,43 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 74,3 \text{ мм}.$$

Второй вариант проектирования дает ограничение на размер вала $D \geq 74,3$ мм.

Отталкиваясь от большего значения и принимая во внимание требования ГОСТ 6636-69 (91) по линейным размерам окончательно устанавливаем $D = 85$ мм.

Проверим выполнение условия жесткости для двух вариантов поперечных сечений: трубчатого и квадратного.

Трубчатое сечение:

$$D = 85 \text{ мм}; d = 0,5 \cdot d = 2 \cdot 85 = 42,5 \text{ мм}.$$

$$I_P^{\text{кольцо}} = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} \cdot (0,085^4 - (0,0425)^4) = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ см}^4$$

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{\max}}{G \cdot I_P} = \frac{10000}{8 \cdot 10^{10} \cdot 480 \cdot 10^{-8}} = 0,026 \text{ рад/м}.$$

Допускаемое значение относительного угла закручивания составляет $[\Theta] = 2$ град/м = 0,035 рад/м.

Заключаем, что условие жесткости для трубчатого сечения выполняется.

Квадратное сечение:

сторона квадрата имеет длину

$$b = 0,8D = 0,8 \cdot 85 = 68 \text{ мм}.$$

В случае квадрата, основываясь на справочные данные, имеем, $\beta = 0,141$ и

$$I_K = \beta \cdot b^4 = 0,141 \cdot (0,068)^4 = 299,3 \cdot 10^{-8} \text{ см}^4.$$

Относительный угол закручивания на квадратном участке вала

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{\max}}{G \cdot I_P} = \frac{M_{\max}}{G \cdot I_K} = \frac{3943,66}{8 \cdot 10^{10} \cdot 299,3 \cdot 10^{-8}} = 0,0164 \text{ рад/м}.$$

Сравнивая с допускаемым значением $[\Theta] = 0,035$ рад/м заключаем, что условие жесткости для участка вала с квадратным сечением выполнено.

Перейдем к анализу углов закручивания.

Заметим, что жесткость вала также может быть переменной, то есть меняться вдоль вала.

Согласно условию задачи, отсчет углов закручивания следует проводить от шкива I. Поэтому полагаем сечение вала со шкивом I неподвижным.

В самом деле, вал находится в состоянии равномерного вращения как целое. Однако, кроме вращения, на положение точек (сечений) вала оказывает влияние процесс деформирования материала. Учитывая тот фактор, что мощность (энергия) передается на вал посредством шкива I, заключаем о том, что вращение вала определяется именно этим процессом. Другими словами, для понимания вопроса об угловых перемещениях сечения вала, связанных исключительно с деформированием материала, следует выбрать систему отсчета (наблюдения), связанную ведущим звеном – шкивом I.

Есть еще одно обстоятельство, связанное с нулевой отметкой в отсчете углов закручивания φ . Оно состоит в формировании функций внутренних крутящих моментов. Напомним, что эти выражения построены при обходе вала слева направо. Но так как углы закручивания будут отсчитываться нами от шкива I, то следует перестроить (обратить) выражение для внутреннего момента на участке AB . Конкретнее, необходимо получить функцию $M_I(z)$ при обходе вала справа налево, отсчитывая текущую координату z от точки B . Итак, получаем

$$M_I = mz \text{ (слева направо);}$$

$$M_I = ma - mz \text{ (справа налево).}$$

В самом деле, на границе участка AB имеем:

$$M_I(z=0) = ma; \quad M_I(z=0) = 20000 \cdot 0,5 = 10000 \text{ Нм;}$$

$$M_I(z=a) = ma - ma = 0; \quad M_I(z=a) = 0 \text{ Нм.}$$

Рассматривая последовательно все три участка, имеем:

Участок AB

$$\varphi_I = \int \frac{M_I(z) dz}{G \cdot I_P} = \int \frac{(ma - mz) dz}{G \cdot I_P} = \frac{m}{G \cdot I_P} \cdot \left(az - \frac{z^2}{2} \right) + C;$$

$$\varphi_I = \frac{m}{G \cdot I_P} \cdot \left(az - \frac{z^2}{2} \right) + C.$$

Учитывая то, что угловое перемещение точек вала в сечении B равно нулю, получаем

$$\varphi_B = \varphi_I(z = 0) = 0;$$

В точке A значение угла φ следующее

$$\varphi_A = \varphi_I(z = a) = \frac{m}{G \cdot I_P} \cdot \left(a^2 - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{m \cdot a^2}{2 \cdot G \cdot I_P}.$$

Принимая во внимание профиль вала на участке AB и подставляя численные данные, получаем

$$\varphi_A = \varphi_I(z = a = 0,5) = \frac{20000 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 480 \cdot 10^{-8}} = 0,0065 \text{ рад.}$$

Участок BC

$$\varphi_{II} = \int \frac{M_{II} dz}{G \cdot I_P} = \int \frac{(ma - m_1) dz}{G \cdot I_P} = \frac{ma - m_1}{G \cdot I_P} \cdot z + C.$$

Заметим, что $\varphi_B = \varphi_{II}(z = 0) = 0$. Поэтому $C = 0$.

$$\varphi_C = \varphi_{II}(z = a) = \frac{ma - m_1}{G \cdot I_P} \cdot a.$$

$$\varphi_C = \varphi_{II}(z = a = 0,5) = \frac{20000 \cdot 0,5 - 15915,49}{8 \cdot 10^{10} \cdot 480 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,5 = -0,0077 \text{ рад.}$$

Участок CE

$$\varphi_{III} = \int \frac{M_{III} dz}{G \cdot I_K} = \int \frac{-3943,66 dz}{8 \cdot 10^{10} \cdot 299,3 \cdot 10^{-8}} = -0,0165 \cdot z + C.$$

Непрерывность перемещений или, проще говоря, сплошность вала, дает возможность определить константу интегрирования на участке CE

$$\varphi_{II}(z = a) = \varphi_{III}(z = 0) \Rightarrow C = -7,7 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Тогда,

$$\varphi_{III} = -0,0165 \cdot z - 7,7 \cdot 10^{-3}.$$

В точке E угол закручивания следующий

$$\varphi_E = \varphi_{III}(z = a = 0,5) = -0,0165 \cdot 0,5 - 7,7 \cdot 10^{-3} = -0,01595 \text{ рад.}$$

По полученным данным строим эпюры крутящих моментов и углов закручивания (рис. 20).

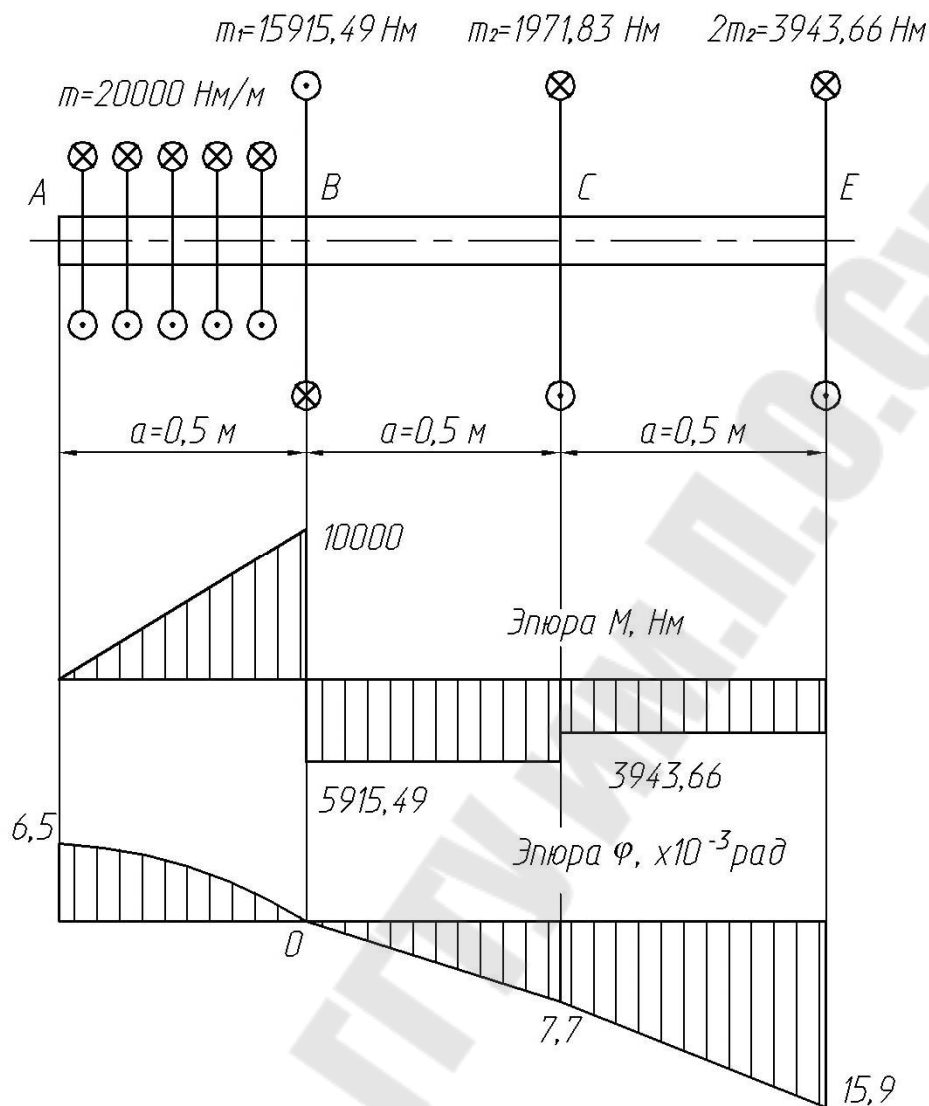


Рис. 20. Окончательная схема вала и эюры крутящих моментов и углов закручивания

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Для определения геометрических характеристик поперечного сечения удобно пользоваться следующей методикой.

1. Сложная фигура разбивается на наименьшее число k простых фигур: геометрические (прямоугольник, прямоугольный треугольник, круг и т.п.) и профили проката (уголок, швеллер, двутавровая балка и т.п.), геометрические характеристики которых могут быть легко определены по известным формулам или по справочным таблицам.

2. Выбирается рациональным образом вспомогательная система осей координат XOY .

3. Определяются координаты центра тяжести заданной фигуры относительно вспомогательной системы осей по формулам

$$x_c = \frac{S_Y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^k A_i x_i}{\sum_{i=1}^k A_i}, \quad y_c = \frac{S_X}{A} = \frac{\sum_{i=1}^k A_i y_i}{\sum_{i=1}^k A_i},$$

где S_X, S_Y - статические моменты инерции фигуры относительно вспомогательной системы осей XOY ;

A, A_i - площадь всего сечения и каждой простой фигуры соответственно;

x_i, y_i - координаты центров тяжести простых фигур относительно вспомогательных осей XOY .

4. Через найденный центр тяжести заданной фигуры (точка C) проводятся вспомогательные центральные оси X_C и Y_C , а через центры тяжести (C_1, C_2, \dots, C_k) отдельных простых фигур проводятся их центральные оси $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \dots; X_k, Y_k$ параллельные осям X и Y .

5. Определяются центральные осевые I_{X_C}, I_{Y_C} и центробежный $I_{X_C Y_C}$ моменты инерции всей фигуры относительно центральных осей X_C и Y_C по формулам

$$I_{X_C} = I_{X_C}^1 + I_{X_C}^2 + \dots + I_{X_C}^k = (I_{X_1} + A_1 a_1^2) + (I_{X_2} + A_2 a_2^2) + \dots + (I_{X_k} + A_k a_k^2);$$

$$I_{Y_C} = I_{Y_C}^1 + I_{Y_C}^2 + \dots + I_{Y_C}^k = (I_{Y_1} + A_1 b_1^2) + (I_{Y_2} + A_2 b_2^2) + \dots + (I_{Y_k} + A_k b_k^2);$$

$$I_{X_C Y_C} = I_{X_C Y_C}^1 + I_{X_C Y_C}^2 + \dots + I_{X_C Y_C}^k =$$

$$= (I_{X_1 Y_1} + A_1 a_1 b_1) + (I_{X_2 Y_2} + A_2 a_2 b_2) + \dots + (I_{X_k Y_k} + A_k a_k b_k),$$

где $I_{X_C}^1, I_{X_C}^2, \dots, I_{X_C}^k; I_{Y_C}^1, I_{Y_C}^2, \dots, I_{Y_C}^k; I_{X_C Y_C}^1, I_{X_C Y_C}^2, \dots, I_{X_C Y_C}^k$ - осевые и центробежный моменты инерции простых фигур относительно центральных осей X_C и Y_C всего сечения;

$I_{X_1}, I_{X_2}, \dots, I_{X_k}; I_{Y_1}, I_{Y_2}, \dots, I_{Y_k}; I_{X_1 Y_1}, I_{X_2 Y_2}, \dots, I_{X_k Y_k}$ - осевые и центробежный моменты инерции простых фигур относительно своих центральных осей $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \dots; X_k, Y_k$;

$a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_k$ - координаты осей $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \dots; X_k, Y_k$ относительно центральных осей X_C и Y_C .

6. Находится положение главных центральных осей инерции X_o и Y_o по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot I_{XcYc}}{I_{Xc} - I_{Yc}},$$

где α_0 – угол, на который нужно повернуть оси X_C и Y_C для получения положения главных осей. Угол α_0 изменяется от -45° до $+45^\circ$.

Поворот осей по часовой стрелке соответствует отрицательному значению угла α_0 , против часовой стрелки – положительному.

6. Вычисляются величины главных центральных моментов инерции I_{Xo} и I_{Yo} для заданного сечения по формуле

$$I_{Xo}, I_{Yo} = \frac{I_{Xc} + I_{Yc}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Xc} + I_{Yc})^2 + 4I_{XcYc}^2}$$

или

$$I_{Xo} = I_{Xc} \cos^2 \alpha_0 + I_{Yc} \sin^2 \alpha_0 - I_{Xc} I_{Yc} \sin 2\alpha_0.$$

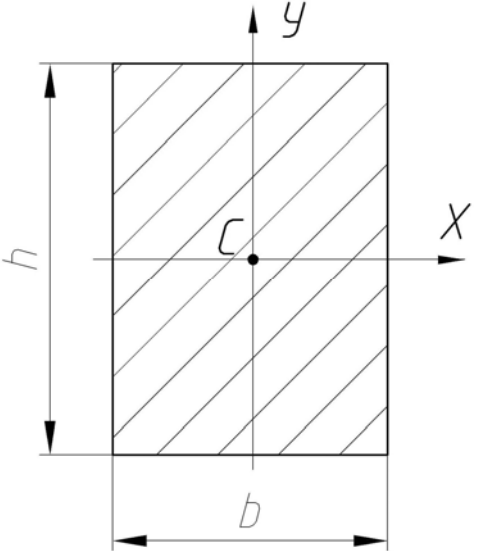
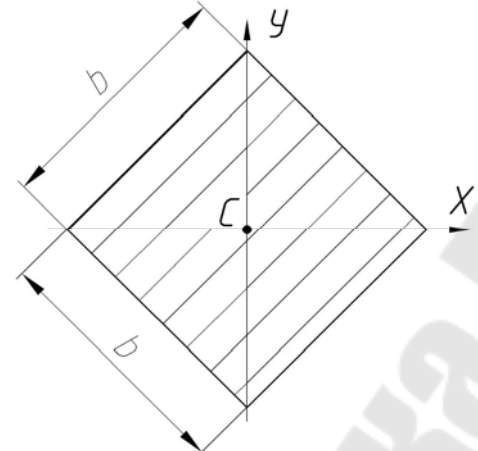
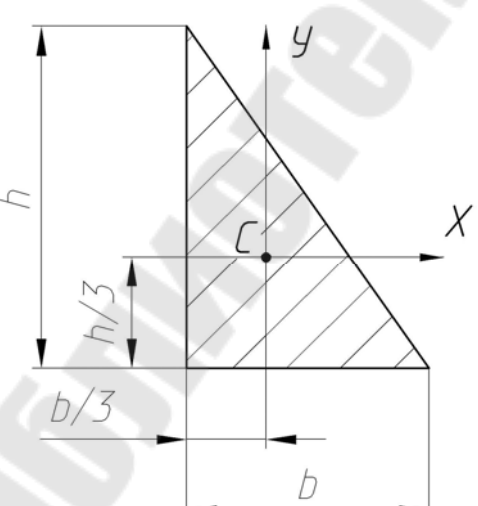
$$I_{Yo} = I_{Xc} \sin^2 \alpha_0 + I_{Yc} \cos^2 \alpha_0 + I_{Xc} I_{Yc} \sin 2\alpha_0.$$

При этом ось большего момента инерции I_{Xo} или I_{Yo} должна находиться ближе к той оси X_C или Y_C , относительно которой момент инерции I_{Xc} или I_{Yc} больше.

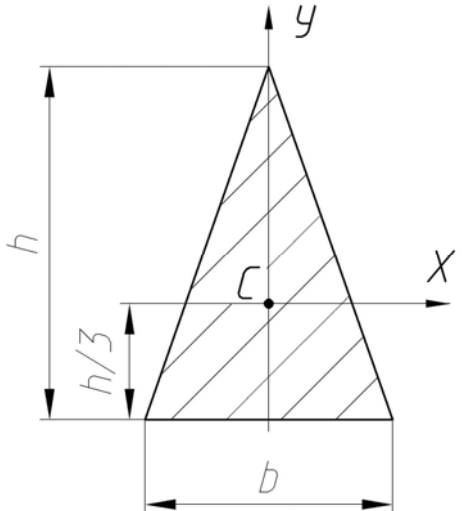
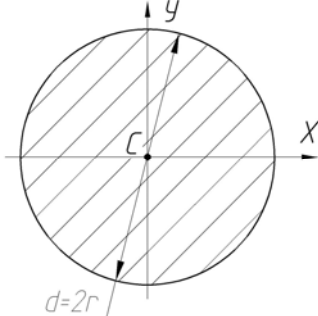
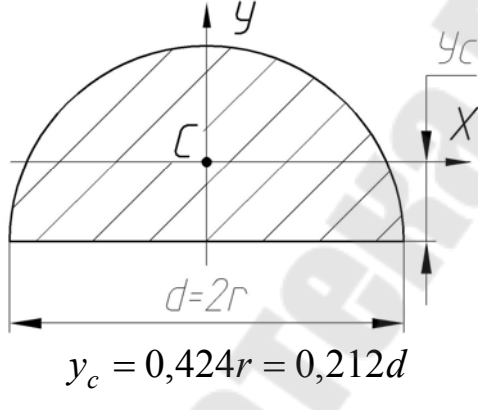
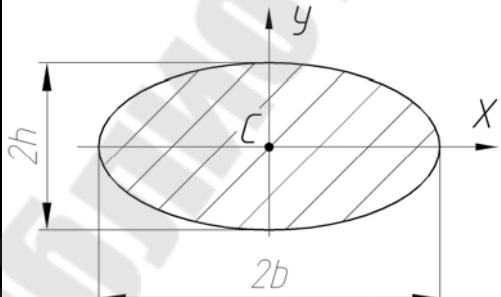
В таблице 1 представлены геометрические характеристики некоторых простых фигур. В таблицах 2-5 представлены геометрические характеристики прокатной и горячекатаной стали наиболее распространенного профиля: равнополочный и неравнополочный уголок, швеллер, двутавр.

Таблица 1

Формы поперечных сечений и их геометрические характеристики

Форма поперечного сечения	Площадь сечения A , осевые и центробежный моменты инерции I , моменты сопротивления W , радиусы инерции i
	$A = bh.$ $I_X = \frac{bh^3}{12}; I_Y = \frac{hb^3}{12}; I_{XY} = 0.$ $W_X = \frac{bh^2}{6}; W_Y = \frac{hb^2}{6}.$ $i_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}}; i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \frac{b}{\sqrt{12}}.$
	$A = b^2.$ $I_X = I_Y = \frac{b^4}{12}; I_{XY} = 0.$ $W_X = W_Y = \frac{b^3}{6\sqrt{2}} = 0,118b.$ $i_X = i_Y = 0,289b.$
	$A = 0,5bh.$ $I_X = \frac{bh^3}{36}; I_Y = \frac{hb^3}{36}; I_{XY} = \frac{b^2h^2}{72}.$ $W_X^{верх} = \frac{bh^2}{24}; W_X^{низ} = \frac{bh^2}{12}; W_Y^{лев} = \frac{hb^2}{12};$ $W_Y^{прав} = \frac{hb^2}{24}.$ $i_X = \frac{h}{3\sqrt{2}}; i_Y = \frac{b}{3\sqrt{2}}.$

Продолжение табл. 1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения A , осевые и центробежный моменты инерции I , моменты сопротивления W , радиусы инерции i
	$A = 0,5bh.$ $I_X = \frac{bh^3}{36}; I_Y = \frac{hb^3}{48}; I_{XY} = 0.$ $W_X^{верх} = \frac{bh^2}{24}; W_X^{низ} = \frac{bh^2}{12};$ $W_Y^{лев} = W_Y^{прав} = \frac{hb^2}{24}.$ $i_X = \frac{h}{3\sqrt{2}}; i_Y = \frac{b}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}.$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}.$ $I_X = I_Y = \frac{\pi d^4}{64}; I_{XY} = 0.$ $W_X = W_Y = \frac{\pi d^3}{32}; i_X = i_Y = \frac{d}{4}.$
 <p>$y_c = 0,424r = 0,212d$</p>	$A = \frac{\pi d^2}{8}.$ $I_X = 0,00686d^4; I_Y = \frac{\pi d^4}{128}; I_{XY} = 0.$ $W_X = 0,0239d^3; W_Y = \frac{\pi d^3}{64}.$ $i_X = i_{min} = 0,1319d; i_Y = \frac{d}{4}.$
	$A = \pi bh.$ $I_X = \frac{\pi bh^3}{4}; I_Y = \frac{\pi hb^3}{4}; I_{XY} = 0.$ $W_X = \frac{\pi bh^2}{4}; W_Y = \frac{\pi hb^2}{4}; i_X = \frac{b}{2}; i_Y = \frac{h}{2}.$

Окончание табл. 1

Форма поперечного сечения	Площадь сечения A , осевые и центробежный моменты инерции I , моменты сопротивления W , радиусы инерции i
	$c = \frac{d}{D}; A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}.$ $I_X = I_Y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4);$ $I_{XY} = 0.$ $W_X = W_Y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4).$ $i_X = i_Y = 0,25\sqrt{D^2 + d^2}.$

Таблица 2

Сталь прокатная угловая равнополочная (по ГОСТ 8509-86)

		b, d – ширина и толщина полки; z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки; I – момент инерции; W – момент сопротивления; i – радиус инерции.														
Номер уголка	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	I_x , см ⁴	W_{x_0} , см ³	i_x , см	I_{x0max} , см ⁴	i_{x0max} , см	I_{y0max} , см ⁴	W_{y0max} , см ³	i_{y0max} , см	I_{xy} , см ⁴	z_0 , см	Масса 1 м, кг
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4			1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4			1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
		5*			2,27	1,22	0,71	0,73	1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	0,69	0,80	1,78
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3,0	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4			2,27	1,84	0,87	0,80	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
		5*			2778	2,20	1,06	0,89	3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	1,27	0,93	2,18
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
		4			2,17	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
		5			3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58

Продолжение табл. 2

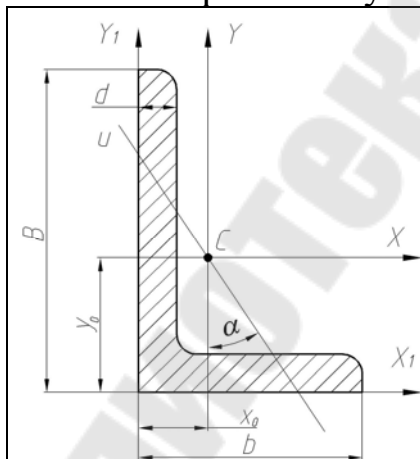
Номер уголка	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	I_{x0max} , см ⁴	i_{x0max} , см	I_{y0max} , см ⁴	W_{y0max} , см ³	i_{y0max} , см	I_{xy} , см ⁴	Z_0 , см	Масса 1 м, кг				
	b	d	R	r																
4,0	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85				
		4			3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42				
		5			3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98				
		6*			4,48	6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52				
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08				
		4			3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73				
		5			4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37				
		6*			5,08	9,35	2,95	1,36	14,80	1,71	3,90	2,06	0,88	5,45	1,34	3,99				
5,0	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32				
		4			3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05				
		5			4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77				
		6			5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47				
		7*			6,56	14,84	4,23	1,50	23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15				
		8*			7,41	16,51	4,76	1,49	26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82				
		5,6			56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
						5			5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6,0	60	4	7,0	2,3	4,72	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71				
		5			5,83	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	4,58				
		6			6,92	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	5,43				
		8			9,40	29,55	7,00	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78	7,10				
		10			11,08	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15,00	5,70	1,16	20,32	1,85	8,70				
6,3	63	4	7,0	2,3	4,69	18,86	4,09	1,95	29,00	2,45	7,81	3,26	1,25	11,0	1,69	3,90				
		5			6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,7	1,74	4,81				
		6			7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,9	1,78	5,72				
7,0	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,0	1,88	4,87				
		5			8,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,7	1,90	5,38				
		6			8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,1	1,94	6,39				
		7			9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,2	1,99	7,39				
		8			10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,2	2,02	8,37				
		10*			13,11	57,90	11,82	2,10	91,52	2,64	24,27	8,17	1,36	33,6	2,10	10,29				
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,1	2,02	5,80				
		6			8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,3	2,06	6,89				
		7			10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,2	2,10	7,96				
		8			11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,0	2,15	9,02				
		9			12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,6	2,18	10,07				
8,0	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,9	2,17	6,78				
		6			9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,4	2,19	7,36				
		7			10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,3	2,23	8,51				
		8			12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,0	2,27	9,65				
		10*			15,14	83,58	15,67	2,42	140,31	3,04	36,85	11,09	1,56	56,7	2,35	11,88				
		12*			17,90	102,74	18,42	2,40	162,27	3,01	43,21	12,62	1,55	59,5	2,42	14,05				
9,0	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,1	2,43	8,33				
		7			12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,4	2,47	9,64				
		8			13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,3	2,51	10,93				
		9			15,60	147,19	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,0	2,55	12,20				
		10*			17,17	128,60	20,07	2,74	203,93	3,45	53,27	14,54	1,76	75,3	2,59	13,48				
		12*			20,33	149,67	23,85	2,71	235,88	3,41	62,40	16,53	1,75	86,2	2,67	15,96				
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,4	2,68	10,06				
		7			13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,4	2,71	10,79				
		8			15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,3	2,75	12,25				
		10			19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110	2,83	15,10				
		12			22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122	2,91	17,90				
		14			26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138	2,99	20,63				
		15*			27,99	250,68	35,95	2,99	395,87	3,76	105,48	24,62	1,94	145	3,03	21,97				
		16			29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152	3,06	23,30				
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106	2,96	11,89				
		8			17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116	3,00	13,50				
12*	120	8	12,0	4,0	18,80	259,75	29,68	3,72	412,45	4,68	107,04	23,29	2,39	153	3,25	14,76				
		10			23,21	317,16	36,59	3,69	503,79	4,66	130,54	27,72	2,37	187	3,33	18,24				
		12			27,60	371,80	43,30	3,67	590,28	4,62	153,33	31,79	2,36	218	3,41	21,67				
		15			33,99	448,90	52,96	3,63	711,32	4,57	186,48	37,35	2,34	262	3,53	26,68				
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172	3,36	15,46				
		9			22,0	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192	3,40	17,30				
		10			24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211	3,45	19,10				
		12			28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248	3,53	22,68				
		14			33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282	3,61	26,20				
		16			37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315	3,68	29,65				

Окончание табл. 2

Номер уголка	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	I_x , см ⁴	W_{x_3} , см ³	i_x , см	$I_{y_{0max}}$, см ⁴	$i_{y_{0max}}$, см	$I_{y_{0min}}$, см ⁴	$W_{y_{0max}}$, см ³	$i_{y_{0min}}$, см	I_{xy} , см ⁴	Z_0 , см	Масса 1 м, кг
	b	d	R	r												
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,03	2,79	274	3,78	19,41
		10			27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301	3,82	21,45
		12			32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354	3,90	25,50
15*	150	10	14,0	4,6	29,33	634,76	58,07	4,65	1008,56	5,86	260,97	45,34	2,98	374	4,07	23,02
		12			34,89	747,48	68,90	4,63	1187,86	5,83	307,09	52,32	2,97	440	4,15	27,39
		15			43,08	908,38	84,66	4,59	1442,60	5,79	374,17	61,96	2,95	534	4,27	33,82
		18			51,09	1060,08	99,86	4,56	1680,92	5,74	439,24	70,91	2,93	621	4,38	40,11
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455	4,30	24,67
		11			34,42	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496	4,35	27,02
		12			37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537	4,39	28,35
		14			43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615	4,47	33,97
		16			49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690	4,55	38,52
		18			54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771	4,63	43,01
		20			60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830	4,70	47,44
18	180	11	16,0	5,3	38,60	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716	4,85	30,47
		12			42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776	4,89	33,12
		15*			52,18	1607,36	123,74	5,55	2554,99	7,00	659,73	93,11	3,56	948	5,01	40,96
		18*			61,99	1884,07	146,36	5,51	2992,69	6,95	775,44	106,88	3,54	1108	5,13	48,66
		20*			68,43	2061,11	161,07	5,49	3271,31	6,91	850,92	115,71	3,53	1210	5,20	53,72
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073	5,37	36,97
		13			50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156	5,42	39,92
		14			54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236	5,46	42,80
		16			61,98	2362,57	163,37	6,17	3759,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393	5,54	48,65
		18*			69,30	2620,64	182,22	6,15	4164,54	7,75	1076,74	135,48	3,94	1544	5,62	54,40
		20			76,54	2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689	5,70	60,08
		24*			90,78	3350,66	236,77	6,08	5313,50	7,65	1387,73	167,74	3,91	1963	5,85	71,26
20	200	25	18,0	6,0	94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028	5,89	74,02
		30			111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332	6,07	87,56
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655	5,91	47,40
		16			68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869	6,02	53,83
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775	6,75	61,55
		18			87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	223,39	4,96	3089	6,83	68,86
		20			96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395	6,91	76,11
		22			106,12	6270,32	348,26	7,09	9961,60	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691	7,00	83,31
		25			119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119	7,11	93,97
		28			133,12	7716,86	434,25	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527	7,23	104,50
		30			141,96	8176,52	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788	7,31	111,44

Таблица 3

Сталь прокатная угловая неравнополочная (по ГОСТ 8510-86)



B, b – ширина большей и меньшей полки;
 d – толщина полки;
 x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до
 наружных граней полок;
 I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции.

Номер уголка	B , мм	b , мм	d , мм	Пло- щадь сечения, см ²	I_x , см ⁴	W_{x_3} , см ³	i_x , см	I_y , см ⁴	W_{y_3} , см ³	i_y , см	I_{Umin} , см ⁴	i_{Umin} , см	x_0 , см	y_0 , см	I_{xy} , см ⁴	Угол на- кло- на оси u , $tg \alpha$	Масса 1 м, кг
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91

Окончание табл. 3

Номер уголка	<i>B</i> , мм	<i>b</i> , мм	<i>d</i> , мм	Пло- щадь сечения, см ²	<i>I_x</i> , см ⁴	<i>W_x</i> , см ³	<i>i_x</i> , см	<i>I_y</i> , см ⁴	<i>W_y</i> , см ³	<i>i_y</i> , см	<i>I_{Umin}</i> , см ⁴	<i>i_{Umin}</i> , см	<i>x₀</i> , см	<i>y₀</i> , см	<i>I_{xy}</i> , см ⁴	Угол на- клона оси <i>u</i> , tg α	Масса 1 м, кг
3/2*	30	20	3	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,43	0,51	1,0	0,43	0,427	1,12
			4	1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17
			4	1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48
			4	2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281	1,94
			5	3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,37
4/3*	40	30	4	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,26
			5	3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,64	0,82	1,32	2,00	0,539	2,46
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,79	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
			4	2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
			4	3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,40
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
			5	4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46
6,3/4,0	63	40	4	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
			5	4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
			6	5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
			8	7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03
6,5/5*	65	50	5	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	1,07	1,26	2,00	9,77	0,576	4,36
			6	6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18
			7	7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98
			8	8,62	35,00	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
7,5/5	75	60	5	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	4,79
			6	7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69
			7*	8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57
			8	9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	1,00	1,13	2,60	13,20	0,387	4,49
			6	7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92
8/6*	80	60	6	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	13,61	1,29	1,49	2,47	20,98	0,547	6,39
			7	9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	1,29	1,53	2,52	24,01	0,546	7,39
			8	10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	1,28	1,57	2,56	26,83	0,544	8,37
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384	6,17
			6	8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70
			8	11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380	8,77
10/6,3	100	63	6	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53
			7	11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70
			8	12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87
			10	15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,14
10/6,5*	100	65	7	11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	22,77	1,41	1,52	3,24	38,00	0,415	8,81
			8	12,73	128,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	25,24	1,41	1,56	3,28	42,64	0,414	9,99
			10	15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	1,40	1,64	3,37	51,18	0,410	12,30
11/7	110	70	6,5	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98
			8	13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,93
12,5/8	125	80	7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11,04
			8	15,98	225,62	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	1,75	1,84	4,05	84,10	0,406	12,58
			10	19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	1,74	1,92	4,14	102,0	0,404	15,47
			12	23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	1,72	2,00	4,22	118,0	0,400	18,34
14/9	140	90	8	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	1,58	2,03	4,49	121,0	0,411	14,13
			10	22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	1,96	2,12	4,58	147,0	0,409	17,46
16/10	160	100	9	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	2,20	2,24	5,19	194,0	0,391	17,96
			10	25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	2,19	2,28	5,23	213,0	0,390	19,85
			12	30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	2,18	2,36	5,32	249,0	0,388	23,58
			14	34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	2,16	2,43	5,40	282,0	0,385	27,26
18/11	180	110	10	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	2,42	2,44	5,88	295,0	0,376	22,20
			12	33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	2,40	2,52	5,97	348,0	0,374	26,40
20/12,5	200	125	11	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	2,75	2,79	6,50	465,0	0,392	27,37
			12	37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	2,74	2,83	6,54	503,0	0,392	29,74
			14	43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	2,73	2,91	6,62	575,0	0,390	34,43
			16	49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	2,72	2,99	6,71	643,0	0,388	39,07

Таблица 4

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-86)



h, b – высота балки и ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции.

Номер профиля	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	Площадь сечения, см ²	I_x , см ⁴	W_{x_3} , см ³	i_x , см	S_{x_3} , см ³	I_y , см ⁴	W_{y_3} , см ³	i_y , см	Масса 1 м, кг
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

Таблица 5

Сталь горячекатаная. Швеллеры (по ГОСТ 8240-86)



h, b – высота швеллера и ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 I – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани стенки
 i – радиус инерции.

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_y , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см	Масса 1 м, кг
	h	b	d	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	6,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Задача № 11

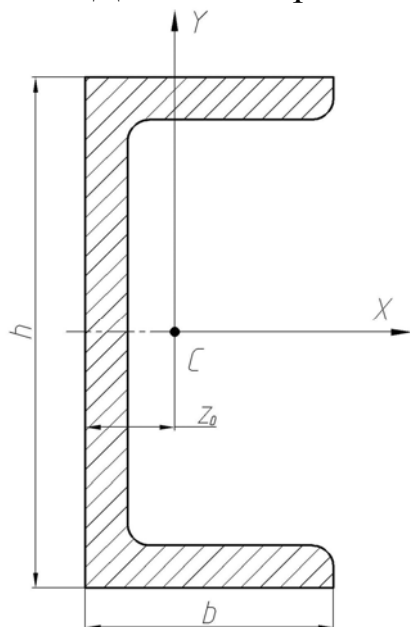
Для сложного сечения (рис. 23), составленного из швеллера №24 (ГОСТ 8240-86) (рис. 21) и неравнополочного уголка 110x70x8 (ГОСТ 8510-86) (рис. 22), требуется найти положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции.

Решение.

1. Разбиваем сечение на простые фигуры.

Данное сечение состоит из двух простых фигур, геометрические характеристики которых указаны в таблицах сортаментов прокатной стали.

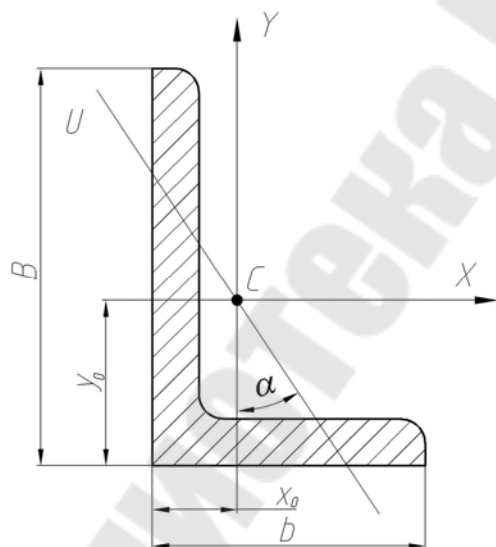
Для швеллера № 24 из таблицы 5 имеем:



$$\begin{aligned}h &= 240 \text{ см}; \\b &= 90 \text{ см}; \\A &= 30,6 \text{ см}^2; \\I_X &= 2900 \text{ см}^4; \\I_Y &= 208 \text{ см}^4; \\z_0 &= 2,42 \text{ см}.\end{aligned}$$

Рис. 21. Швеллер

Для уголка 110x70x8 из таблицы 3 имеем:



$$\begin{aligned}B &= 200 \text{ см}; \\b &= 125 \text{ см}; \\A &= 43,9 \text{ см}^2; \\I_X &= 1801 \text{ см}^4; \\I_Y &= 551 \text{ см}^4; \\x_0 &= 2,91 \text{ см}; \\y_0 &= 6,62 \text{ см}; \\I_{U \min} &= 327 \text{ см}^4; \operatorname{tg} \alpha = 0,39.\end{aligned}$$

Рис. 22. Уголок неравнополочный

2. Строим сечение в масштабе (рис. 23) и выбираем вспомогательную систему осей X, Y .

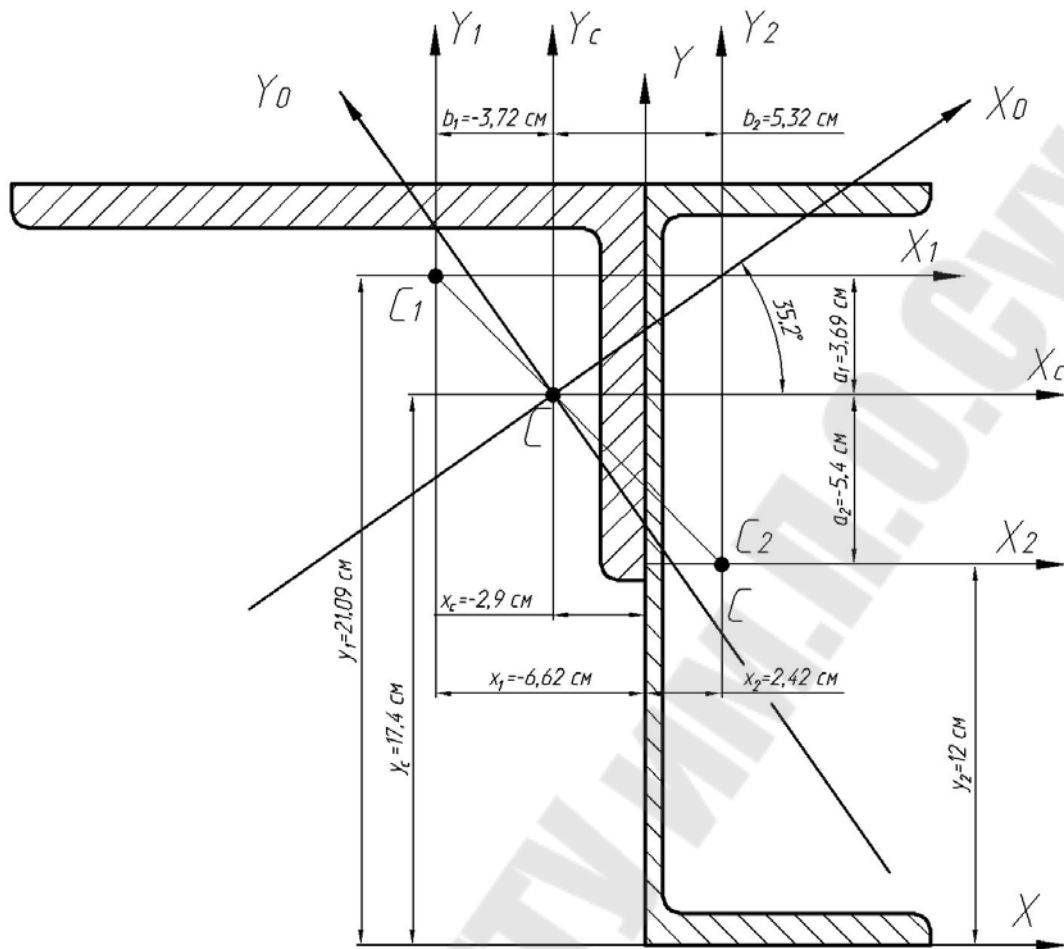


Рис. 23. Поперечное сечение в масштабе

3. Определяем положение центра тяжести сечения
Координаты центров тяжести простых фигур равны

$$x_1 = -y_0 = -6,62 \text{ см}; \quad x_2 = z_0 = 2,42 \text{ см}.$$

$$y_1 = h - x_0 = 24,0 - 2,91 = 21,09 \text{ см}; \quad y_2 = h/2 = 24/2 = 12 \text{ см}.$$

$$x_c = \frac{S_Y}{A} = \frac{S_{Y1} + S_{Y2}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{43,9 \cdot (-6,62) + 30,6 \cdot 2,42}{43,9 + 30,6} = -2,9 \text{ см}.$$

$$y_c = \frac{S_X}{A} = \frac{S_{X1} + S_{X2}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{43,9 \cdot 21,09 + 30,6 \cdot 12}{43,9 + 30,6} = 17,4 \text{ см}.$$

Центр тяжести сечения, состоящего из двух фигур (точка C) находится на середине прямой линии C_1C_2 , соединяющей центры тяжести простых фигур.

4. Проводим центральные оси всего сечения X_C и Y_C и простых фигур (уголка и швеллера) $X_1, Y_1; X_2, Y_2$.

5. Вычисляем осевые и центробежный моменты инерции фигуры относительно центральных осей X и Y . Для определения моментов инерции необходимо вычислить величины a_i и b_i :

$$\begin{aligned} a_1 &= y_1 - y_c = 21,09 - 17,4 = 3,69 \text{ см}; \\ a_2 &= -(y_c - y_2) = -(17,4 - 12) = -5,4 \text{ см}; \\ b_1 &= -(x_1 - x_c) = -(6,62 - 2,9) = -3,72 \text{ см}; \\ b_2 &= x_c + x_2 = 2,9 + 2,42 = 5,32 \text{ см}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_{Xc} &= I_{Xc}^1 + I_{Xc}^2 = (I_{X_1} + A_1 a_1^2) + (I_{X_2} + A_2 a_2^2) = \\ &= (551 + 43,9 \cdot 3,69^2) + (2900 + 30,6 \cdot (-5,4)^2) = 4941 \text{ см}^4. \\ I_{Yc} &= I_{Yc}^1 + I_{Yc}^2 = (I_{Y_1} + A_1 b_1^2) + (I_{Y_2} + A_2 b_2^2) = \\ &= (1801 + 43,9 \cdot (-3,72)^2) + (208 + 30,6 \cdot 5,32^2) = 3482,5 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Центробежный момент инерции сечения относительно двух осей будет равен нулю, если хотя бы одна из осей является осью симметрии. Так в нашем случае швеллер имеет ось симметрии, следовательно, его центробежный момент инерции равен нулю.

Центробежный момент инерции уголка может быть найден по формуле

$$I_{xy} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin 2\alpha.$$

Для равнополочного уголка значение I_{\max} и I_{\min} приводятся в таблице сортаментов в столбцах $I_{X0\max}$ и $I_{X0\min}$. Угол $|\alpha| = 45^\circ$.

Для неравнополочного уголка момент инерции I_{\max} определяется из условия $I_{\max} + I_{\min} = I_x + I_y$. Значения I_{\min} , I_x , I_y берутся из таблицы сортаментов (I_{\min} в таблице сортаментов приводится как $I_{u\min}$). Значение $\sin 2\alpha$ может быть определено по $\operatorname{tg} \alpha$, приведенному в таблице 3 сортамента, из формулы $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Тогда для уголка имеем

$$\begin{aligned} I_{U\max} &= I_X + I_Y - I_{U\min} = 1801 + 551 - 327 = 2025 \text{ см}^4. \\ I_{X_1 Y_1} &= \frac{2025 - 327}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,39}{1 + 0,39^2} = 574,8 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

При этом знак центробежного момента инерции связан с расположением сечения уголка по отношению к выбранному направлению координатных осей (см. рис. 24). В данном случае он имеет отрицательный знак.

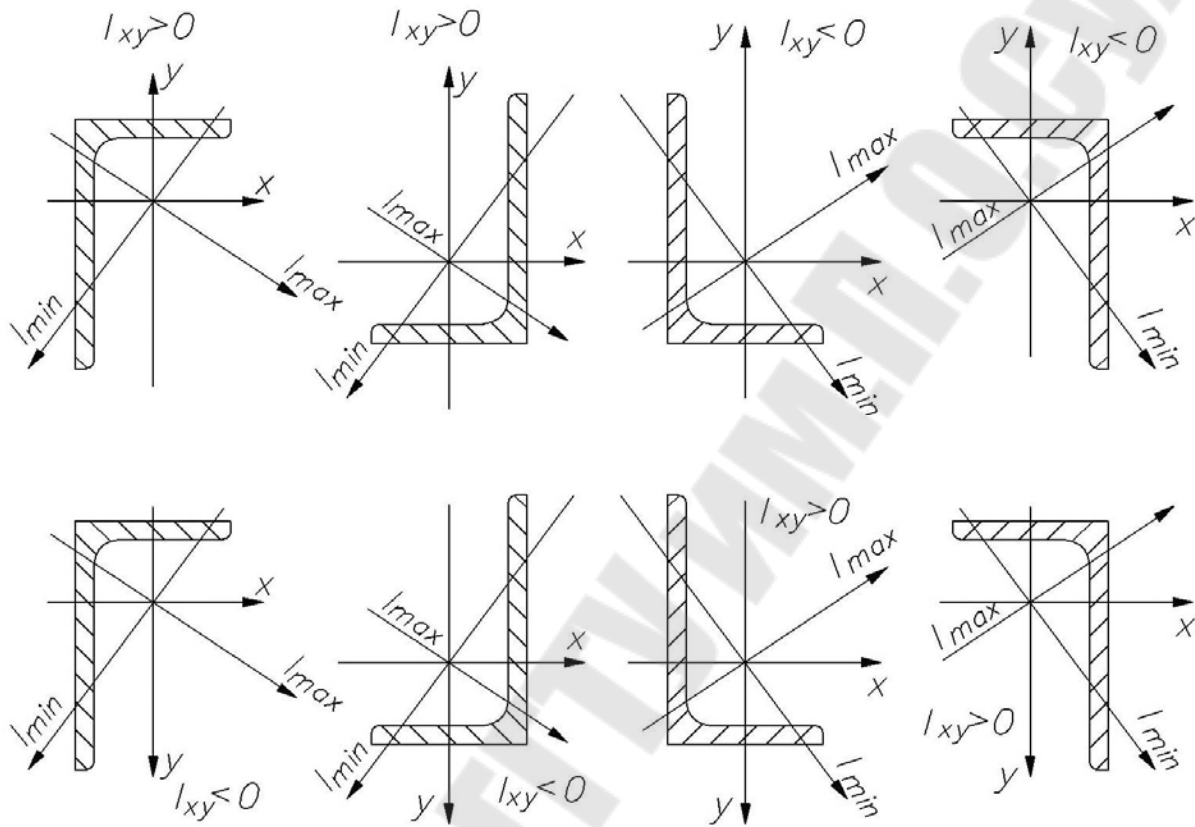


Рис. 24. Примеры расположения осей

Таким образом

$$I_{XcYc} = I_{XcYc}^1 + I_{XcYc}^2 = (I_{X_1Y_1} + A_1a_1b_1) + (I_{X_2Y_2} + A_2a_2b_2) =$$

$$= (-574,8 + 43,9 \cdot 3,69 \cdot (-3,72)) + (0 + 30,6 \cdot (-5,4) \cdot 5,32) = -2056,48 \text{ см}^4.$$

Выпишем полученные значения моментов инерции:

$$I_{Xc} = 4941 \text{ см}^4; \quad I_{Yc} = 3482,5 \text{ см}^4; \quad I_{XcYc} = -2056,48 \text{ см}^4.$$

6. Определяем положение главных центральных осей инерции по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot I_{XcYc}}{I_{Xc} - I_{Yc}} = -\frac{2 \cdot (-2056,48)}{4941 - 3482,5} = 2,82;$$

$\alpha_0 = 0,5 \cdot \operatorname{arctg}(2,82) = +35,2^\circ$ – вращение осей против часовой стрелки.

7. Определяем главные моменты инерции относительно главных центральных осей по формулам

$$I_{Xo}, I_{Yo} = \frac{I_{Xc} + I_{Yc}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Xc} - I_{Yc})^2 + 4I_{XcYc}^2} =$$

$$= \frac{4941 + 3482,5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4941 - 3482,5)^2 + 4(-2056,48)^2} = 4211,75 \pm 2181,95$$

$$I_{Xo} = 4211,75 + 2181,95 = 6393,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{Yo} = 4211,75 - 2181,95 = 2029,8 \text{ см}^4.$$

Или

$$I_{Xo} = I_{Xc} \cos^2 \alpha_0 + I_{Yc} \sin^2 \alpha_0 - I_{XcYc} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= 4941 \cos^2 35,2 + 3482,5 \sin^2 35,2 - (-2056,48) \sin 70,4 = 6393,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{Yo} = I_{Xc} \sin^2 \alpha_0 + I_{Yc} \cos^2 \alpha_0 + I_{XcYc} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= 4941 \sin^2 35,2 + 3482,5 \cos^2 35,2 + (-2056,48) \sin 70,4 = 2029,8 \text{ см}^4;$$

Для проверки правильности определения главных моментов инерции и угла α_0 воспользуемся следующими зависимостями:

1) Сумма главных моментов инерции равна сумме центральных

$$I_{Xo} + I_{Yo} = I_{Xc} + I_{Yc};$$

$$6393,7 + 2029,8 = 4941 + 3482,5;$$

$$8423,5 = 8423,5 \text{ – проверка выполняется.}$$

2) Центробежный момент инерции сечения относительно главных центральных осей равен нулю $I_{x_0y_0} = 0$.

$$I_{x_0y_0} = I_{x_c y_c} \cdot \cos 2\alpha_0 + \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= -2056,48 \cdot \cos 70,4 + \frac{4941 - 3482,5}{2} \sin 70,4 = -689,85 + 686,9 = 0,05 \approx 0.$$

Проверка выполнена, задача решена верно.

6. ИЗГИБ

Изгибом называется вид деформирования бруса (балки), в результате которого в поперечном сечении возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Поперечная сила в любом поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекции на ось Y всех внешних сил, действующих по одну сторону сечения.

Изгибающий момент в любом поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме моментов, вычисленных относи-

тельно центра тяжести сечения, всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

График, показывающий изменение поперечной силы по длине балки, называется эпюрой поперечных сил, а график, показывающий изменение изгибающего момента по длине балки, называется эпюрой изгибающих моментов.

Для определения знаков поперечной силы и изгибающего момента рекомендованы следующие правила (рис. 25):

- внешняя сила, стремящаяся повернуть отсеченную часть балки по часовой стрелке вокруг той точки оси, которая соответствует проведенному сечению, вызывает положительную поперечную силу. Внешняя сила, стремящаяся повернуть отсеченную часть балки против часовой стрелки вокруг указанной точки – отрицательную поперечную силу.
- момент (пара сил), изгибающий отсеченную часть балки относительно проведенного сечения, дает положительный знак, если происходит сжатие верхних (левые) волокон. Момент (пара сил), изгибающий отсеченную часть балки дает знак, если сжимаются нижние (правые) волокна.

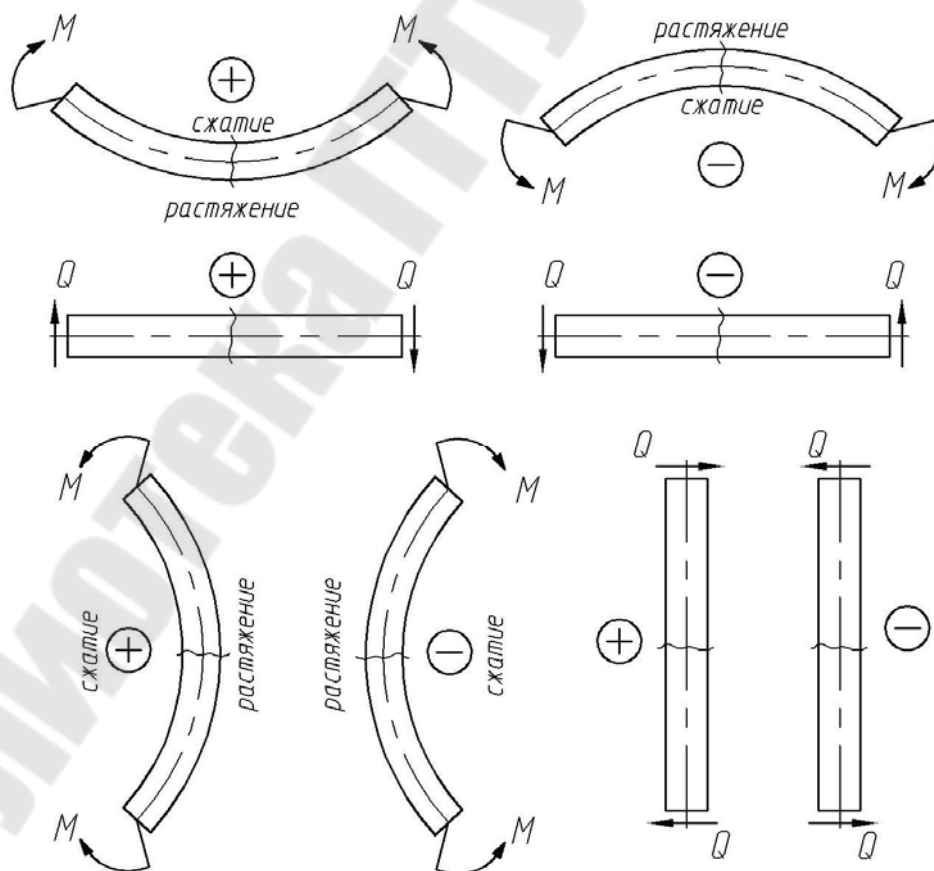


Рис. 25. Правило знаков при изгибе

При определении знака изгибающего момента по указанному правилу необходимо отсеченную часть балки представить как защемленную в проведенном сечении.

При определении поперечных сил и изгибающих моментов в двухопорных балках необходимо учитывать в обязательном порядке опорные реакции. Исключение составляют лишь балки, жестко защемленные одним концом – *консольные балки*.

При изгибе в поперечном сечении учитывают нормальные σ и касательные τ напряжения.

Нормальные напряжения в поперечном сечении балки при изгибе определяют по формуле:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I},$$

где M – изгибающий момент в сечении балки;

y – расстояние от нейтральной оси сечения до рассматриваемого слоя волокон;

Наибольшие нормальные напряжения при изгибе определяют по формулам:

$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$ – балки с симметричным относительно нейтральной оси сечением (например, прямоугольное);

$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} y_{\max}$ – балки с несимметричным относительно нейтральной оси сечением (например, треугольное).

Прочность балки, работающей на изгиб, проверяется, как правило, по наибольшим нормальным напряжениям. Условие прочности при изгибе балки по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \text{ или } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} y_{\max} \leq [\sigma],$$

где W – осевой момент сопротивления.

Касательное напряжение при изгибе балки определяют по формуле Журавского

$$\tau = \frac{QS^{OCT}}{bI},$$

где Q – поперечная сила в сечении балки;

S^{OCT} – статический момент инерции части сечения, расположенной выше (ниже) продольного слоя волокон балки, на котором определяется касательное напряжение;

b – ширина сечения в рассматриваемом продольном слое;
 I – осевой момент инерции сечения.

Условие прочности при изгибе балки по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}^{OCT}}{b_{\min} I} \leq [\tau],$$

где $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение при изгибе.

Максимальные нормальные напряжения наблюдаются на поверхности балки, где имеет место максимум расстояния y . Максимальные касательные напряжения возникают в центре тяжести сечения (если сечение без отверстий). Причем в тех точках, где возникают максимальные нормальные напряжения касательные напряжения равны нулю и наоборот.

Задача № 12

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольной балки (рис. 26).

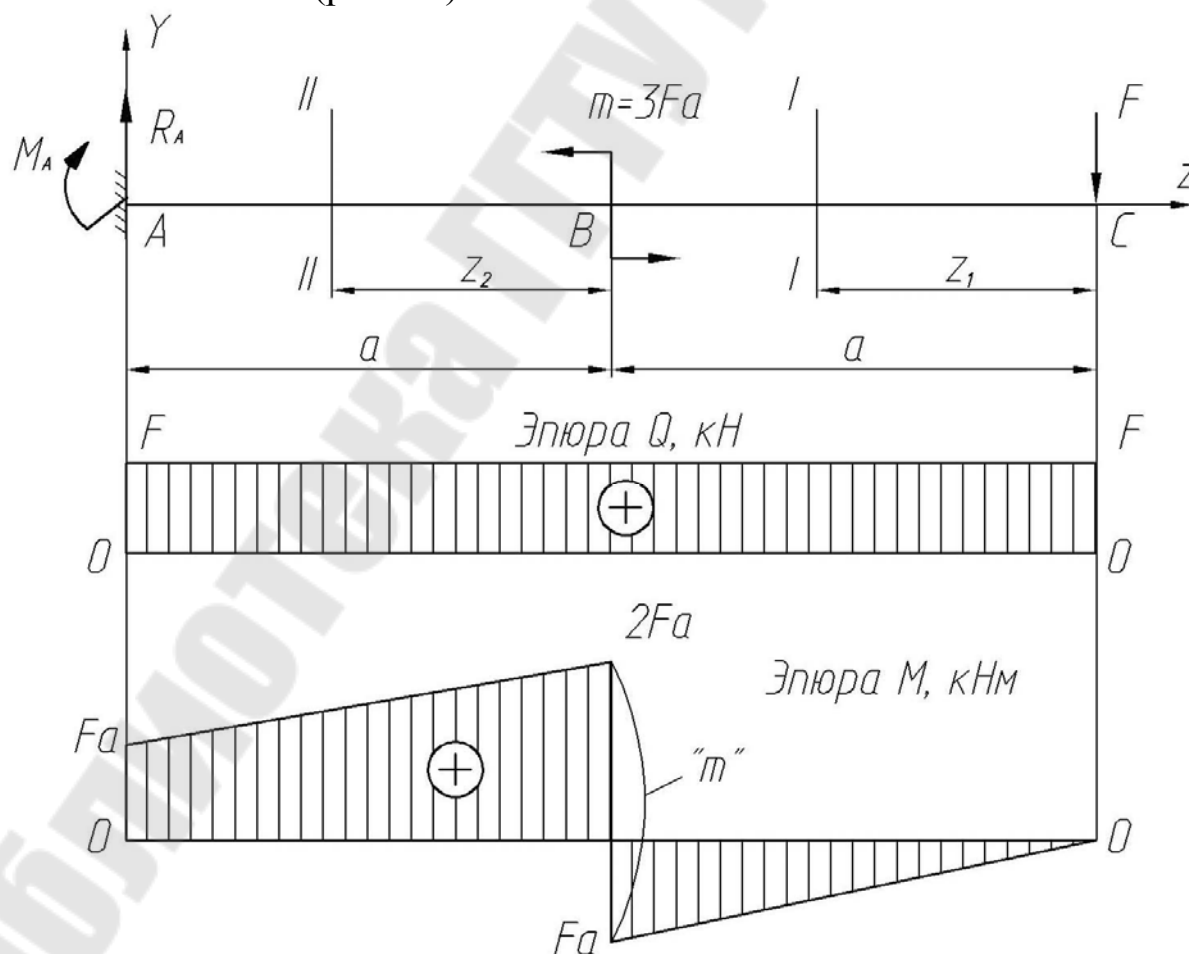


Рис. 26. Балка и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Решение.

При расчете консольных балок, как правило, нет необходимости в определении опорных реакций. Определим их для примера.

В жесткой заделке возникает реакция R_A и реактивный момент M_A . Определим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; F \cdot 2a - m + M_A = 0,$$

$$M_A = -2Fa + m = -2Fa + 3Fa = +Fa - \text{реактивный момент направлен}$$

верно.

$$\sum F_Y = 0; -F + R_A = 0,$$

$$R_A = F.$$

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов применяем метод сечений.

Балку представим состоящей из 2 участков: AB и BC . Определим значения поперечных сил для каждого участка балки с учетом правила знаков. Причем начнем рассмотрение со свободного конца балки.

На первом участке BC произвольно выберем сечение на расстоянии z_1 от сечения C . На отсеченную часть действует только сила F , причем она стремится правую от рассматриваемого сечения часть повернуть по часовой стрелке – знак плюс.

$$Q_I(z_1) = +F = \text{const.}$$

Рассмотрим второе сечение на участке AB , расположенном на расстоянии z_2 от сечения B .

$$Q_{II}(z_2) = +F = \text{const.}$$

Поперечная сила является постоянной по всей длине балки и равна по величине силе F . Строим эпюру поперечных сил.

Определим изгибающие моменты на участках.

Мысленно защемим отсеченную часть балки в проведенном сечении на участке BC . Сила F изгибает отсеченную часть балки относительно проведенного сечения, вызывая сжатие нижних волокон, следовательно, сила F дает отрицательный изгибающий момент

$$M_I(z_1) = -Fz_1.$$

Изгибающий момент на этом участке меняется по линейному закону, для построения которого необходимо и достаточно два его значения:

$$\text{при } z_1 = 0; M_I(z_1 = 0) = -F \cdot 0 = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a; M_I(z_1 = a) = -Fa.$$

Рассмотрим сечение $II-II$ на участке BC . Сила F изгибает всю отсеченную часть балки, следовательно, сила F сохраняет знак изгибающего момента (отрицательный), изменилось только плечо. В сечении B приложен изгибающий момент m , который стремится изогнуть участок длиной z_2 , сжав верхние волокна, т.е. с положительным знаком. Тогда имеем

$$M_{II}(z_2) = -F(a + z_2) + m.$$

Изгибающий момент на этом участке также меняется по линейному закону:

$$\text{при } z_2 = 0; M_{II}(z_2 = 0) = -Fa + 3Fa = +2Fa;$$

$$\text{при } z_1 = a; M_{II}(z_2 = a) = -F2a + 3Fa = +Fa.$$

По полученным данным строим эпюру изгибающих моментов.

На эпюрах знак “+” откладывается вверх, а знак “-” – вниз. При этом эпюра изгибающих моментов строится на сжатых волокнах балки.

Задача № 13

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для двухопорной балки (рис. 27).

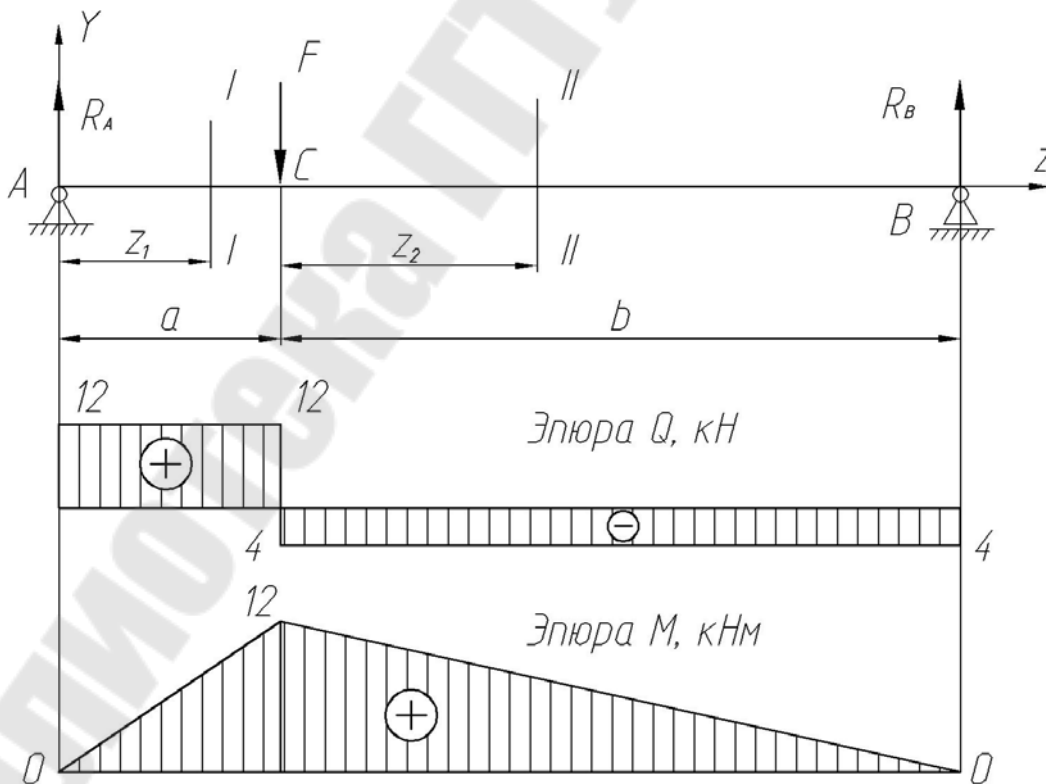


Рис. 27. Балка и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Решение.

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; F \cdot a - R_B \cdot (a + b) = 0,$$

$$R_B = \frac{16 \cdot 1}{1 + 3} = 4 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; F \cdot b - R_A \cdot (a + b) = 0,$$

$$R_A = \frac{16 \cdot 3}{1 + 3} = 12 \text{ кН.}$$

Проверку правильности найденных значений опорных реакций производим по уравнению суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum F_{yi} = 0; R_A + R_B - F = 0$$

или $4 + 12 - 16 = 0$ – отсюда заключаем, что опорные реакции по величине и направлению определены правильно.

На первом участке произвольно выберем сечение на расстоянии z_1 от опоры A .

Слева от сечения на балку действует одна внешняя сила R_A (опорная реакция), которая стремится повернуть левую часть балки по часовой стрелке. Следовательно, сила R_A вызывает положительную поперечную силу

$$Q_I(z_1) = +R_A = 12 \text{ кН.}$$

На втором участке балки выберем сечение на расстоянии z_2 от сечения C . Слева от сечения на балку действуют две внешние силы R_A и F . Сила R_A , как и на первом участке, вызывает положительную поперечную силу, а сила F , стремящаяся повернуть левую часть балки против часовой стрелки – отрицательную поперечную силу.

$$Q_{II}(z_2) = +R_A - F = 12 - 16 = -4 \text{ кН.}$$

Эпюра поперечных сил приведена на рисунке. Знак “+” откладываем вверх, а знак “-” – вниз.

Определим значения изгибающих моментов для каждого участка балки.

Сила R_A изгибает отсеченную часть балки относительно проведенного сечения, вызывая сжатие верхних волокон, следовательно, сила R_A дает положительный изгибающий момент

$$M_I(z_1) = +R_A z_1.$$

Изгибающий момент на этом участке меняется по линейному закону:

при $z_1 = 0$; $M_I(z_1 = 0) = +R_A \cdot 0 = 0$;

при $z_1 = a$; $M_I(z_1 = a) = +R_A \cdot a = 12 \cdot 1 = 12$ кНм.

Аналогично, мысленно защемим отсеченную левую часть в проведенном сечении на втором участке.

Сила R_A , как и на первом участке, дает положительный изгибающий момент. Сила F изгибает отсеченную часть балки относительно проведенного сечения так, что сжимаются нижние волокна, следовательно, дает отрицательный знак. На этом участке изгибающий момент также изменяется по линейному закону:

$$M_{II}(z_2) = +R_A(a + z_2) - Fz_2$$

при $z_2 = 0$; $M_{II}(z_2 = 0) = +R_A \cdot a = 12 \cdot 1 = 12$ кНм;

при $z_2 = b$; $M_{II}(z_2 = b) = +R_A(a + b) - Fb = 12 \cdot 4 - 16 \cdot 3 = 0$ кНм.

Эпюра изгибающих моментов приведена на рисунке 27.

Построить эпюры Q и M можно и без составления уравнений поперечных сил и изгибающих моментов, а путем вычисления значений поперечных сил и изгибающих моментов в характерных точках (сечениях). Для рассматриваемой балки характерными точками (сечениями) являются точки A , C и B . Характер изменения эпюр между этими точками установим при помощи дифференциальных зависимостей: так как распределенная нагрузка на обоих участках отсутствует ($q = 0$), то поперечная сила в пределах каждого участка постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону:

$$M = \int Q dz = Qz.$$

Вычислим характерные значения поперечных сил. Поскольку мы установили, что поперечная сила постоянна на каждом из участков балки, достаточно вычислить по одному значению Q на каждом участке. Однако в целях контроля можно вычислить большее количество характерных значений.

Например:

в сечении A : $Q_A = +R_A = +12$ кН;

в сечении C (слева): $Q_C^{cl} = +R_A = +12$ кН;

в сечении C (справа): $Q_C^{сп} = +R_A - F = -R_B = -4$ кН;

в сечении B : $Q_B = -R_B = -4$ кН;

Вычислим значения изгибающих моментов в этих же сечениях:

в сечении A : $M_A = 0$;

в сечении C (слева): $M_C^{cl} = +R_A a = 12 \cdot 1 = +12$ кНм;

в сечении C (справа): $M_C^{cnp} = +R_A a = +R_B b = 12 \cdot 1 = 4 \cdot 3 = 12$ кНм;

в сечении B : $M_B = +R_A(a+b) - Fb = +12(1+3) - 16 \cdot 3 = 0$ или

$$M_B = +R_B \cdot 0 = 0.$$

По найденным значениям и известному качественному характеру изменения поперечной силы и изгибающего момента строят эпюры Q и M .

Задача № 14

Рассмотрим случай, когда на двухопорную балку действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q (рис. 28).

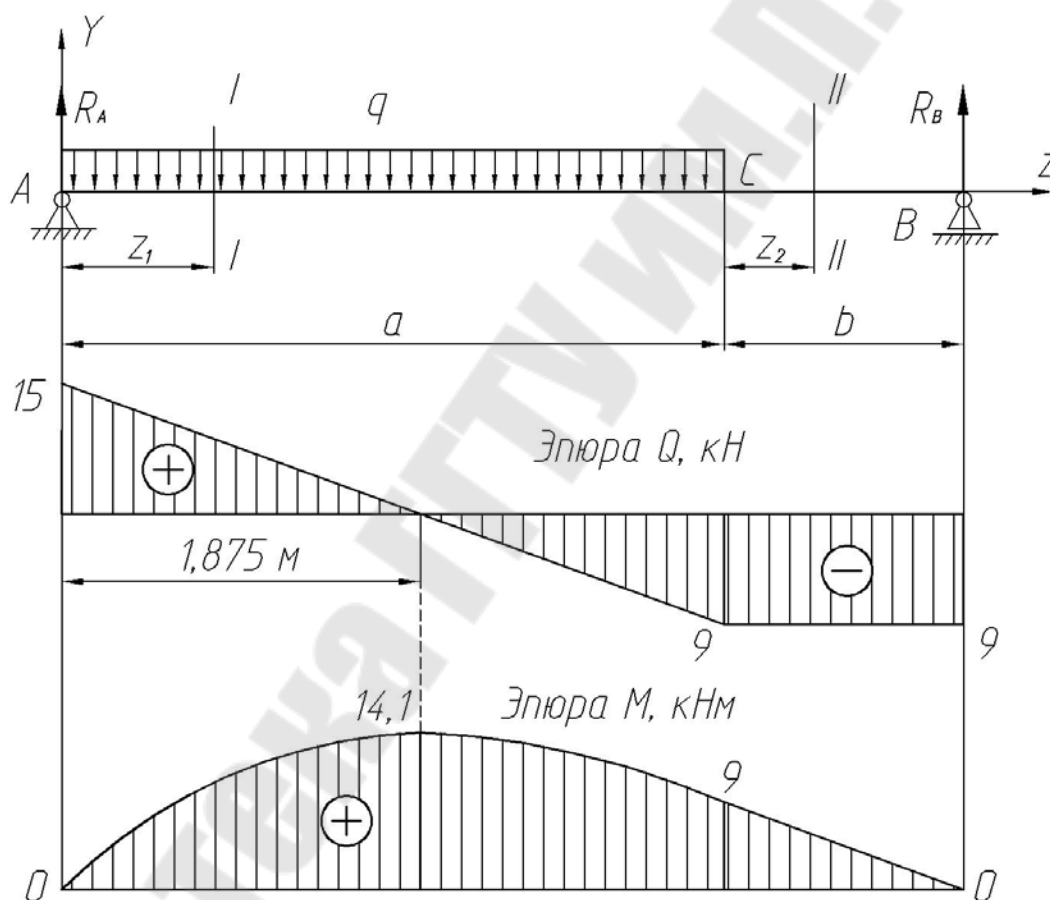


Рис. 28. Балка и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; q \cdot a \cdot a/2 - R_B \cdot (a+b) = 0,$$

$$R_B = \frac{8 \cdot 3 \cdot 1,5}{1+3} = 9 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; q \cdot a \cdot (a/2 + b) - R_A \cdot (a+b) = 0,$$

$$R_A = \frac{8 \cdot 3 \cdot (1,5 + 1)}{1 + 3} = 15 \text{ кН.}$$

Определим значения поперечных сил для каждого участка балки. На первом участке произвольно выберем сечение на расстоянии z_1 от опоры A .

Поперечная сила в этом сечении

$$Q_I(z_1) = +R_A - qz_1.$$

Из уравнения следует, что поперечная сила на первом участке изменяется по закону прямой линии:

$$\text{при } z_1 = 0; Q_I(z_1 = 0) = +R_A - q \cdot 0 = 15 \text{ кН;}$$

$$\text{при } z_1 = a; Q_I(z_1 = a) = +R_A - q \cdot a = 15 - 8 \cdot 3 = -9 \text{ кН.}$$

Поперечную силу на втором участке определяем, рассматривая часть балки слева или справа от сечения $II - II$:

$$Q_{II}^{cl} = +R_A - qa = 15 - 24 = -9 \text{ кН;}$$

$$Q_{II}^{cnp} = -R_B = -9 \text{ кН;}$$

По найденным числовым значениям строим эпюру поперечных сил.

Определим значения изгибающих моментов для каждого участка балки. Для этого воспользуемся теми же участками балки и сечениями, которые были выбраны ранее. На первом участке балки изгибающий момент равен

$$M_I(z_1) = +R_A z_1 - qz_1 \cdot z_1 / 2.$$

Изгибающий момент на этом участке изменяется по закону квадратной параболы, для построения которой достаточно знать три его значения:

$$\text{при } z_1 = 0; M_I(z_1 = 0) = +R_A \cdot 0 - q \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a; M_I(z_1 = a) = +R_A \cdot a - q \cdot a \cdot a / 2 = 15 \cdot 3 - 8 \cdot 3 \cdot 1,5 = 9 \text{ кНм.}$$

Третье значение изгибающего момента можно определить для любого промежуточного сечения расположенного в пределах рассматриваемого участка.

В нашем случае третье значение изгибающего момента определим для сечения, в котором поперечная сила равна нулю, а, следовательно, изгибающий момент будет иметь свое наибольшее (экстремальное) значение. Находим значение z_1 , при котором поперечная сила будет равна нулю:

$$Q_I(z_1) = +R_A - qz_1 = 0.$$

Тогда

$$z_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{15}{8} = 1,875 \text{ м.}$$

Наибольший изгибающий момент

$$M_I^{\max}(z_1 = 1,875) = R_A z_1 - q z_1^2 / 2 = 15 \cdot 1,875 - 8 \cdot 1,875^2 / 2 = 14,1 \text{ кНм.}$$

Уравнение изгибающего момента на втором участке балки для сечения II – II на расстоянии z_2 или $z'_2 = b - z_2$ запишется так:

$$M_{II}^{cl}(z_2) = +R_A(a + z_2) - qa \cdot (a/2 + z_2) \text{ или проще}$$

$$M_{II}^{cnp}(z'_2) = +R_B z'_2.$$

На этом участке изгибающий момент изменяется по закону прямой линии, для построения которой достаточно знать два его значения:

$$\text{при } z'_2 = 0; M_{II}^{cnp}(z'_2) = +R_B \cdot 0 = 0;$$

$$\text{при } z'_2 = b; M_{II}^{cnp}(z'_2) = +R_B \cdot b = 9 \cdot 1 = 9 \text{ кНм.}$$

По найденным числовым значениям строим эпюру изгибающих моментов (рис. 28).

Анализируя эпюры поперечных сил и изгибающих моментов можно сделать следующие выводы:

1. Если поперечная сила на участке равна нулю, то изгибающий момент имеет постоянное значение – *чистый изгиб*.
2. Если поперечная сила на участке постоянна, изгибающий момент изменяется по линейному закону; если поперечная сила изменяется по линейному закону – изгибающий момент изменяется по параболическому и т.д.

Это определяется дифференциальными зависимостями между поперечной силой и изгибающим моментом:

$$Q(z) = \frac{dM}{dz}; M(z) = \int Q(z) dz.$$

3. Парабола на эпюре изгибающих моментов направлена выпуклостью к нагрузке.

Задача № 15.

Для заданной балки (рис. 29) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать параметр сечения и построить эпюры нормальных и касательных напряжений, приняв $[\sigma]_{расм} = 100$ МПа и $[\sigma]_{сжат} = 400$ МПа.

Решение.

1. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
Определяем опорные реакции.

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = 0; \quad qa \frac{a}{2} - qb \frac{b}{2} - F(b+c) - m + R_B(b+d+e) &= 0, \\ R_B &= \frac{-qa \frac{a}{2} + qb \frac{b}{2} + F(b+d) + m}{b+d+e} = \\ &= \frac{-20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 20 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 100(4+3) + 40}{4+3+3} = 86 \text{ кН.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_B = 0; \quad q(a+b) \left(\frac{a+b}{2} + d+e \right) + Fe - m - R_A(b+d+e) &= 0, \\ R_A &= \frac{20 \cdot (2+4) \left(\frac{2+4}{2} + 3+3 \right) + 100 \cdot 3 - 40}{4+3+3} = 134 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Положительный знак найденных реакций говорит о том, что они направлены верно.

Определяем поперечные силы на участках и строим эпюру поперечных сил (рис. 29).

На участке a :

$$Q_I(z) = -qz_1,$$

при $z_1 = 0$, $Q_I(z) = 0$;

при $z_1 = a = 2$ м, $Q_I(z) = -20 \cdot 2 = -40$ кН.

На участке b :

$$Q_{II}(z) = -q(a+z_2) + R_A,$$

при $z_2 = 0$, $Q_{II}(z) = -20 \cdot (2+0) + 134 = 94$ кН;

при $z_2 = b = 4$ м, $Q_{II}(z) = -20 \cdot (2+4) + 134 = 14$ кН.

На участке d :

$$Q_{III} = -q(a+b) + R_A = -20 \cdot (2+4) + 134 = 14 \text{ кН.}$$

На участке e :

$$Q_{IV}^{\text{слева}} = -q(a+b) + R_A - F \quad \text{или} \quad Q_{IV}^{\text{справа}} = -R_B,$$

$$Q_{IV}^{\text{слева}} = -20 \cdot (2+4) + 134 - 100 = -86 \text{ кН,}$$

$$Q_{IV}^{справа} = -86 \text{ кН.}$$

Определяем изгибающие моменты на участках и строим эпюру изгибающих моментов (рис. 29).

На участке a :

$$M_I(z) = -qz_1 \frac{z_1}{2} = -\frac{qz_1^2}{2} \text{ - параболическая зависимость,}$$

при $z_1 = 0$, $M_I(z) = 0$;

$$\text{при } z_1 = a = 2 \text{ м, } M_I(z) = -20 \cdot \frac{2^2}{2} = -40 \text{ кНм.}$$

На участке b :

$$M_{II}(z) = -q \frac{(a + z_2)^2}{2} + R_A z_2,$$

$$\text{при } z_2 = 0, M_{II}(z) = -20 \cdot \frac{(2 + 0)^2}{2} + 134 \cdot 0 = -40 \text{ кНм;}$$

$$\text{при } z_2 = b = 4 \text{ м, } M_{II}(z) = -20 \cdot \frac{(2 + 4)^2}{2} + 134 \cdot 4 = 176 \text{ кНм.}$$

На участке d :

$$M_{III}(z) = -q(a + b) \left(\frac{a + b}{2} + z_3 \right) + R_A(b + z_3) \text{ - линейная зависимость,}$$

$$\text{при } z_3 = 0, M_{III}(z) = -20 \cdot (2 + 4) \left(\frac{2 + 4}{2} \right) + 134 \cdot 4 = 176 \text{ кНм,}$$

$$\text{при } z_3 = d, M_{III}(z) = -20 \cdot (2 + 4) \left(\frac{2 + 4}{2} + 3 \right) + 134 \cdot (4 + 3) = 218 \text{ кНм.}$$

На участке e :

на данном участке удобно рассмотреть равновесие правой части балки, т.е.

$$M_{IV}(z) = +R_B z_4 - m,$$

$$\text{при } z_4 = 0, M_{IV}(z) = -40 \text{ кНм,}$$

$$\text{при } z_4 = e, M_{IV}(z) = 86 \cdot 3 - 40 = 218 \text{ кНм.}$$

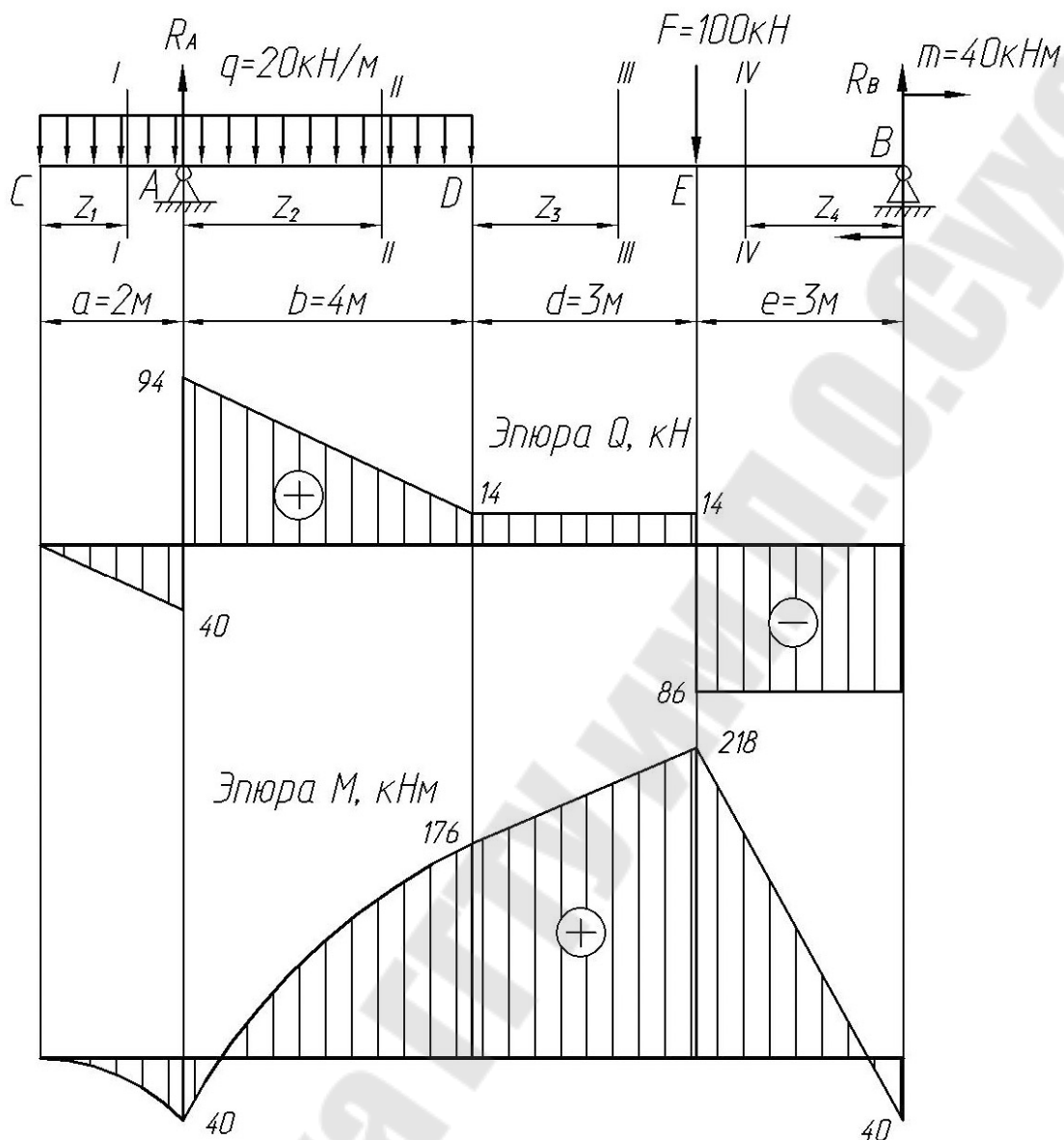


Рис. 29. Балка и эюры поперечных сил и изгибающих моментов

2. Определяем геометрические характеристики сечения (рис.30).

Воспользуемся методикой, изложенной в разделе 5.

Данное сечение симметрично относительно только одной оси Y .

Расположение центра тяжести неизвестно.

Разбиваем сечение на простые фигуры:

прямоугольник №1 с площадью $A_1 = 7c \cdot 6c = 42c^2$;

прямоугольник №2 с площадью $A_2 = 2c \cdot 9c = 18c^2$;

прямоугольник №3 (квадрат) с площадью $A_3 = 3c \cdot 3c = 9c^2$.

Для определения центра тяжести выбираем рационально вспомогательную систему осей X, Y . Причем ось Y будет совпадать с

осью симметрии. Тогда с учетом координат центров тяжести простых фигур

$$y_1 = 3,5c; y_2 = 8c; y_3 = 1,5c.$$

$$x_c = 0.$$

$$y_c = \frac{S_X}{A} = \frac{S_{X1} + S_{X2} - S_{X3}}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 - A_3 y_3}{A_1 + A_2 - A_3} =$$

$$= \frac{42c^2 \cdot 3,5c + 18c^2 \cdot 8c - 9c^2 \cdot 1,5c}{42c^2 + 18c^2 - 9c^2} = 5,44c.$$

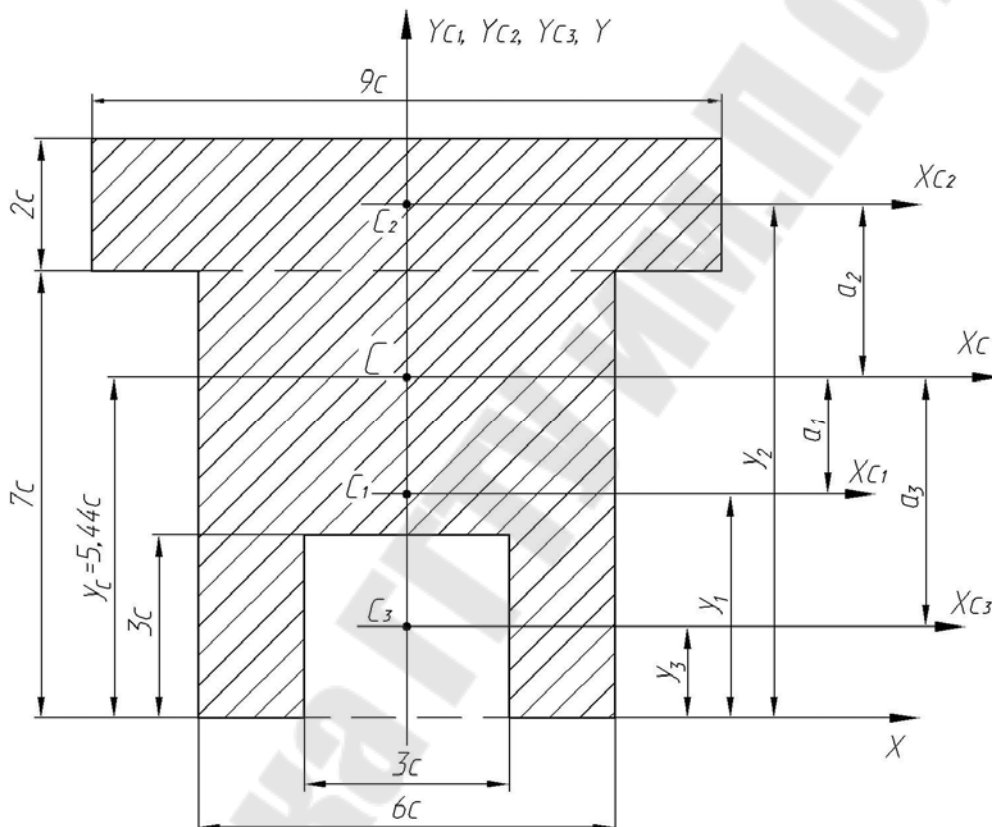


Рис. 30. Поперечное сечение балки

Вычисляем осевые моменты инерции фигуры относительно центральных осей. Для определения моментов инерции необходимо вычислить величины a_i и b_i :

$$a_1 = -(y_c - y_1) = -(5,44c - 3,5c) = -1,94c;$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 8c - 5,44c = 2,56c;$$

$$a_3 = -(y_c - y_3) = -(5,44c - 1,5c) = -3,94c;$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0, \text{ т.к. оси } Y_i \text{ совпадают.}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 I_{Xc} &= I_{Xc}^1 + I_{Xc}^2 - I_{Xc}^3 = (I_{X_1} + A_1 a_1^2) + (I_{X_2} + A_2 a_2^2) - (I_{X_3} + A_3 a_3^2) = \\
 &= \left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + A_1 a_1^2\right) + \left(\frac{b_2 h_2^3}{12} + A_2 a_2^2\right) - \left(\frac{b_3 h_3^3}{12} + A_3 a_3^2\right) = \\
 &= \left(\frac{6c(7c)^3}{12} + 42c^2(-1,94c)^2\right) + \left(\frac{9c(2c)^3}{12} + 18c^2(2,56c)^2\right) - \\
 &\quad - \left(\frac{3c(3c)^3}{12} + 9c^2(-3,94c)^2\right) = 307c^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{Yc} &= I_{Yc}^1 + I_{Yc}^2 - I_{Yc}^3 = (I_{Y_1} + A_1 b_1^2) + (I_{Y_2} + A_2 b_2^2) - (I_{Y_3} + A_3 b_3^2) = \\
 &= \left(\frac{h_1 b_1^3}{12}\right) + \left(\frac{h_2 b_2^3}{12}\right) - \left(\frac{h_3 b_3^3}{12}\right) = \frac{7c(6c)^3}{12} + \frac{2c(9c)^3}{12} - \frac{3c(3c)^3}{12} = 240,75c^4.
 \end{aligned}$$

3. Расположим сечение рационально по отношению к наибольшему изгибающему моменту.

Это необходимо сделать, т.к. балка является несимметричной относительно оси, вокруг которой происходит изгиб, т.е. оси X_C – нейтральной линии сечения. Расстояние от оси X_C до наиболее удаленных волокон в области растяжения и сжатия различно. К тому же необходимо учитывать как материал сопротивляется растяжению и сжатию.

В данном случае имеем материал с различными допускаемыми напряжениями на растяжение и сжатие. Сечение нужно расположить так, чтобы наиболее удаленные от нейтральной линии волокна располагались в области сжатия. Из эпюры изгибающих моментов видно, что максимальный изгибающий момент наблюдается в сечении E : $M_{\max} = 218$ кНм. Причем происходит сжатие верхних волокон балки.

Таким образом, можно сказать, что сечение расположено нерационально, наиболее удаленные от нейтральной линии волокна находятся снизу. Переворачиваем сечение (рис. 31).

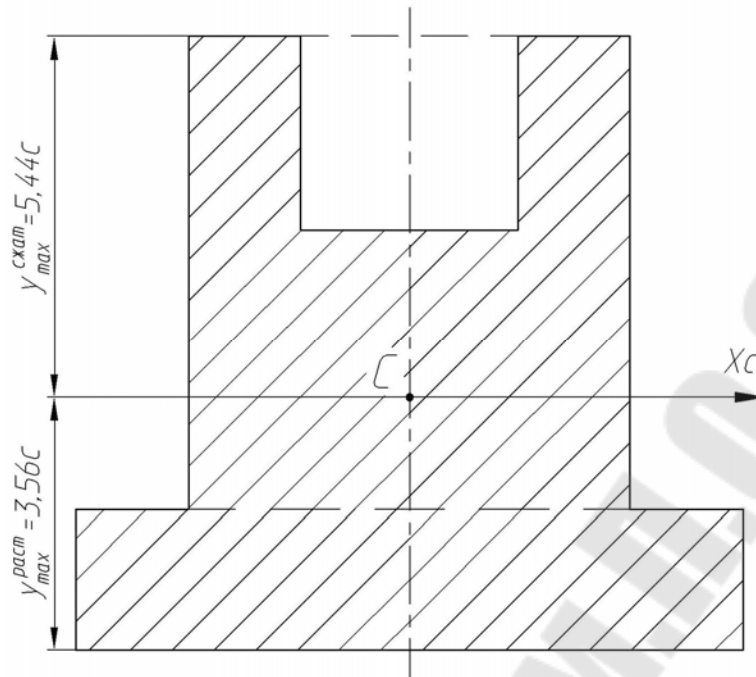


Рис. 31. Окончательное положение поперечного сечения балки

4. Определяем параметр сечения из условия прочности

$$\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \frac{M_{\max}}{I_{Xc}} \cdot y_{\max}^{\text{раст}} \leq [\sigma]_{\text{раст}} = 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{\text{сжат}} = \frac{M_{\max}}{I_{Xc}} \cdot y_{\max}^{\text{сжат}} \leq [\sigma]_{\text{сжат}} = 400 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \frac{218 \cdot 10^3}{307c^4} \cdot 3,56c \leq 100 \cdot 10^6 \Rightarrow c_{\text{раст}} \geq \sqrt[3]{\frac{218 \cdot 3,56}{307 \cdot 100 \cdot 10^3}} = 0,0293 \text{ м};$$

$$\sigma_{\max}^{\text{сжат}} = \frac{218 \cdot 10^3}{307c^4} \cdot 5,44c \leq 400 \cdot 10^6 \Rightarrow c_{\text{сжат}} \geq \sqrt[3]{\frac{218 \cdot 5,44}{307 \cdot 400 \cdot 10^3}} = 0,0213 \text{ м}.$$

Таким образом, принимаем наибольшее значение параметра сечения, соответствующее условию прочности по растяжению $c = c_{\text{раст}} = 0,03 \text{ м} = 30 \text{ мм}$ (с учетом ГОСТ).

5. Определяем нормальные и касательные напряжения.

Нормальные напряжения при изгибе изменяются по линейному закону и принимают максимальные значения в наиболее удаленных от нейтральной линии точках.

Тогда

$$\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \frac{M_{\max}}{I_{Xc}} \cdot y_{\max}^{\text{раст}} = \frac{218 \cdot 10^3}{307 \cdot (0,03)^4} \cdot 3,56 \cdot (0,03) = 93,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{сжат} = \frac{M_{\max}}{I_{Xc}} \cdot y_{\max}^{сжат} = \frac{218 \cdot 10^3}{307 \cdot (0,03)^4} \cdot 5,44 \cdot (0,03) = 143 \text{ МПа.}$$

Примечание. Если в формулу подставить точное значение параметра $c=29,3$ мм, то $\sigma_{\max}^{раст} = [\sigma]_{раст} = 100$ МПа.

Эпюра нормальных напряжений построена на рисунке 32.

Касательные напряжения определяем по формуле Журавского для нескольких характерных уровней (точек): 1, 2, 2', 3, 3', 4, 5.

$$\tau_1 = \frac{QS_1^{OCT}}{b_1 I_{Xc}}.$$

Здесь Q представляет собой поперечную силу, возникающую в сечении с наибольшим изгибающим моментом, т.е. в сечении E : $Q = 86$ кН. Статический момент инерции в точке 1 равен $S_1^{OCT} = 0$, тогда $\tau_1 = 0$. Тоже можно сказать и про точку 4 – $\tau_4 = 0$, т.к. $S_4^{OCT} = 0$.

Рассмотрим точки 2 и 2'. В этих точках статические моменты инерции равны между собой $S_2^{OCT} = S_{2'}^{OCT}$, однако ширина сечения будет неодинаковой:

$$b_2 = 9c = 9 \cdot 0,03 = 0,27 \text{ м}; \quad b_{2'} = 6c = 6 \cdot 0,03 = 0,18 \text{ м.}$$

Определим статические моменты инерции в точках 2 и 2'. Для этого нужно рассмотреть часть сечения, расположенную выше или ниже данных точек. Очевидно (см. рис. 32) проще рассмотреть нижнюю часть сечения

$$S_2^{OCT} = S_{2'}^{OCT} = A_1 d_1 = 9c \cdot 2c \cdot (3,56c - c) = 46,08c^3;$$

$$\tau_2 = \frac{QS_2^{OCT}}{b_2 I_{Xc}} = \frac{86 \cdot 10^3 \cdot 46,08 \cdot (0,03)^3}{0,27 \cdot 307 \cdot (0,03)^4} = 1,59 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,59 \text{ МПа};$$

$$\tau_{2'} = \frac{QS_{2'}^{OCT}}{b_{2'} I_{Xc}} = \frac{86 \cdot 10^3 \cdot 46,08 \cdot (0,03)^3}{0,18 \cdot 307 \cdot (0,03)^4} = 2,39 \text{ МПа.}$$

В точках 3 и 3' статические моменты инерции также равны $S_3^{OCT} = S_{3'}^{OCT}$, а ширина сечения разная:

$$b_3 = 6c = 6 \cdot 0,03 = 0,18 \text{ м}; \quad b_{3'} = 6c - 3c = 3c = 3 \cdot 0,03 = 0,09 \text{ м.}$$

Рассмотрим верхнюю часть сечения. При этом ее можно представить либо как разность двух прямоугольников, либо как сумму. Например, рассмотрим сумму:

$$S_3^{OCT} = S_{3'}^{OCT} = A_2 d_2 + A_3 d_3 = 1,5c \cdot 3c \cdot (5,44c - 1,5c) + 1,5c \cdot 3c \cdot (5,44c - 1,5c) = 35,46c^3;$$

$$\tau_3 = \frac{QS_3^{OCT}}{b_3 I_{Xc}} = \frac{86 \cdot 10^3 \cdot 35,46 \cdot (0,03)^3}{0,18 \cdot 307 \cdot (0,03)^4} = 1,84 \text{ МПа};$$

$$\tau_{3'} = \frac{QS_{3'}^{OCT}}{b_{3'} I_{Xc}} = \frac{86 \cdot 10^3 \cdot 35,46 \cdot (0,03)^3}{0,09 \cdot 307 \cdot (0,03)^4} = 3,68 \text{ МПа}.$$

Рассмотрим точку 5. Здесь ширина сечения равна $b_5 = 6c = 0,18\text{ м}$. Статический момент инерции должен принимать наибольшее значение. Так при рассмотрении нижней части запишем

$$S_5^{OCT} = A_1 d_1 + A_4 d_4 = 46,08c^3 + 6c \cdot (3,56c - 2c) \cdot \frac{(3,56c - 2c)}{2} = 53,38c^3;$$

$$\tau_5 = \frac{QS_5^{OCT}}{b_5 I_{Xc}} = \frac{86 \cdot 10^3 \cdot 53,38 \cdot (0,03)^3}{0,18 \cdot 307 \cdot (0,03)^4} = 2,77 \text{ МПа}.$$

Эпюра касательных напряжений изображена на рис. 32.

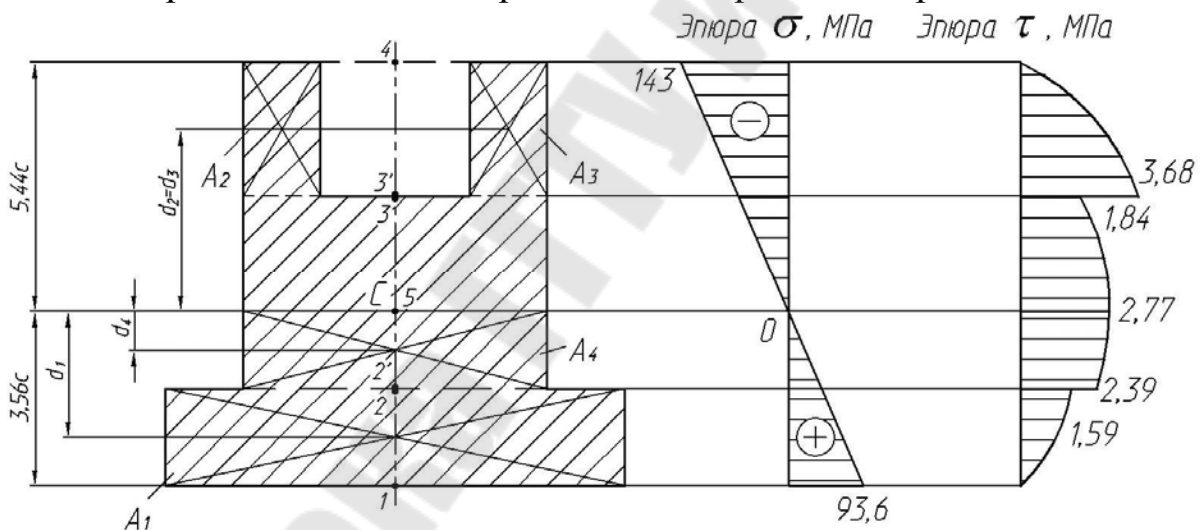


Рис. 32. Расчетное сечение и эпюры нормальных и касательных напряжений

7. КОСОЙ (НЕПЛОСКИЙ) ИЗГИБ

При косом изгибе происходит изгиб балки в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Условие прочности по нормальным напряжениям будет иметь вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma] \text{ или } \sigma_{\max} = \frac{M_X}{I_X} y_{\max} + \frac{M_Y}{I_Y} x_{\max} \leq [\sigma].$$

Примечание. При косом изгибе не всегда изгибающие моменты M_X , M_Y в одном том же сечении имеют максимальное значение.

Задача № 16

Для стальной балки (рис. 33), нагруженной в главных плоскостях инерции XOZ и YOZ , подобрать размеры поперечного сечения (рис.34), приняв $[\sigma] = 160$ МПа. Построить пространственную эпюру нормальных напряжений в опасном сечении и указать положение нейтральной линии сечения.

Исходные данные: $l = 4$ м; $F_1 = 5$ кН; $F_2 = 6$ кН; $m = 4$ кНм.

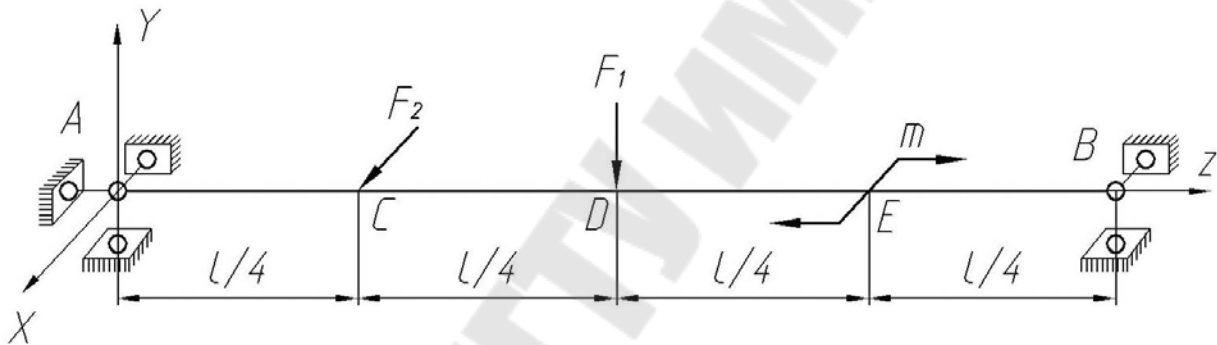


Рис. 33. Расчетная схема балки

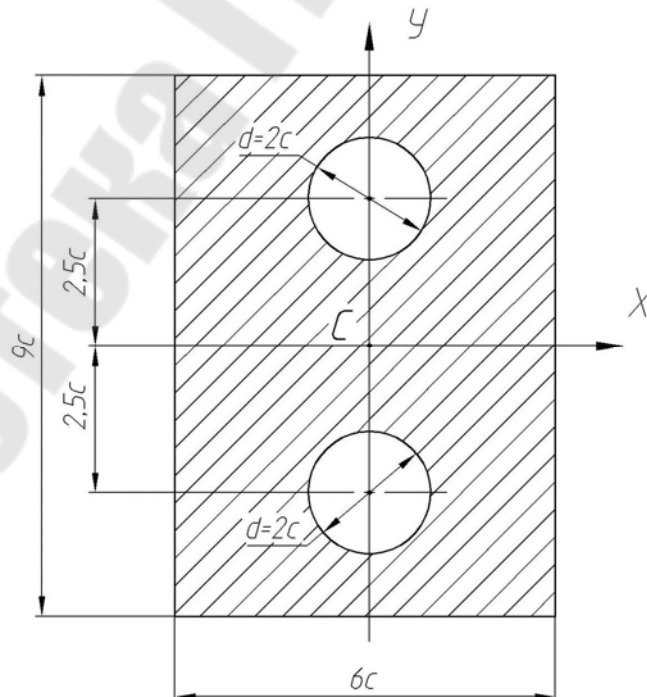


Рис. 34. Поперечное сечение балки

Решение.

1. Строим эпюры изгибающих моментов в двух плоскостях.
Рассматриваем вертикальную плоскость.

В вертикальной плоскости приложена одна сила F_1 симметрично относительно опор. Опорные реакции будут равны между собой и равны

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{F_1}{2} = 2,5 \text{ кН.}$$

Тогда моменты в сечениях

$$\begin{aligned} M_{AX} &= R_{AY} \cdot 0 = 0; \\ M_{CX} &= +R_{AY}l/4 = 2,5 \cdot 4/4 = 2,5 \text{ кНм}; \\ M_{DX} &= +R_{AY}l/2 = 2,5 \cdot 4/2 = 5 \text{ кНм}; \\ M_{EX} &= +R_{BY}l/4 = 2,5 \cdot 4/4 = 2,5 \text{ кНм}; \\ M_{BX} &= R_{BY} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости.

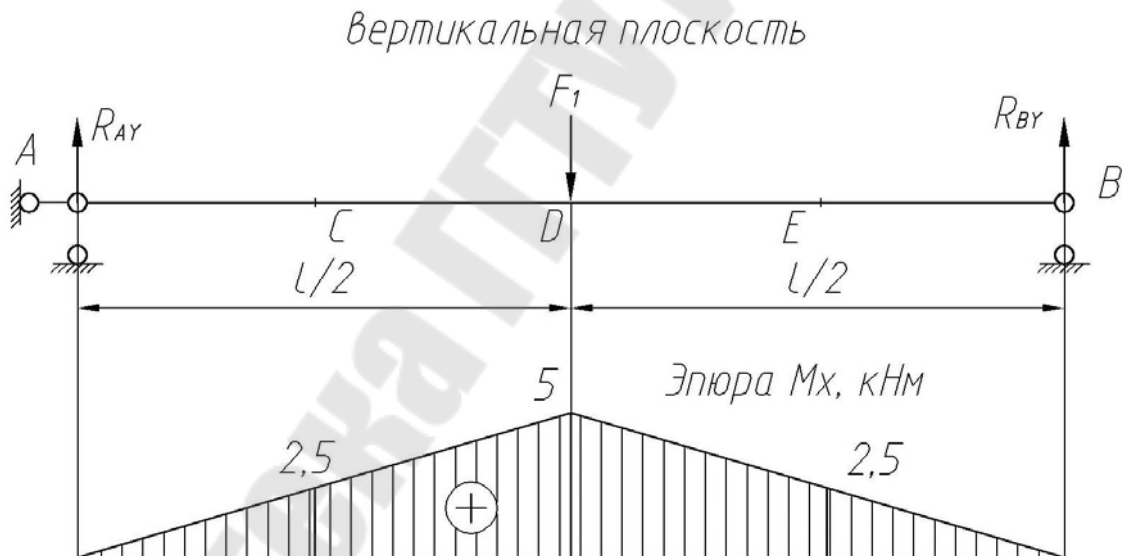


Рис. 35. Схема балки в вертикальной плоскости и эпюра моментов

Рассматриваем горизонтальную плоскость.

В горизонтальной плоскости к балке приложены сила F_2 в сечении C и сосредоточенный момент m в сечении D . Необходимо определить опорные реакции.

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad F_2l/4 + m - R_{BX}l &= 0; \\ R_{BX} &= \frac{F_2l/4 + m}{l} = \frac{6 \cdot 4/4 + 4}{4} = 2,5 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$\sum M_B = 0; F_2 \cdot 3l/4 - m - R_{AX}l = 0;$$

$$R_{AX} = \frac{F_2 \cdot 3l/4 - m}{l} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 4/4 - 4}{4} = 3,5 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum F_{Yi} = 0; R_{AX} + R_{BX} - F_2 = 0;$$

$$3,5 + 2,5 - 6 = 0.$$

Проверка выполнена. Реакции направлены и определены верно.

Определяем изгибающие моменты в сечениях и строим эпюру в горизонтальной плоскости:

$$M_{AY} = R_{AX} \cdot 0 = 0;$$

$$M_{CY} = +R_{AX}l/4 = 3,5 \cdot 4/4 = 3,5 \text{ кНм};$$

$$M_{DY} = +R_{AX}l/2 - F_2l/4 = 3,5 \cdot 4/2 - 6 \cdot 4/4 = 1 \text{ кНм};$$

$$M'_{EY} = +R_{AX}3l/4 - F_2/2 = 3,5 \cdot 3 \cdot 4/4 - 6 \cdot 4/2 = 10,5 - 12 = -1,5 \text{ кНм};$$

$$M''_{EY} = +R_{BX}l/4 = 2,5 \cdot 4/4 = 2,5 \text{ кНм};$$

$$M_{BY} = R_{BX} \cdot 0 = 0.$$

горизонтальная плоскость

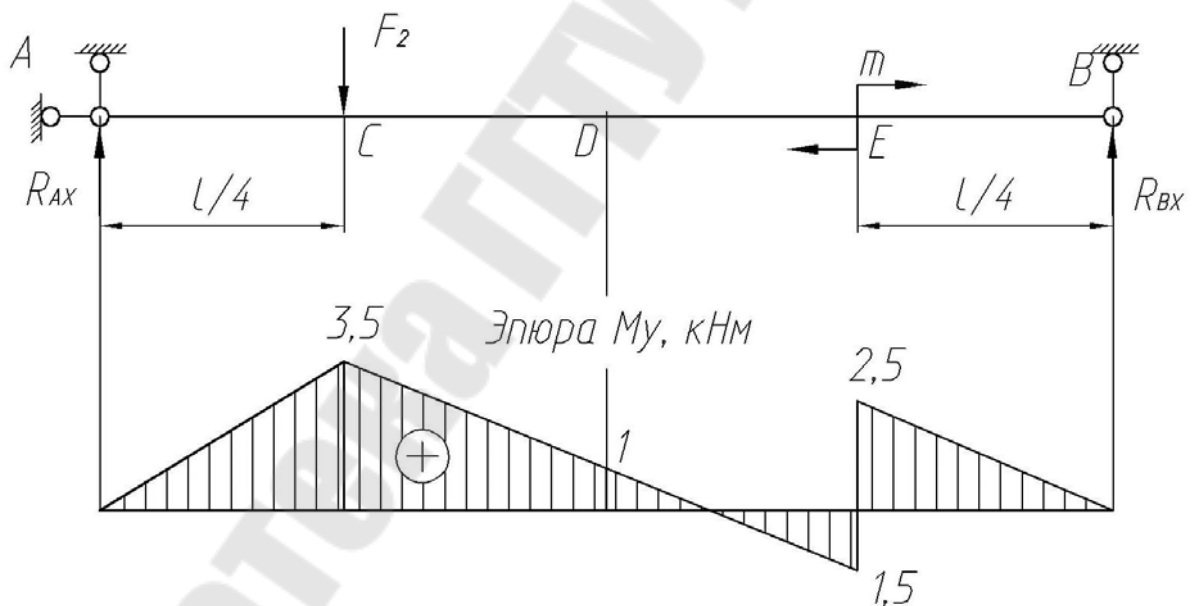


Рис. 36. Схема балки в горизонтальной плоскости и эпюра моментов

Для наглядности расположим эпюры на одной базе (рис. 37).

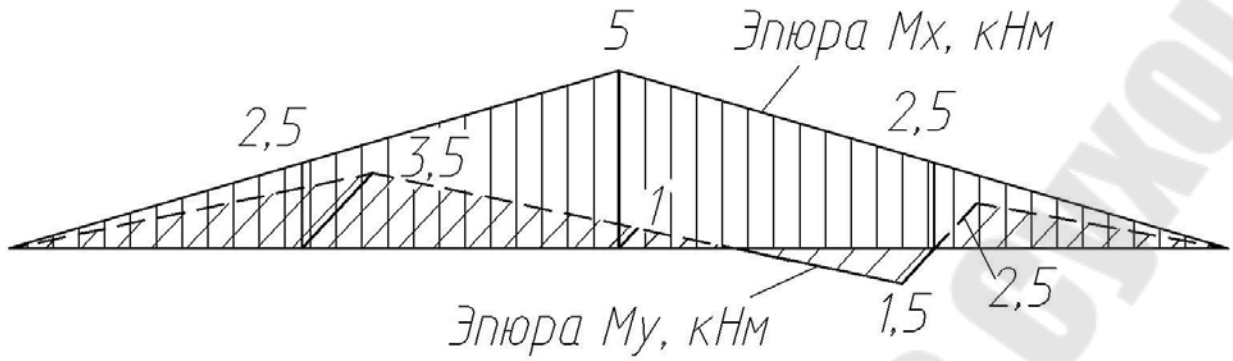


Рис. 37. Эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях

2. Определяем геометрические характеристики поперечного сечения (рис. 38).

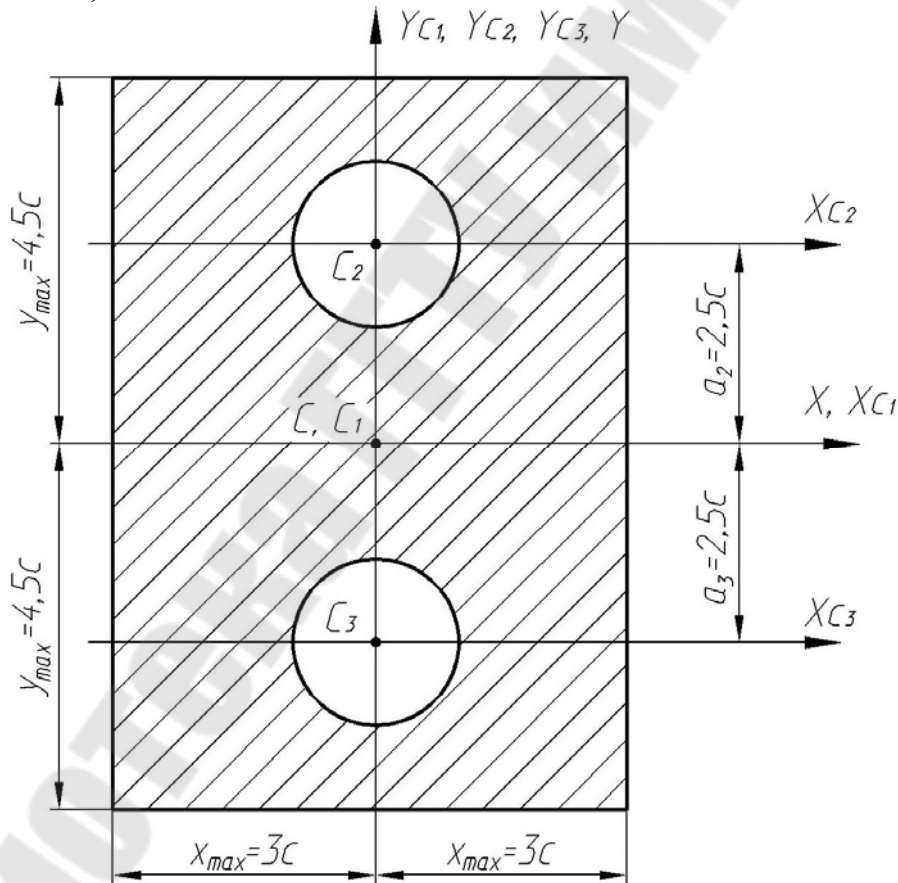


Рис. 38. Расчетное сечение балки

Сечение разбиваем на простые фигуры:
 прямоугольник с площадью $A_1 = 6c \cdot 9c = 54c^2$;

$$\text{два отверстия} - A_2 = A_3 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(2c)^2}{4} = 3,14c^2.$$

Сечение имеет две оси симметрии (X, Y), следовательно, центр тяжести сечения будет находиться на пересечении этих осей, а сами оси будут являться главными центральными осями инерции сечения.

Определим расстояния между осями

$$a_1 = 0; a_2 = 2,5c; a_3 = 2,5c;$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0 \text{ (все оси } Y_i \text{ совпадают).}$$

Тогда осевые моменты инерции будут определяться выражениями

$$I_X = I_X^I - I_X^{II} - I_X^{III} = (I_{Xc_1} + A_1 a_1^2) - (I_{Xc_2} + A_2 a_2^2) - (I_{Xc_3} + A_3 a_3^2) =$$

$$= \left(\frac{b \cdot h^3}{12} + A_1 \cdot 0\right) - \left(\frac{\pi d^4}{64} + A_2 a_2^2\right) - \left(\frac{\pi d^4}{64} + A_3 a_3^2\right) = \frac{6c \cdot (9c)^3}{12} -$$

$$- \left(\frac{\pi(2c)^4}{64} + 3,14c^2 \cdot (2,5c)^2\right) - \left(\frac{\pi(2c)^4}{64} + 3,14c^2 \cdot (2,5c)^2\right) =$$

$$= 364,5c^4 - 20,41c^4 - 20,41c^4 = 323,7c^4;$$

$$I_Y = I_Y^I - I_Y^{II} - I_Y^{III} = (I_{Yc_1} + A_1 b_1^2) - (I_{Yc_2} + A_2 b_2^2) - (I_{Yc_3} + A_3 b_3^2) =$$

$$= \left(\frac{h \cdot b^3}{12} + A_1 \cdot 0\right) - \left(\frac{\pi d^4}{64} + A_2 b_2^2\right) - \left(\frac{\pi d^4}{64} + A_3 b_3^2\right) = \frac{9c \cdot (6c)^3}{12} -$$

$$- \left(\frac{\pi(2c)^4}{64} + 3,14c^2 \cdot (0)^2\right) - \left(\frac{\pi(2c)^4}{64} + 3,14c^2 \cdot (0)^2\right) =$$

$$= 162c^4 - 0,785c^4 - 0,785c^4 = 160,4c^4.$$

Определим осевые моменты сопротивления

$$W_X = \frac{I_X}{y_{\max}} = \frac{323,7c^4}{4,5c} = 71,93c^3; W_Y = \frac{I_Y}{x_{\max}} = \frac{160,4c^4}{3c} = 53,47c^3.$$

3. Определяем размеры сечения из условия прочности.

В случае косоугольного изгиба при нахождении опасного сечения необходимо учитывать обе эпюры изгибающих моментов. Анализ эпюр в данной задаче позволяет сделать вывод, здесь имеем как минимум два, так называемых, равноопасных сечения:

сечение C : $M_X = 2,5$ кНм; $M_Y = 3,5$ кНм;

сечение D : $M_X = 5$ кНм; $M_Y = 1$ кНм.

Суммарные моменты в этих сечениях равны между собой, однако моменты инерции в разных плоскостях, а, следовательно, и жесткости балки неодинаковы. Поэтому необходимо определить два па-

раметра сечения “ c ” исследуя оба опасных сечения, а затем из двух полученных значений выбрать наибольшее.

Условие прочности при косом (неплоском) изгибе имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma].$$

Для сечения C имеем:

$$\sigma_{\max}^C = \frac{2,5 \cdot 10^3}{71,93 \cdot c^3} + \frac{3,5 \cdot 10^3}{53,47 \cdot c^3} \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\max}^C = \frac{2,5 \cdot 53,47 + 3,5 \cdot 71,93 \cdot 10^3}{71,93 \cdot 53,47 \cdot c^3} \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$c \geq \sqrt[3]{\frac{(2,5 \cdot 53,47 + 3,5 \cdot 71,93) \cdot 10^3}{71,93 \cdot 53,47 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,00855 \text{ м} = 8,55 \text{ мм.}$$

Для сечения D имеем:

$$\sigma_{\max}^D = \frac{5 \cdot 10^3}{71,93 \cdot c^3} + \frac{1 \cdot 10^3}{53,47 \cdot c^3} \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\max}^D = \frac{5 \cdot 53,47 + 1 \cdot 71,93 \cdot 10^3}{71,93 \cdot 53,47 \cdot c^3} \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$c \geq \sqrt[3]{\frac{(5 \cdot 53,47 + 1 \cdot 71,93) \cdot 10^3}{71,93 \cdot 53,47 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0082 \text{ м} = 8,2 \text{ мм.}$$

Окончательно принимаем большее значение параметра “ c ”, т.е. 8,55 мм. С учетом ГОСТа запишем $c = 9$ мм.

Таким образом, получили опасное сечение в точке C .

5. Строим пространственную эпюру нормальных напряжений для опасного сечения балки, т.е. сечения C . Для этого необходимо установить, какие волокна и отдельные узловые точки испытывают сжатие, а какие растяжение.

Напряжения в узловых точках можно определить по формуле

$$\sigma_i = \frac{M_X}{I_X} y_i + \frac{M_Y}{I_Y} x_i,$$

где M_X, M_Y – величины изгибающих моментов в предполагаемом опасном сечении балки, знаки которых определяются по характеру деформации балки в рассматриваемой точке (см. рис. 39), имея ввиду, что при растяжении принимается знак плюс;

x_i, y_i – расстояния от центра тяжести до узловых точек сечения,

$$x_{1,2,3,4} = x_{\max} = 3c, \quad y_{1,2,3,4} = y_{\max} = 4,5c.$$

Рассмотрим рисунок 39, представляющий собой разрез балки в исследуемом сечении C с привязкой к системе координатных осей X, Y, Z . В поперечном сечении действуют два изгибающих момента: M_X – в вертикальной плоскости; M_Y – в горизонтальной.

Из эпюр изгибающих моментов, которые строятся на сжатых волокнах балки видно, что момент M_X сжимает верхнюю часть сечения, а нижнюю растягивает. Момент M_Y сжимает левую (дальнюю) часть сечения, а правую (ближнюю) растягивает. В данном случае отчетливо выделяются две узловые точки, в которых будут возникать суммарные напряжения, но с разными знаками – в точке 2 – сжатие; в точке 4 – растяжение.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & -\frac{M_X}{I_X} y_1 + \frac{M_X}{I_X} x_1 = -\frac{2,5 \cdot 10^3}{323,7 \cdot (0,009)^4} \cdot 4,5 \cdot 0,009 + \\ & + \frac{3,5 \cdot 10^3}{160,4 \cdot (0,009)^4} \cdot 3 \cdot 0,009 = -47,7 \cdot 10^6 + 89,8 \cdot 10^6 = 42,1 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & -\frac{M_X}{I_X} y_2 - \frac{M_X}{I_X} x_2 = -\frac{2,5 \cdot 10^3}{323,7 \cdot (0,009)^4} \cdot 4,5 \cdot 0,009 - \\ & - \frac{3,5 \cdot 10^3}{160,4 \cdot (0,009)^4} \cdot 3 \cdot 0,009 = -47,7 \cdot 10^6 - 89,8 \cdot 10^6 = -137,5 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 = & +\frac{M_X}{I_X} y_1 - \frac{M_X}{I_X} x_1 = +\frac{2,5 \cdot 10^3}{323,7 \cdot (0,009)^4} \cdot 4,5 \cdot 0,009 - \\ & - \frac{3,5 \cdot 10^3}{160,4 \cdot (0,009)^4} \cdot 3 \cdot 0,009 = +47,7 \cdot 10^6 - 89,8 \cdot 10^6 = -42,1 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_4 = & +\frac{M_X}{I_X} y_4 + \frac{M_X}{I_X} x_4 = +\frac{2,5 \cdot 10^3}{323,7 \cdot (0,009)^4} \cdot 4,5 \cdot 0,009 + \\ & + \frac{3,5 \cdot 10^3}{160,4 \cdot (0,009)^4} \cdot 3 \cdot 0,009 = +47,7 \cdot 10^6 + 89,8 \cdot 10^6 = 137,5 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Пространственная эпюра нормальных напряжений построена на рис. 39.

Нейтральная линия характеризует совокупность точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю. При действии только изгиба она обязательно проходит через центр тяжести сечения.

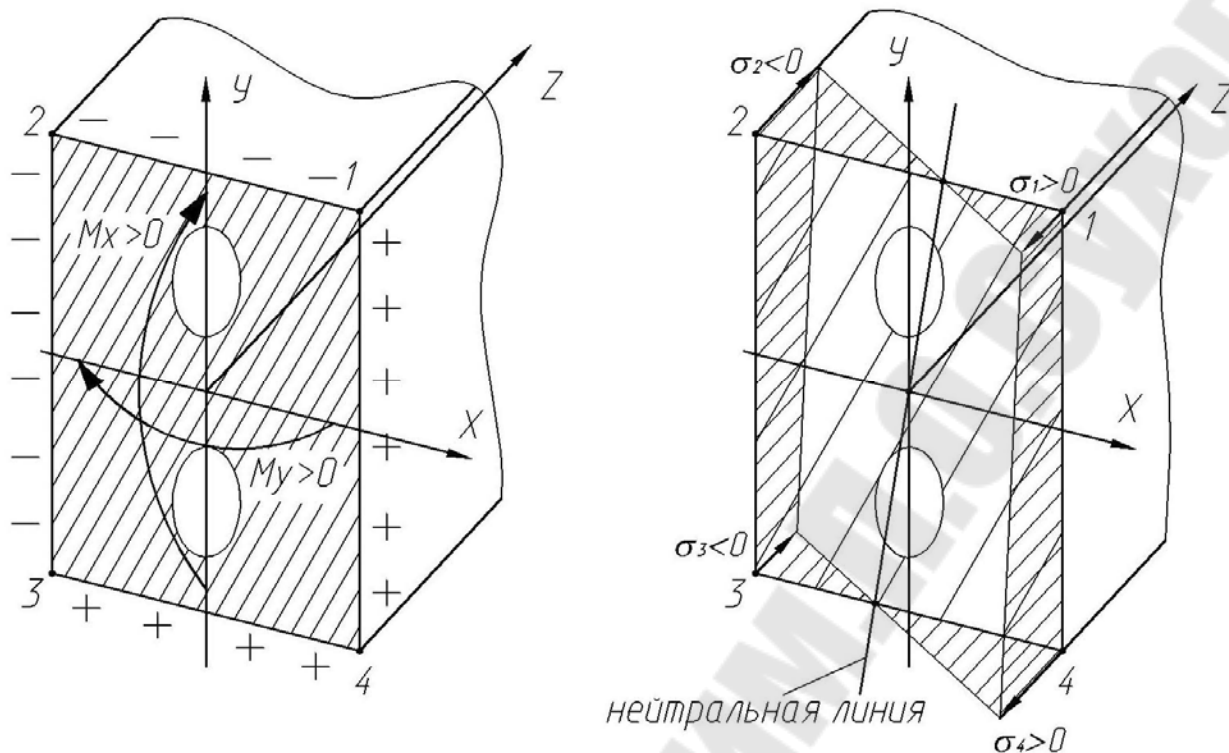


Рис. 39. Разрез балки и пространственная эпюра напряжений

8. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

При совместном действии изгиба и кручения условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_X} \leq [\sigma],$$

где $M_{\text{прив}}$ – приведенный момент, определяемый в зависимости от используемой гипотезы предельного состояния;

$M_{\text{прив}}^{\text{III}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_K^2}$ – по гипотезе наибольших касательных напряжений;

$M_{\text{прив}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + 0,75M_K^2}$ – по энергетической гипотезе.

Задача № 17

На валу (рис. 40) закреплены два зубчатых колеса с радиусами делительных окружностей r_1 и $r_2 = 0,75r_1$. Привод вала осуществляется через первое колесо.

На каждом зубчатом колесе усилие в зацеплении раскладывается на составляющие: F_{ti} – окружное усилие; F_{ri} – радиальное усилие; F_{ai} – осевое усилие.

Требуется определить диаметр вала, используя энергетическую гипотезу предельного состояния, приняв допускаемое напряжение для материала вала $[\sigma] = 100$ МПа, $F_{t1} = 5000$ Н; $F_{ri} = 0,4F_{ti}$ и $F_{ai} = 0,6F_{ti}$.

Исходные данные: $a = 110$ мм; $b = 150$ мм; $c = 140$ мм; $r_1 = 100$ мм.

Решение.

1. Из условия равновесия вала (уравнение крутящих моментов) необходимо определить окружное усилие на втором колесе F_{t2} :

$$\sum m_{Ki} = 0; F_{t1}r_1 - F_{t2}r_2 = 0;$$

$$F_{t2} = \frac{F_{t1}r_1}{r_2} = \frac{5000 \cdot 0,1}{0,75 \cdot 0,1} = 6667 \text{ Н.}$$

2. Приводим нагрузку к оси вала. Для первого зубчатого колеса запишем:

$$F_{r1} = 0,4F_{t1} = 0,4 \cdot 5000 = 2000 \text{ Н;}$$

$$F_{a1} = 0,6F_{t1} = 0,6 \cdot 5000 = 3000 \text{ Н;}$$

$$m_{a1} = F_{a1} \cdot r_1 = 3000 \cdot 0,1 = 300 \text{ Нм;}$$

$$m_{K1} = F_{t1} \cdot r_1 = 5000 \cdot 0,1 = 500 \text{ Нм.}$$

В данном случае осевая сила при переносе к оси вала будет создавать изгибающий момент m_{a1} .

Для второго:

$$F_{r2} = 0,4F_{t2} = 0,4 \cdot 6667 = 2667 \text{ Н;}$$

$$m_{K2} = F_{t2} \cdot r_2 = 6667 \cdot 0,75 \cdot 0,1 = 500 \text{ Нм.}$$

3. Строим эпюры изгибающих моментов в двух плоскостях.

Рассматриваем вертикальную плоскость.

Определим опорные реакции:

$$\sum M_{Ai} = 0; m_{a1} + F_{r1} \cdot a - F_{r2}(a + b) + R_{BY}(a + b + c) = 0;$$

$$R_{BY} = \frac{F_{r2}(a + b) - m_{a1} - F_{r1} \cdot a}{a + b + c} = \frac{2667 \cdot 0,26 - 300 - 2000 \cdot 0,11}{0,11 + 0,15 + 0,14} = 433,5 \text{ Н.}$$

$$\sum M_{Bi} = 0; m_{a1} + F_{r2} \cdot c - F_{r1}(c + b) - R_{AY}(a + b + c) = 0;$$

$$R_{AY} = \frac{m_{a1} + F_{r2} \cdot c - F_{r1}(c + b)}{a + b + c} = \frac{300 + 2667 \cdot 0,14 - 2000 \cdot 0,29}{0,11 + 0,15 + 0,14} = 233,5 \text{ Н.}$$

Моменты в сечениях с учетом правила знаков равны:

$$M_{AX} = -R_{AY} \cdot 0 = 0;$$

$$M_{CX}^{слева} = -R_{AY}a = -233,5 \cdot 0,11 = -25,7 \text{ Нм};$$

$$M_{BX} = R_{BY} \cdot 0 = 0;$$

$$M_{EX} = +R_{BY}c = -433,5 \cdot 0,14 = -60,7 \text{ Нм};$$

$$M_{CX}^{справа} = -R_{BY}(b+c) + F_{r2}b = -433,5 \cdot 0,29 + 2667 \cdot 0,15 = 274,3 \text{ Нм}.$$

Строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости.

Рассматриваем горизонтальную плоскость.

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_{Ai} = 0; -F_{t1} \cdot a - F_{t2}(a+b) + R_{BX}(a+b+c) = 0;$$

$$R_{BY} = \frac{F_{t2}(a+b) + F_{t1} \cdot a}{a+b+c} = \frac{6667 \cdot 0,26 + 5000 \cdot 0,11}{0,11 + 0,15 + 0,14} = 5708,5 \text{ Н}.$$

$$\sum M_{Bi} = 0; -F_{t2} \cdot c - F_{t1}(c+b) + R_{AY}(a+b+c) = 0;$$

$$R_{AY} = \frac{F_{t2} \cdot c + F_{t1}(c+b)}{a+b+c} = \frac{6667 \cdot 0,14 + 5000 \cdot 0,29}{0,11 + 0,15 + 0,14} = 5958,5 \text{ Н}.$$

Определяем изгибающие моменты в сечениях и строим эпюру в горизонтальной плоскости:

$$M_{AY} = R_{AX} \cdot 0 = 0; \quad M_{BY} = R_{BX} \cdot 0 = 0;$$

$$M_{CY} = +R_{AX}a = 5958,5 \cdot 0,11 = 655 \text{ Нм};$$

$$M_{EY} = +R_{BX}c = +5708,5 \cdot 0,14 = 799 \text{ Нм}.$$

3. Определяем диаметр вала.

Используем энергетическую гипотезу предельного состояния. Рассмотрим два равноопасных сечения и определим максимальный приведенный момент. Для сечений *C* и *E* имеем:

$$M_{np}^C = \sqrt{M_{CX}^2 + M_{CY}^2 + 0,75M_K^2} = \sqrt{274,3^2 + 655^2 + 0,75 \cdot 500^2} = 832 \text{ Нм}.$$

$$M_{np}^E = \sqrt{M_{EX}^2 + M_{EY}^2 + 0,75M_K^2} = \sqrt{60,7^2 + 799^2 + 0,75 \cdot 500^2} = 910 \text{ Нм}.$$

Таким образом, максимальный приведенный момент соответствует сечению *E*, которое будет являться опасным.

Тогда с учетом условия прочности имеем для круглого сечения:

$$\sigma_{экр} = \frac{M_{прив}}{W_X} = \frac{32 \cdot M_{прив}}{\pi d^3} \leq [\sigma] = 100 \text{ МПа};$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{прив}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 910}{\pi \cdot 100 \cdot 10^6}} = 4,52 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 45,2 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем $d = 46 \text{ мм}$.

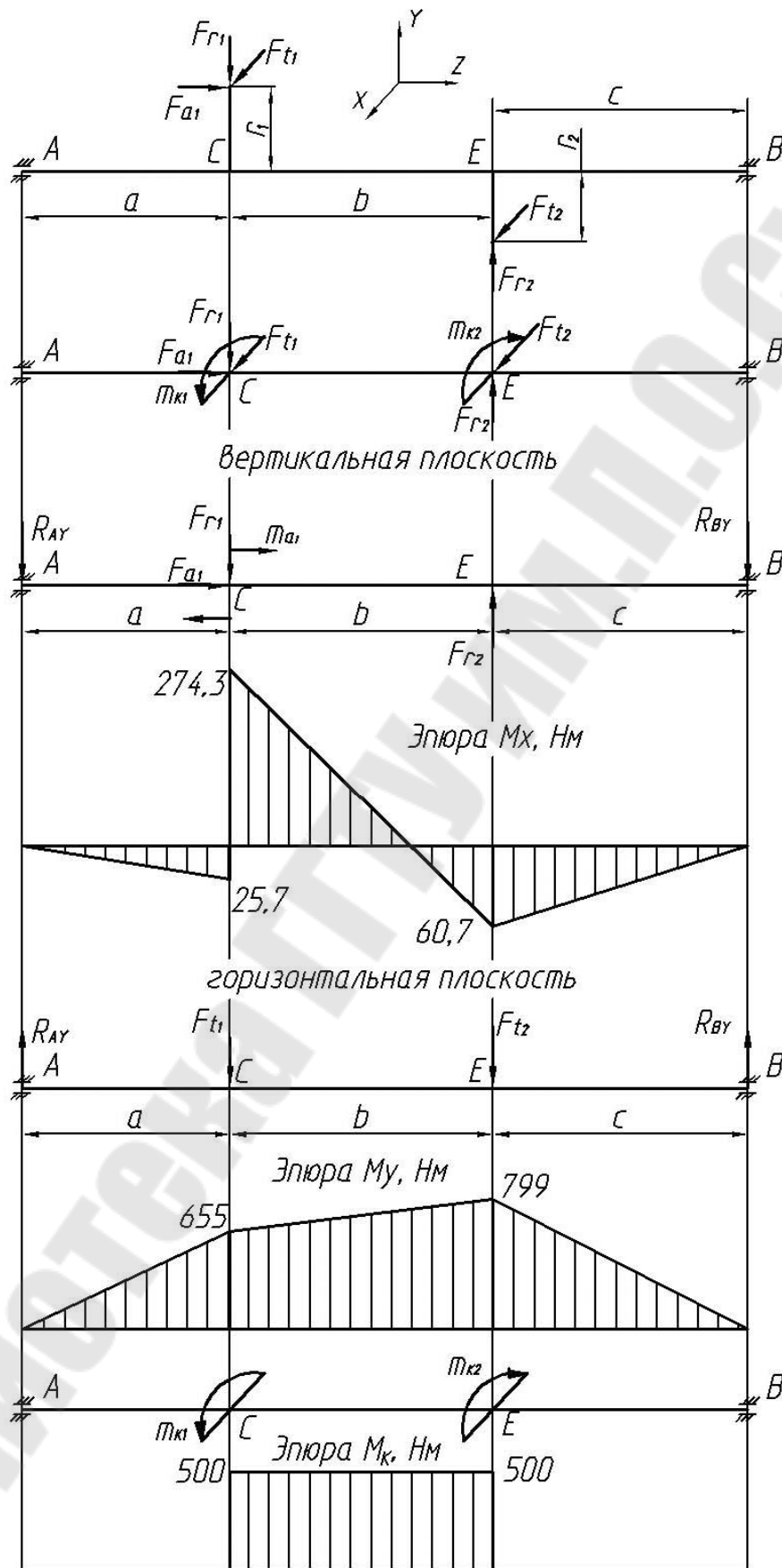


Рис. 40. Вал и эпюры изгибающих и крутящих моментов

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

При изгибе балки ее поперечные сечения, оставаясь плоскими, совершают перемещения двух типов: линейные и угловые. Угловые перемещения называют углом поворота сечения; линейные перемещения в направлении перпендикулярном продольной оси балки – прогибом; линейным перемещением вдоль продольной оси пренебрегают в силу его малости по сравнению с прогибом.

В пределах упругих деформаций прогибы и углы поворота величины малые.

Теоретически перемещения в балке могут определяться либо на основании дифференциального уравнения изогнутой оси балки, либо энергетическими методами. Энергетические методы (теорема Кастigliано, интеграл Мора, способ Верещагина) позволяют, сравнительно просто, определять перемещения нейтральной линии сечения.

Вычисляя перемещения δ в балках по интегралу Мора, обычно пренебрегают влиянием поперечной силы и учитывают влияние только изгибающего момента. Тогда интеграл Мора принимает вид:

$$\delta = \int_l \frac{M_F \bar{M} dz}{EI_X},$$

где $M_F = M_F(z)$ - уравнение изгибающего момента от заданной нагрузки;

$\bar{M} = \bar{M}(z)$ - уравнение изгибающего момента во вспомогательном (единичном) состоянии.

В случае нескольких участков нагружения, уравнения изгибающих моментов записывают для каждого участка (в заданном и вспомогательном состояниях), и, произведя интегрирования в пределах участков, результаты суммируют.

Вспомогательное состояние выбирают в зависимости от вида искомого перемещения. Если определяется линейное перемещение сечения (прогиб), то во вспомогательном состоянии к балке, освобожденной от заданной нагрузки, прикладывается, в интересующем нас сечении, единичная сосредоточенная сила ($\bar{F} = 1$); при определении угла поворота сечения – единичный момент ($\bar{M} = 1$).

Знак плюс в решении указывает, что перемещение происходит по направлению действия единичной нагрузки, минус - против.

Примечание. Важно помнить, что каждому искомому перемещению соответствует свое вспомогательное состояние.

Интеграл по длине от произведения двух функций $M_F(z)$ и $\bar{M}(z)$ (интеграл Мора) может быть заменен произведением графиков функций (эпюр) по правилу Верещагина, т.е.

$$\delta = \int_l \frac{M_F \bar{M} dz}{EI_X} = \sum_i \frac{\omega_i y_{ci}}{EI_X},$$

где ω_i - площадь эпюры на i -том участке одной из эпюр;

y_{ci} - ордината под центром тяжести эпюры площадью ω_i (берется из другой эпюры).

При умножении эпюр обязательно нужно учитывать знаки на соответствующих участках.

Когда площадь и положение центра тяжести эпюры на некотором участке определить затруднительно, используют формулы Корноухова-Симпсона или формулы перемножения трапеций (рис. 41):

$$\omega y_c = \frac{l}{6} (2a_1 a_2 + 2b_1 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1) - \text{для прямолинейных (рис. 41, а);}$$

$$\omega y_c = \frac{l}{6} (a_1 a_2 + b_1 b_2 + 4m_1 m_2) - \text{для параболической и прямолинейной (рис. 41, б),}$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 - ординаты эпюр;

m_1, m_2 - средние линии трапеций,

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \pm \frac{ql^2}{8}, \quad m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

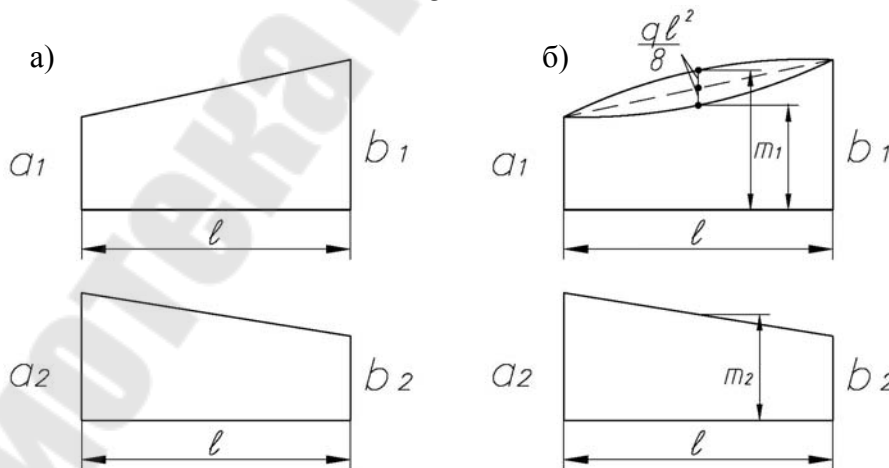


Рис. 41. Виды трапеций единичной и грузовой эпюр:
а) прямолинейные; б) параболическая и прямолинейная.

Примечание. Прямоугольный треугольник, прямоугольник, квадрат будут являться частными случаями трапеций, поэтому данные формулы являются общими.

Задача № 18

Для балки, изображенной на рисунке 42,а, определить прогиб сечения A , отстоящего на расстоянии b от левой опоры, используя интеграл Мора. $EI_x = const$.

Решение.

Задаемся вспомогательным, состоянием для определения прогиба сечения A (рис. 42,б). Записываем уравнения изгибающих моментов по участкам:

I участок, $0 \leq z_1 \leq b$

$$M_F = \frac{F(l-a)}{l} z_1; \quad \bar{M} = \frac{(l-b)}{l} z_1$$

II участок, $0 \leq z_2 \leq (a-b)$

$$M_F = \frac{F(l-a)}{l} (z_2 + b); \quad \bar{M} = \frac{(l-b)}{l} (z_2 + b) - z_2$$

III участок, $0 \leq z_3 \leq (l-a)$

$$M_F = \frac{Fa}{l} z_3; \quad \bar{M} = \frac{b}{l} z_3.$$

Тогда искомое перемещение

$$\delta_A = \frac{1}{EI_x} \left(\int_0^b \frac{F(l-a)}{l} z_1 \frac{l-b}{l} z_1 dz_1 + \int_0^{a-b} \frac{F(l-a)}{l} (z_2 + b) \left(\frac{l-b}{l} (z_2 + b) - z_2 \right) dz_2 + \int_0^{l-a} \frac{Fa}{l} z_3 \frac{b}{l} z_3 dz_3 \right)$$

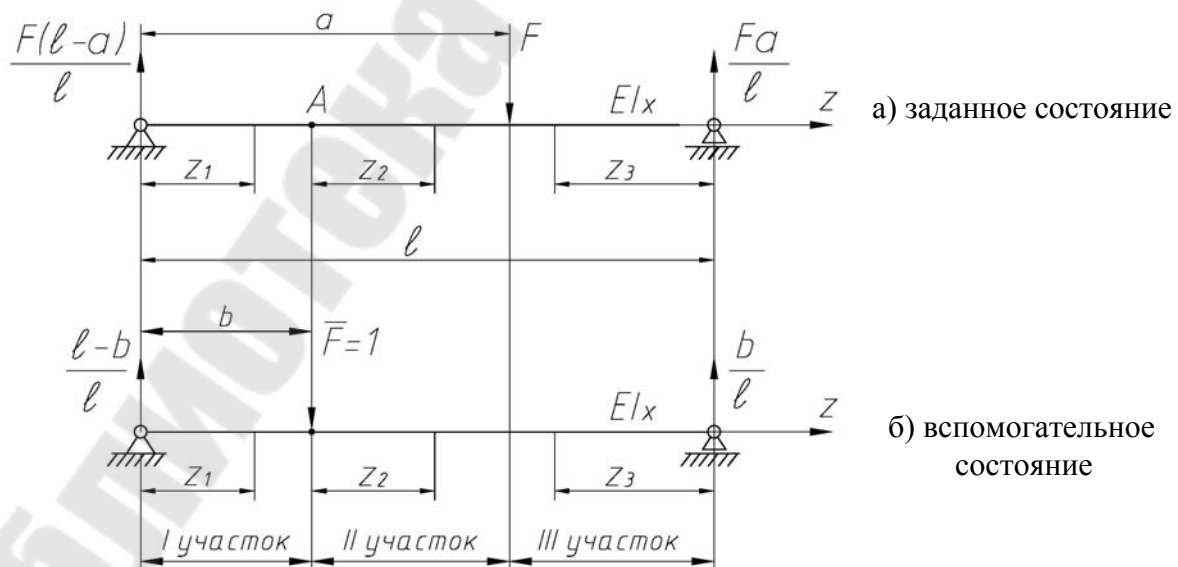


Рис. 42. Схема балки в заданном и вспомогательном состояниях

Задача № 19

Определить перемещение сечения C и угол поворота на правой опоре двухопорной балки с консольным концом (рис. 43,а), используя способ Верещагина. $EI_X = const$.

Решение.

Строим эпюру изгибающих моментов M (рис. 43,б):

$$M_A = 0; M_C = 0; M_B = -Fb.$$

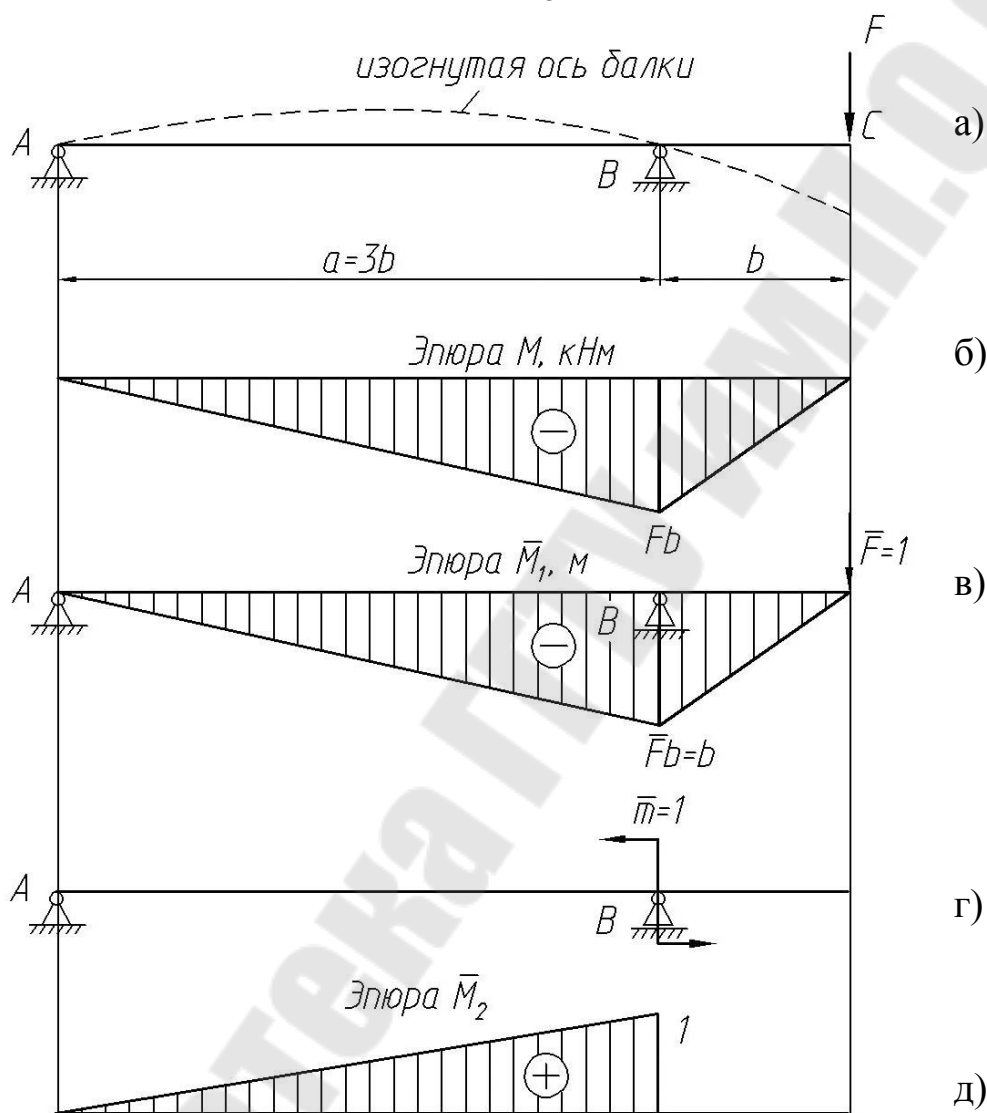


Рис. 43. Балка и эпюры изгибающих моментов

Для определения прогиба сечения C необходимо к этому сечению приложить единичную силу $\bar{F} = 1$ и построить единичную эпюру (рис. 43,в):

$$\bar{M}_A = 0; \bar{M}_C = 0; \bar{M}_B = -\bar{F}b.$$

Согласно способу Верещагина перемножаем построенные эпюры и получаем искомое перемещение. Воспользуемся формулами перемножения трапеций:

$$\delta_C = \sum \int \frac{M\bar{M}_1 dS}{EI} = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{b}{6} [2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot Fb \cdot b + 0 \cdot b + 0 \cdot Fb] + \right. \\ \left. + \frac{a}{6} \cdot [2 \cdot Fb \cdot b + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot b + 0 \cdot Fb] \right) = \frac{1}{6EI_X} (2Fb^3 + 2Fb^2a) = \frac{4Fb^3}{3EI_X}.$$

Для определения угла поворота сечения на правой опоре (сечения B) необходимо к сечению приложить единичный момент $\bar{m} = 1$. Причем, единичная эпюра от момента размерности не имеет. На участке BC единичный момент равен нулю.

Угол поворота сечения B равен

$$\theta_B = \sum \int \frac{M\bar{M}_2 dS}{EI} = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{a}{6} [-2 \cdot Fb \cdot 1] \right) = -\frac{2Fba}{6EI_X} = -\frac{Fb^2}{EI_X}.$$

Примечание:

знак «+» возле прогиба означает, что он направлен по направлению единичной силы, т.е. в данном случае сечение C перемещается вниз.

знак «-» в угле поворота говорит о том, что сечение B повернется против единичного момента, т.е. по часовой стрелке.

Задача № 20.

Определить прогибы двухопорной балки под каждой силой (рис.44,а). $EI_X = const$.

Решение.

Строим эпюру изгибающих моментов M_X . Для этого нам определим хотя бы одну реакцию, например реакцию R_A на левой опоре.

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 0,8 + 12 \cdot 0,2 - 8 \cdot 0,6 = 0;$$

$$R_A = \frac{8 \cdot 0,6 - 12 \cdot 0,2}{0,8} = 3 \text{ кН.}$$

Тогда

$$M_A = 0; M_C = R_A \cdot 0,2 = 0,6 \text{ кНм}; M_D = R_A \cdot 0,6 - 8 \cdot 0,4 = -1,4 \text{ кНм};$$

$$M_B = 0.$$

Эпюра изгибающих моментов изображена на рисунке 44,б.

К балке в точке C прикладываем единичную силу и строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 44,в):

$$\bar{M}_A = \bar{M}_B = 0;$$

$$\bar{M}_C = \frac{\bar{F}_1 \cdot 0,2(0,4 + 0,2)}{0,2 + 0,4 + 0,2} = 0,15 \text{ м}; \quad \bar{M}_D = \frac{\bar{F}_1 \cdot 0,2 \cdot 0,2}{0,2 + 0,4 + 0,2} = 0,05 \text{ м}.$$

Аналогично строим эюру \bar{M}_2 для точки D (рис. 44,г).

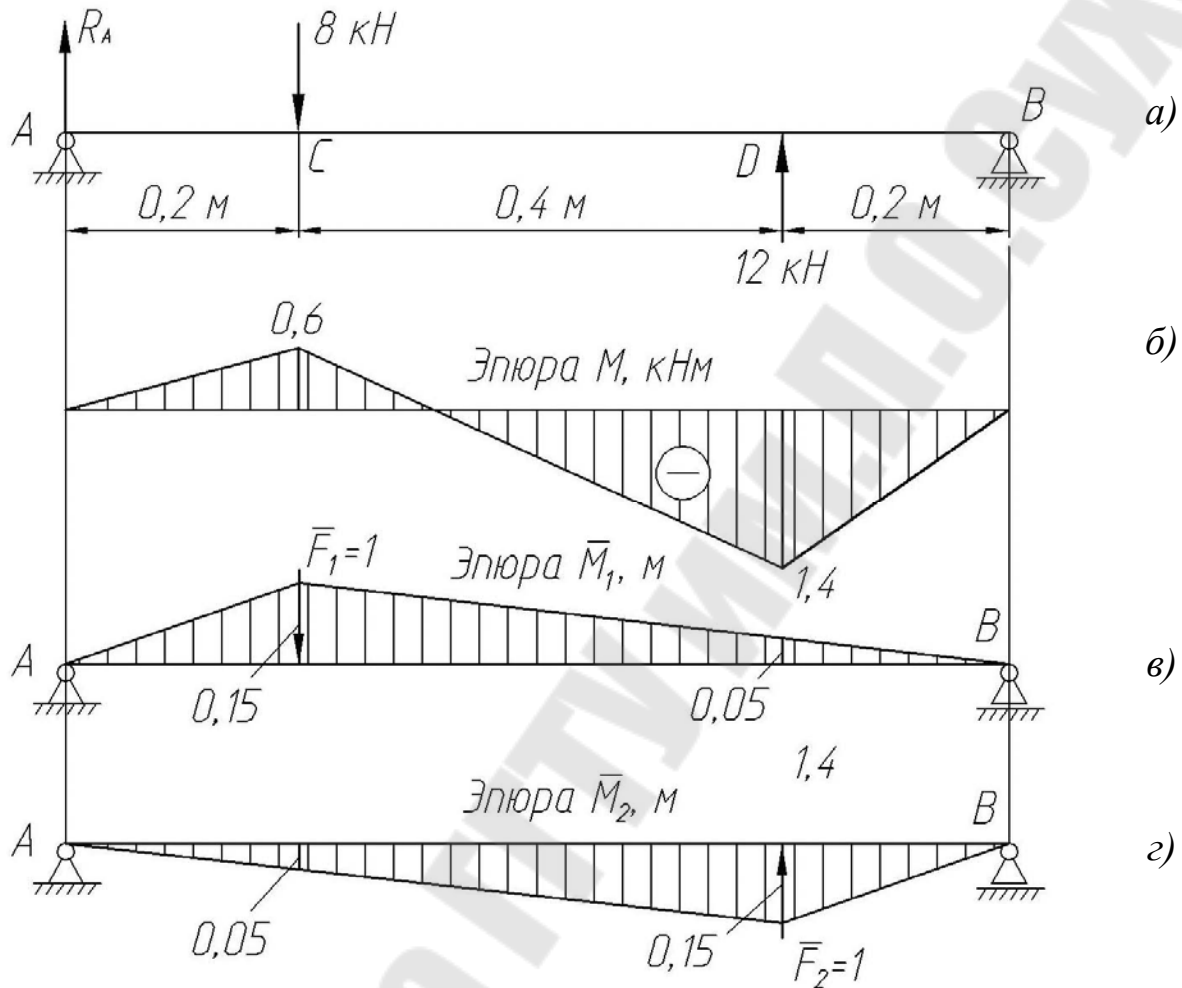


Рис. 44. Балка и эюры моментов

Прогиб сечения С равен

$$\delta_C = \sum \int \frac{M\bar{M}_1 dS}{EI} = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{0,2}{6} [2 \cdot 0,6 \cdot 0,15] + \frac{0,4}{6} \cdot [2 \cdot 0,6 \cdot 0,15 + 2 \cdot (-1,4) \cdot 0,05 + (-1,4) \cdot 0,15 + 0,6 \cdot 0,05] - \frac{0,2}{6} \cdot [2 \cdot 0,05 \cdot 1,4] \right) = -\frac{0,008}{EI_X}.$$

Прогиб сечения В

$$\delta_B = \sum \int \frac{M\bar{M}_2 dS}{EI} = \frac{1}{EI_X} \left(-\frac{0,2}{6} [2 \cdot 0,6 \cdot 0,05] + \frac{0,4}{6} \cdot [2 \cdot 0,6 \cdot (-0,05) + 2 \cdot 1,4 \cdot 0,15 + 1,4 \cdot 0,05 - 0,6 \cdot 0,15] + \frac{0,2}{6} \cdot [2 \cdot 0,15 \cdot 1,4] \right) = +\frac{0,035}{EI_X}.$$

10. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ. МЕТОД СИЛ

Для раскрытия статической неопределимости балки методом сил необходимо:

1. Определить степень статической неопределимости системы. Для этого нужно сравнить общее число неизвестных реакций с максимальным числом уравнений статики (для плоской системы сил – 3 уравнения, для пространственной – 6 уравнений). Иными словами степень статической неопределимости определяется количеством так называемых «лишних» связей.

2. Выбирается рационально основная и эквивалентная система. Основная система представляет собой переход от заданной путем освобождения от «лишних» связей для получения статически определимой системы.

3. Записываются канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0,$$

где $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$ – перемещения точек приложения «лишних» неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n по их направлению, вызванное действием единичного значения каждого неизвестного $\bar{X}_1 = 1, \bar{X}_2 = 1, \dots, \bar{X}_n = 1$. Эти коэффициенты представляют собой произведения единичных эпюр сами на себя. Единичные эпюры строятся от единичных нагрузок, соответствующих неизвестным реакциям X_1, X_2, \dots, X_n ;

$\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{nF}$ – перемещение точек приложения «лишних» неизвестных по их направлению, вызванное действием заданной внешней нагрузки. Эти коэффициенты представляют собой произведения единичных эпюр на грузовую эпюру. Грузовая эпюра строится от внешних нагрузок в основной системе.

4. Строятся единичные и грузовая эпюры изгибающих моментов.

5. Определяются коэффициенты канонических уравнений, уравнения решаются относительно неизвестных реакций X_1, X_2, \dots, X_n .

Задача № 21

Требуется для схемы, изображенной на рисунке 45, раскрыть статическую неопределенность, построить окончательную эпюру изгибающих моментов и выполнить проверку. $EI_x = const$.

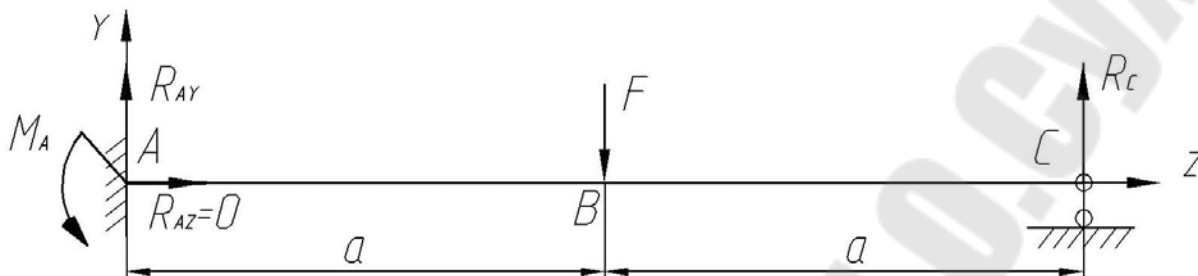


Рис. 45. Схема однопролетной балки

Решение.

Воспользуемся описанной выше методикой.

1. Определяем степень статической неопределенности системы.

Анализ балки позволяет сказать, что здесь имеем:

- в жесткой заделке A две реакции R_{AY} , R_{AZ} и реактивный момент M_A ;
- в подвижной опоре C одна реакция R_C .

Таким образом, имеем 4 неизвестных реакции. Система сил плоская, следовательно, можно составить 3 уравнения статики. Тогда $4-3=1$ – система 1 раз статически неопределенна.

2. Выберем основную и эквивалентную системы.

В данной задаче наиболее рациональным будет выбор основной и эквивалентной систем в виде консольной балки (рис. 46).

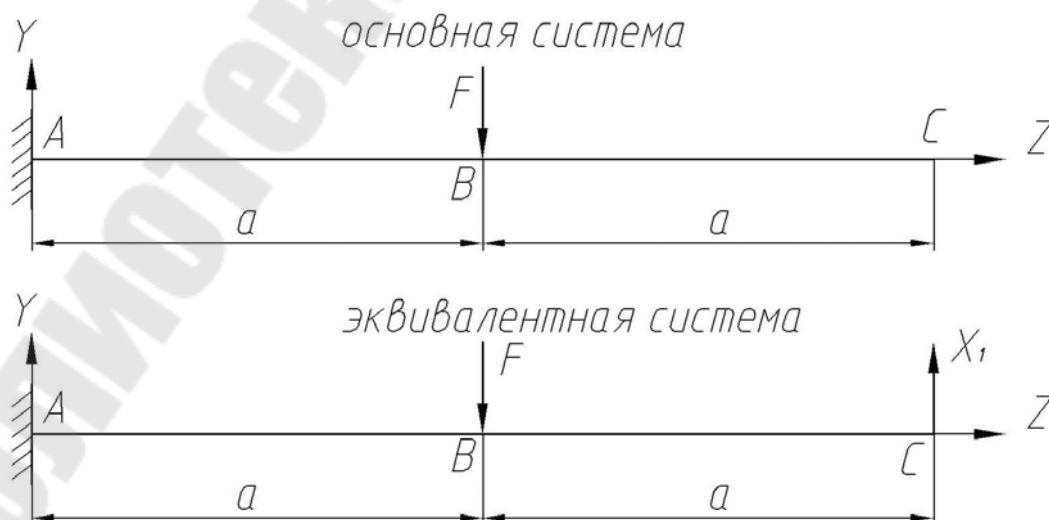


Рис. 46. Основная и эквивалентная системы

3. Запишем каноническое уравнение метода сил.

В данном случае оно имеет упрощенный вид (одна неизвестная)

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

4. Строим грузовую и единичную эпюры изгибающих моментов.

Грузовую эпюру строим от основной системы, начиная со свободного конца консольной балки:

$$M_C = 0; M_B = 0; M_A = -Fa.$$

Единичную эпюру строим от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$, соответствующей неизвестной реакции X_1 :

$$\bar{M}_C = 0; \bar{M}_B = \bar{X}_1 \cdot a = a; \bar{M}_A = \bar{X}_1 \cdot 2a = 2a.$$

Грузовая и единичная эпюры показаны на рисунке 47.

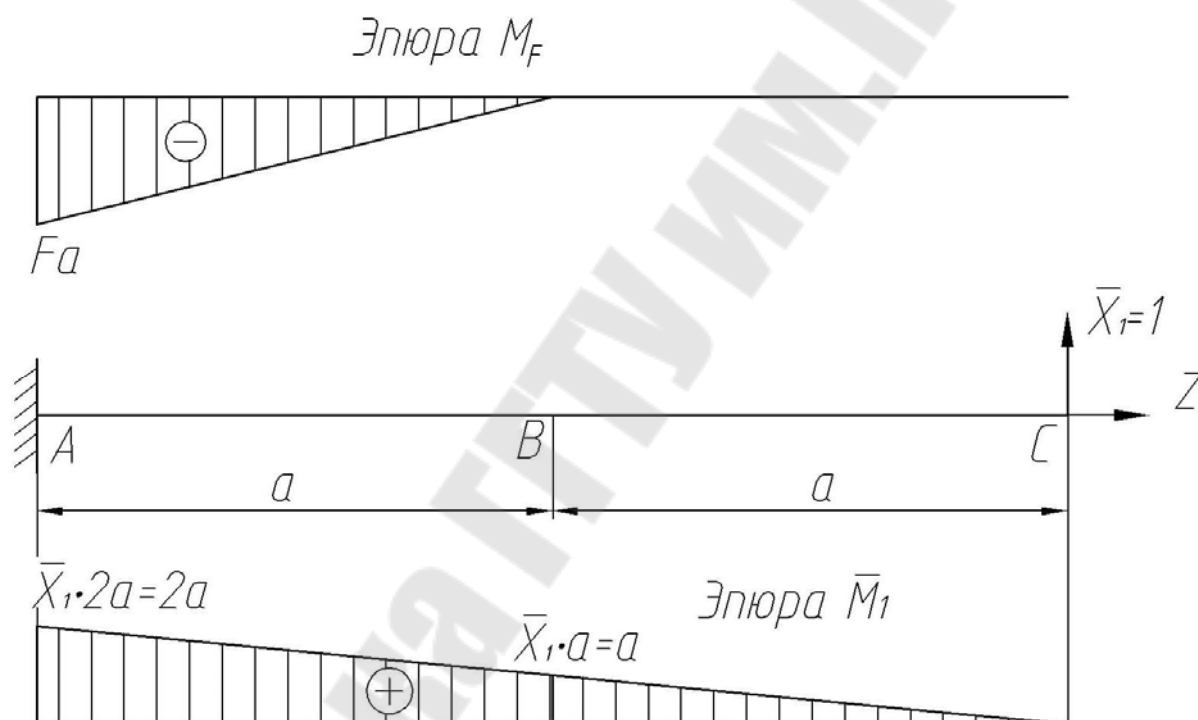


Рис. 47. Грузовая и единичная эпюры

5. Определяем коэффициенты канонического уравнения и решаем его.

Коэффициент δ_{11} представляет собой произведение единичной эпюры самой на себя. Для этого мысленно представим под единичной эпюрой ее копию. Имеем произведение двух прямоугольных треугольников. Воспользуемся формулой перемножения трапеций

$$\delta_{11} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_1^2 dS}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{2a}{6} [2 \cdot 2a \cdot 2a] \right) = \frac{8a^3}{3EI_X}.$$

Коэффициент Δ_{1F} представляет собой произведение единичной эпюры на грузовую. Изгибающий момент на участке ВС грузовой эпюры равен нулю, следовательно, при определении будем учитывать только участок АВ.

$$\Delta_{1F} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_1 M_F dS}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{a}{6} [-2 \cdot 2a \cdot Fa - Fa \cdot a] \right) = -\frac{5Fa^3}{6EI_X}.$$

После подстановки полученных результатов в каноническое уравнение будем иметь

$$\frac{8a^3}{3EI_X} \cdot X_1 - \frac{5Fa^3}{6EI_X} = 0.$$

Тогда неизвестная реакция будет равна

$$X_1 = \frac{5Fa^3/6}{8a^3/3} = \frac{15Fa^3}{48a^3} = \frac{5F}{16}.$$

Знак “+” говорит о том, что направление неизвестной реакции было выбрано правильно.

6. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов M_X .

Воспользуемся эквивалентной расчетной схемой (рис. 48).

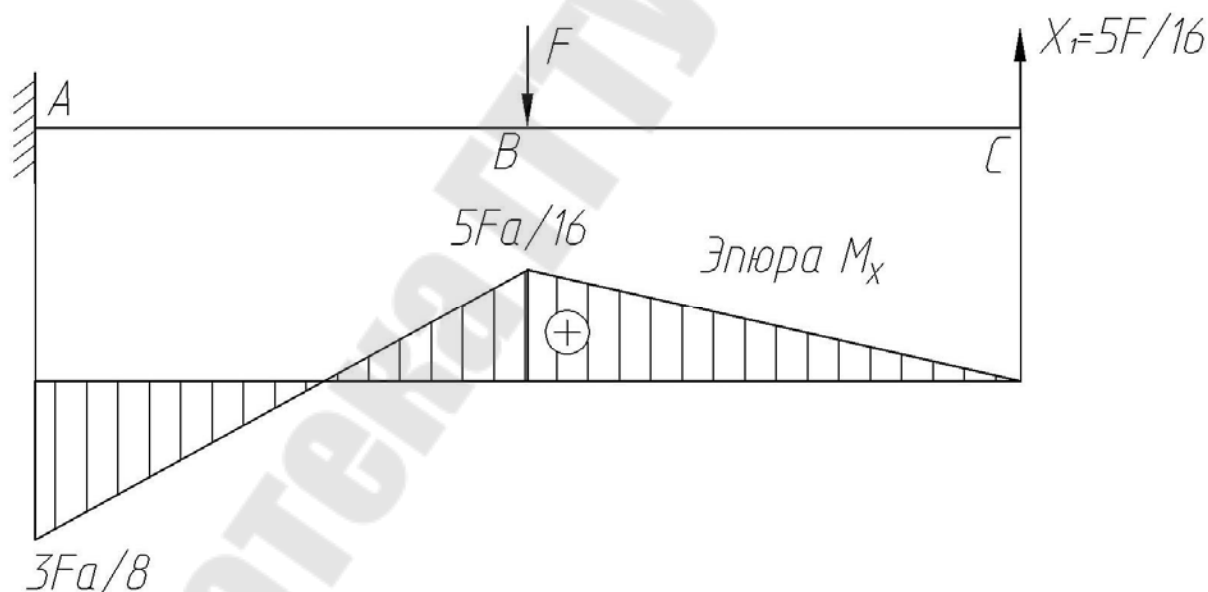


Рис. 48. Расчетная эквивалентная схема и окончательная эпюра изгибающих моментов

Изгибающие моменты в сечениях равны

$$M_C = 0; M_B = +X_1 a = \frac{5Fa}{16}; M_A = \frac{5F \cdot 2a}{16} - Fa = -\frac{6Fa}{16} = -\frac{3Fa}{8}.$$

7. Деформационная проверка.

Деформационная проверка позволяет ответить на вопрос о правильности раскрытия статической неопределимости и построения окончательной эпюры изгибающих моментов.

Деформационная проверка основана на том, что в заданной и эквивалентной системах перемещение сечения, в котором действует найденная реакция X_1 , должно быть равно нулю, т.е. $\delta_C = 0$. Это перемещение определяется произведением эпюры M_X на единичную эпюру \bar{M}_1 . Следовательно, имеем

$$\delta_C = \sum \int \frac{M_X \bar{M}_1 dS}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{a}{6} \left[2 \cdot \frac{5Fa}{16} \cdot a \right] + \frac{a}{6} \left[2 \cdot \frac{5Fa}{16} \cdot a + 2 \cdot \left(-\frac{3Fa}{8} \right) \cdot 2a + \left(-\frac{3Fa}{8} \right) \cdot a + \frac{5Fa}{16} \cdot 2a \right] \right) = \frac{Fa^3}{EI_X} \left(\frac{10}{96} - \frac{10}{96} \right) = 0.$$

Деформационная проверка выполняется.

Статическая неопределимость раскрыта правильно, окончательная эпюра изгибающих моментов построена верно.

Задача № 22

Для заданной рамы (рис. 49) построить эпюры поперечных сил, продольных сил, изгибающих моментов, подобрать двутавровое поперечное сечение и определить перемещение точки K . Материал – сталь Ст. 3. $EI_X = const$.

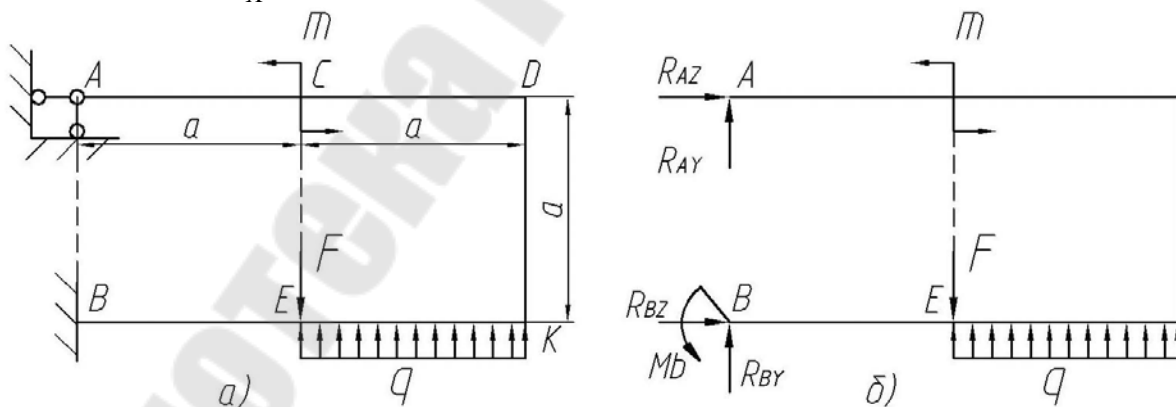


Рис. 49. Заданная система

Дано: $q = 10$ кН/м; $F = 80$ кН; $m = 40$ кНм; $a = 3$ м; $b = 4$ м.

Решение.

1. Определяем степень статической неопределимости системы.

В данном случае в неподвижном шарнире A возникают 2 опор-

ные реакции: R_{AZ}, R_{AY} . Жесткая заделка дает 3 опорные реакции: R_{BZ}, R_{BY}, M_B . Для плоской системы можно максимально составить только 3 уравнения статики, следовательно, имеем:

$5 - 3 = 2$ – система 2 раза статически неопределенна, т.е. она имеет 2 лишние связи.

2. Выбираем основную и эквивалентную системы.

К основной системе с заданной нагрузкой для получения эквивалентной необходимо приложить неизвестные реакции X_1 и X_2 (рис. 50).

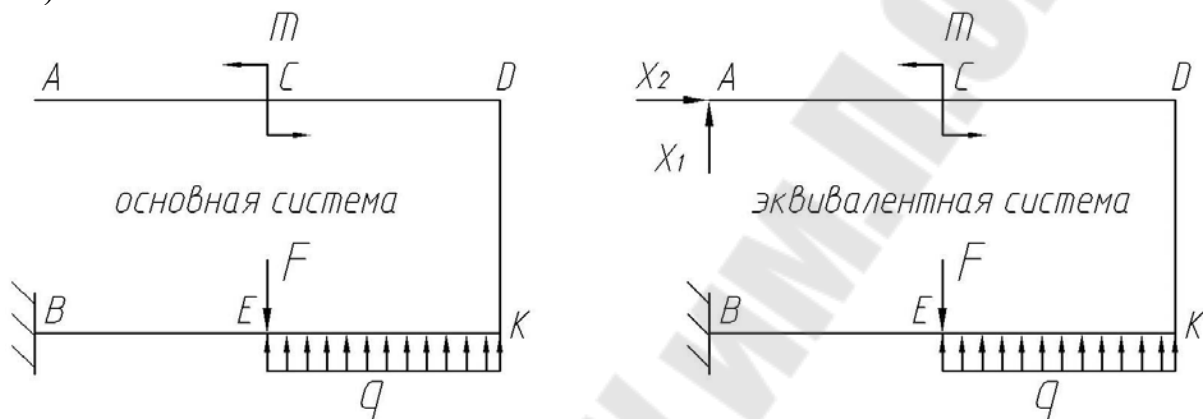


Рис. 50. Основная и эквивалентная системы

3. Раскрываем статическую неопределимость.

Канонические уравнения метода сил для дважды статически неопределимой системы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Строим грузовую и единичные эпюры.

$$M_A = 0; M_C^{лев} = 0; M_C^{прав} = -m = -10 \text{ кНм};$$

$$M_D^{лев} = -m = -10 \text{ кНм}; M_D^{низ} = +m = 10 \text{ кНм (вертикальный участок);}$$

$$M_K^{верх} = +m = 10 \text{ кНм}; M_K^{лев} = +m = 10 \text{ кНм (горизонтальный участок);}$$

$$M_E^{лев} = M_E^{прав} = +m + \frac{qa^2}{2} = +10 + \frac{30 \cdot 1^2}{2} = +25 \text{ кНм};$$

$$M_B = +m + qa \cdot 1,5a - Fa = +10 + 30 \cdot 1 \cdot 1,5 - 20 \cdot 1 = +35 \text{ кНм.}$$

Грузовая эпюра изображена на рисунке 50,а.

$$\bar{M}_A = 0; \bar{M}_C = +\bar{X}_1 a = +a = +1 \text{ м};$$

$$\bar{M}_D^{лев} = \bar{X}_1 2a = 2a = +2 \text{ м}; \bar{M}_D^{лев} = -\bar{X}_1 2a = -2a = -2 \text{ м};$$

$$\bar{M}_K^{всп} = -\bar{X}_1 2a = -2a = -2 \text{ м}; \bar{M}_K^{лев} = -\bar{X}_1 2a = -2a = -2 \text{ м};$$

$$\bar{M}_E = -\bar{X}_1 a = -a = -1 \text{ м}; \bar{M}_B = 0.$$

Первая единичная эпюра изображена на рисунке 51, б.

$$\bar{M}_A = 0; \bar{M}_C = 0;$$

$$\bar{M}_D^{лев} = 0; \bar{M}_D^{лев} = 0;$$

$$\bar{M}_K^{всп} = -\bar{X}_2 a = -a = -1 \text{ м}; \bar{M}_K^{лев} = -\bar{X}_2 a = -a = -1 \text{ м};$$

$$\bar{M}_E = -\bar{X}_1 a = -a = -1 \text{ м}; \bar{M}_E = -\bar{X}_2 a = -a = -1 \text{ м}.$$

Вторая единичная эпюра изображена на рисунке 50, в.

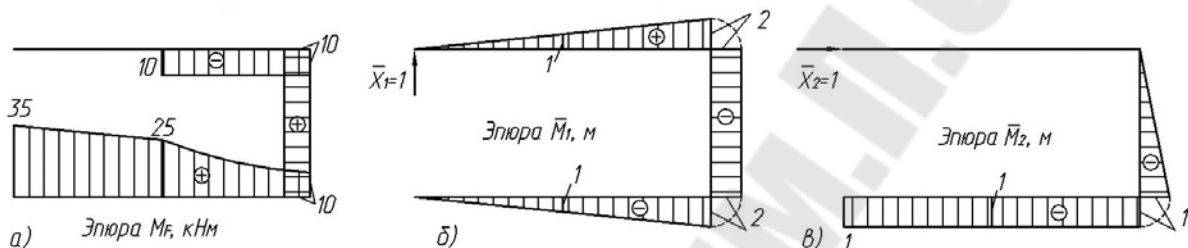


Рис. 51. Единичные и грузовая эпюры изгибающих моментов

Определяем коэффициенты канонических уравнений.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dS}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{6} (2 \cdot 2 \cdot 2) + 2 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{2}{6} (2 \cdot 2 \cdot 2) \right) = \frac{9,333}{EI}.$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2^2 dS}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 \right) = \frac{2,333}{EI}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dS}{EI} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} [2 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 2] + \frac{2}{6} [2 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 2] \right) = \frac{3}{EI}.$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_F \bar{M}_1 dS}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1+2}{2} \cdot 1 \cdot (-10) - 2 \cdot 1 \cdot 10 - \frac{1}{6} [-1 \cdot 25 - 2 \cdot 10 + \right.$$

$$\left. + 4 \cdot \frac{1+2}{2} \cdot \left(\frac{25+10}{2} - \frac{q \cdot 1^2}{8} \right) \right] - \frac{1}{6} [-2 \cdot 1 \cdot 25 - 1 \cdot 35] \right) = -\frac{70,417}{EI}.$$

$$\Delta_{2F} = \sum \int \frac{M_F \bar{M}_2 dS}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} [-2 \cdot 1 \cdot 10 - 1 \cdot 10] + \frac{1}{6} [-1 \cdot 25 - 1 \cdot 10 + \right.$$

$$\left. + 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{25+10}{2} - \frac{q \cdot 1^2}{8} \right) \right] - \frac{25+35}{2} \cdot 1 \cdot (-1) \right) = -\frac{50}{EI}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов и свободных членов в уравнения, решаем их относительно неизвестных X_1, X_2

$$\left. \begin{aligned} \frac{3,333}{EI} X_1 + \frac{3}{EI} X_2 - \frac{70,417}{EI} &= 0 \\ \frac{3}{EI} X_1 + \frac{2,333}{EI} X_2 - \frac{50}{EI} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Отсюда: $X_1 = 1,125$ кН; $X_2 = 20$ кН.

4. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов.

Для этого воспользуемся эквивалентной системой с приложенными к ней известными силами $X_1 = 1,125$ кН; $X_2 = 20$ кН (рис. 52):

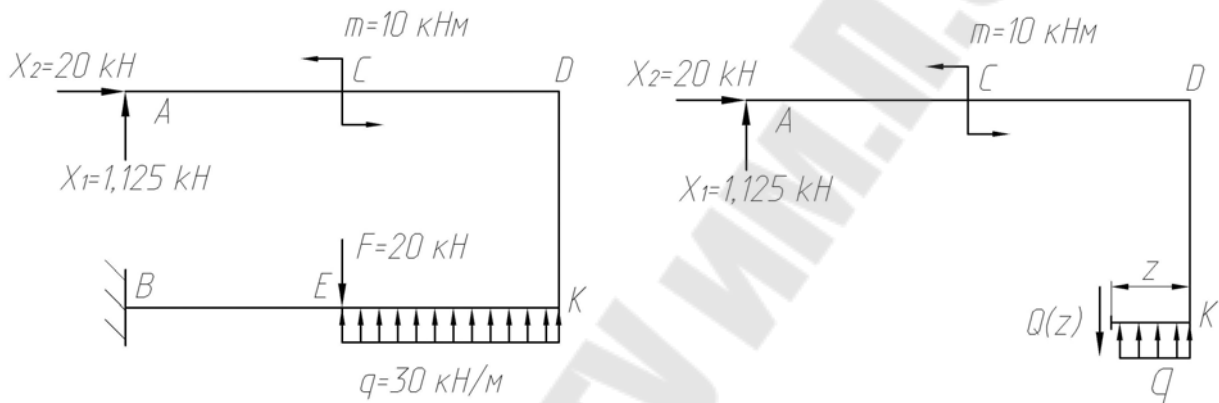


Рис. 52. Расчетная эквивалентная схема

$$M_A = 0; M_C^{лев} = +X_1 a = +1,125 \cdot 1 = 1,125 \text{ кНм};$$

$$M_C^{прав} = +X_1 a - m = +1,125 \cdot 1 - 10 = -8,875 \text{ кНм};$$

$$M_D^{лев} = +X_1 \cdot 2a - m = +1,125 \cdot 2 - 10 = -7,75 \text{ кНм};$$

$$M_D^{низ} = +m - X_1 \cdot 2a - X_2 \cdot 0 = +10 - 1,125 \cdot 2 = 7,75 \text{ кНм};$$

$$M_K^{верх} = +m - X_1 \cdot 2a - X_2 \cdot a = +10 - 1,125 \cdot 2 - 20 \cdot 1 = -12,25 \text{ кНм};$$

$$M_K^{лев} = +m - X_1 \cdot 2a - X_2 \cdot a = +10 - 1,125 \cdot 2 - 20 \cdot 1 = -12,25 \text{ кНм};$$

$$M_E = +m + \frac{qa^2}{2} - X_1 a - X_2 a = +10 + \frac{30 \cdot 1^2}{2} - 1,125 \cdot 1 - 20 \cdot 1 = 3,875 \text{ кНм};$$

$$M_B = m + qa \cdot 1,5a - Fa - X_2 a = 10 + 30 \cdot 1 \cdot 1,5 - 20 \cdot 1 - 20 \cdot 1 = 15 \text{ кНм}.$$

При построении окончательной эпюры изгибающих моментов обязательно необходимо учитывать возможность появления экстремума на участке, где действует распределенная нагрузка q .

Для нахождения сечения, в котором будет возникать экстремум, необходимо составить уравнение поперечной силы для данного уча-

стка $Q(z)$, приравнять его нулю и решить относительно величины z в пределах длины участка. Если будет выполняться условие $0 < z < a$, на участке будет экстремум изгибающего момента.

Проверим правильность построения нашей эпюры на участке KE (рис. 51):

$$Q(z) = X_1 + qz = 0;$$

$+1,125 + 30 \cdot z = 0 \Rightarrow z = -0,0375$ м – условие $0 < z < a$ не выполняется, экстремума на участке KE нет.

Окончательная эпюра изгибающих моментов изображена на рисунке 53.

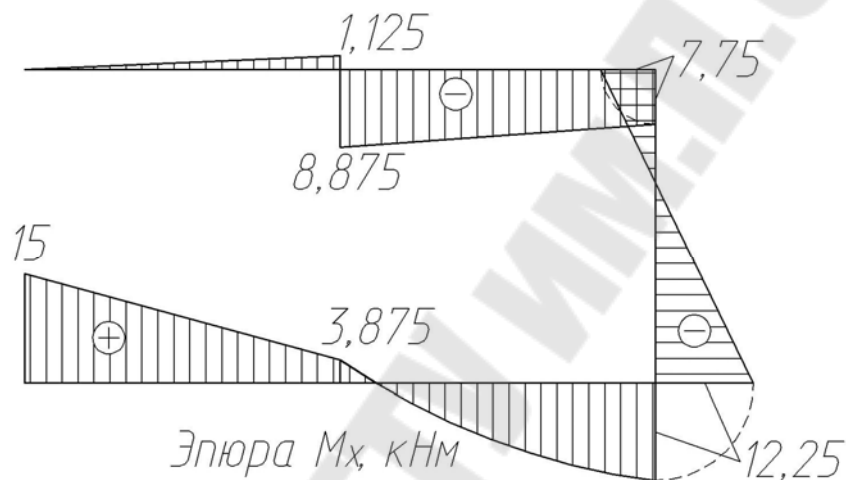


Рис. 53. Эпюра изгибающих моментов

Строим эпюры поперечных и продольных сил (рис. 54).

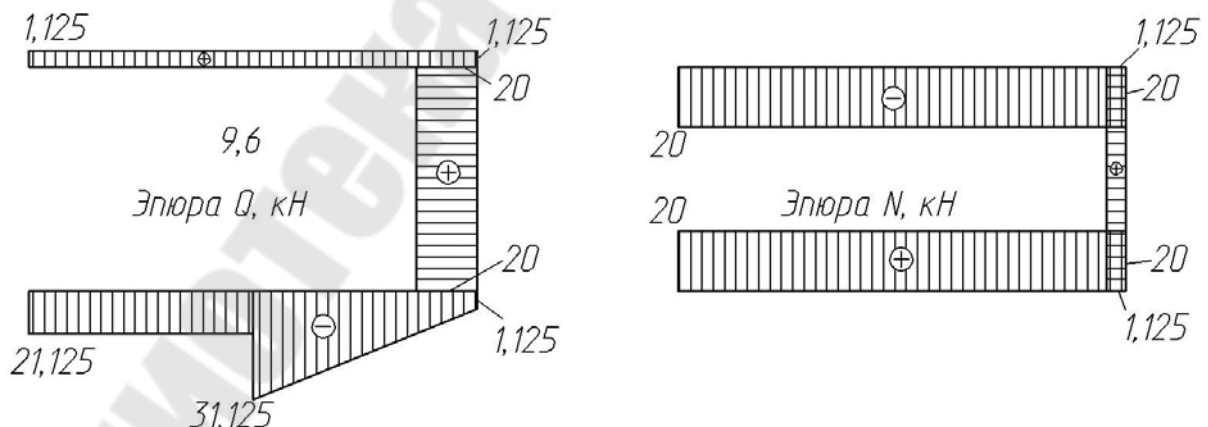


Рис. 54. Эпюры поперечных и продольных сил

5. Деформационная проверка.

В заданной системе и эквивалентной системе горизонтальное и вертикальное перемещения сечения A должны быть равны нулю, т.е.

$\delta_A^{верт} = 0$ и $\delta_A^{гор} = 0$. Эти перемещения определяются произведением эпюры M_X на единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 соответственно.

Следовательно, имеем

$$\delta_A^{верт} = \sum \int \frac{M_X \bar{M}_1 dS}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} [2 \cdot 1,125 \cdot 1] - \frac{1}{6} [2 \cdot 8,875 \cdot 1 + 2 \cdot 7,75 \cdot 2 + 8,875 \cdot 2 + 7,75 \cdot 1] + \frac{7,75 - 12,25}{2} \cdot 1 \cdot (-2) + \frac{1}{6} [-1 \cdot 3,875 + (-2) \cdot (-12,25)] + 4 \cdot \frac{-1 - 2}{2} \cdot \left(\frac{3,875 - 12,25}{2} - \frac{q \cdot 1^2}{8} \right) \right) - \frac{1}{6} [-2 \cdot 1 \cdot 3,875 - 1 \cdot 15] = \frac{0,08}{EI} \approx 0.$$

$$\delta_A^{гор} = \sum \int \frac{M_X \bar{M}_2 dS}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} [2 \cdot (-12,25) \cdot (-1) + 7,75 \cdot (-1)] + \frac{1}{6} [-1 \cdot 3,875 + (-1) \cdot (-12,25) + 4 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{3,875 - 12,25}{2} - \frac{q \cdot 1^2}{8} \right)] + \frac{15 + 3,875}{2} \cdot 1 \cdot (-1) \right) = \frac{0,04}{EI} \approx 0.$$

Деформационная проверка выполняется. Очевидно, что перемещения сечения A в вертикальной и горизонтальной плоскостях практически равно нулю.

6. Подбираем размеры поперечного сечения.

Условие прочности при изгибе с растяжением-сжатием имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_X} + \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

где M – изгибающий момент в предполагаемом опасном сечении;

N – продольная сила в предполагаемом опасном сечении;

A – площадь поперечного сечения.

В большинстве случаев совместного действия изгиба с растяжением-сжатием напряжения от изгиба превышают напряжения от растяжения-сжатия. Поэтому первоначально расчет ведется относительно изгиба.

Максимальный изгибающий момент находим по эпюре M_X :

$M_{\max} = 15$ кНм – сечение B .

$$W_X \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{15000}{160} = 93,75 \text{ см}^3.$$

По таблице 4 выбираем двутавровую балку № 16: $W_X = 109 \text{ см}^3$, $A = 20,2 \text{ см}^2$, $I_X = 873 \text{ см}^4$.

Проверяем подобранный размер сечения с учетом растяжения-сжатия (в сечении B продольная сила $N = 20$ кН):

$$\sigma_{\max} = \frac{15000}{109 \cdot 10^{-6}} + \frac{20000}{20,2 \cdot 10^{-4}} = 137,6 \cdot 10^6 + 9,9 \cdot 10^6 = 147,5 \text{ МПа} \leq [\sigma].$$

Условие прочности выполняется. Для дальнейшего расчета оставляем данный профиль.

Задача № 23

Для заданной статически неопределимой балки (рис. 55) построить эпюру изгибающих моментов, подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения с отношением высоты (h) к ширине (b) $h/b=2$.

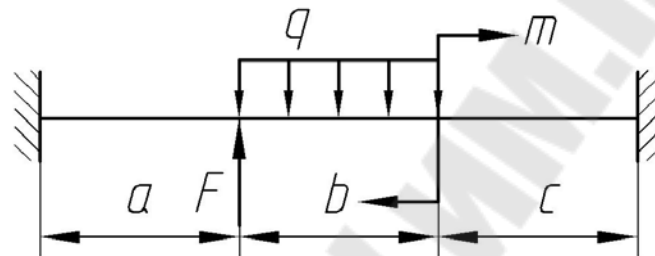


Рис. 55. Расчетная схема балки

Исходные данные: $a = 50$ см; $b = 50$ см; $c = 50$ см; $F = 5$ кН; $m = 2$ кНм; $q = 10$ кН/м; $[\sigma] = 160$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.

1. Устанавливаем степень статической неопределимости системы.

Будем считать, что характер возникающих реакций в заделках зависит от характера внешнего нагружения. Поэтому в каждой заделке имеем по две неизвестные реакции (рис. 56). В связи с этим, уравнение проекций всех сил на горизонтальную ось учитывать не будем.

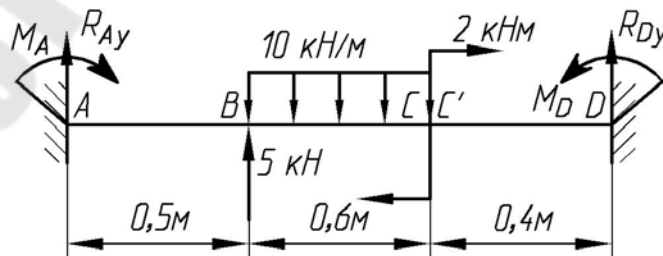


Рис. 56. Расчетная схема балки с учетом реакций

Тогда имеем

4 – 2 = 2 – система 2 раза статически неопределена.

2. Выбираем основную и эквивалентную системы (рис. 57).

Для этого отбрасываем одну из заделок и прикладываем две неизвестные нагрузки X_1 и X_2 .

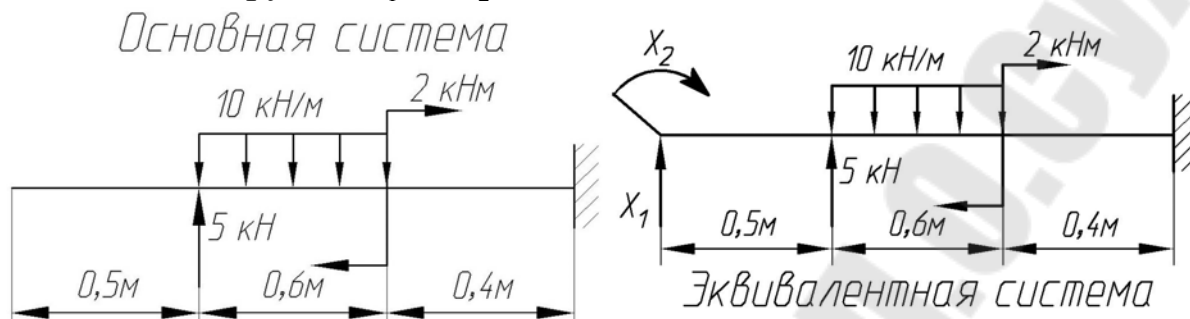


Рис. 57. Основная и эквивалентная системы

3. Раскрываем статическую неопределимость методом сил.

Канонические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

Для основной системы строим грузовую эпюру изгибающих моментов (рис. 58).

$$M_{F1}(z) = 0;$$

$$M_{F2}(z) = F \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2};$$

при $z = 0$; $M_{F2} = 0$;

при $z = b$; $M_{F2} = F \cdot b - q \cdot \frac{b^2}{2} = 5 \cdot 0,6 - 10 \cdot \frac{0,6^2}{2} = 1,2 \text{ кНм};$

Определим экстремальное значение момента на втором участке:

$$Q_2(z) = F - q \cdot z = 0; \quad z = \frac{F}{q} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ м};$$

при $z = 0,5 \text{ м}; \quad M_{F2} = F \cdot 0,5 - q \cdot \frac{0,5^2}{2} = 5 \cdot 0,5 - 10 \cdot \frac{0,5^2}{2} = 1,25 \text{ кНм};$

$$M_{F3}(z) = F \cdot (b + z) - q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + z\right) + m;$$

при $z = 0$; $M_{F3} = F \cdot b - q \cdot \frac{b^2}{2} + m = 5 \cdot 0,6 - 10 \cdot \frac{0,6^2}{2} + 2 = 3,2 \text{ кНм};$

при $z = c$;

$$M_{F3} = F \cdot (b + c) - q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + c \right) + m = 5 \cdot (0,6 + 0,4) -$$

$$- 10 \cdot 0,6 \cdot \left(\frac{0,6}{2} + 0,4 \right) + 2 = 2,8 \text{ кНм.}$$

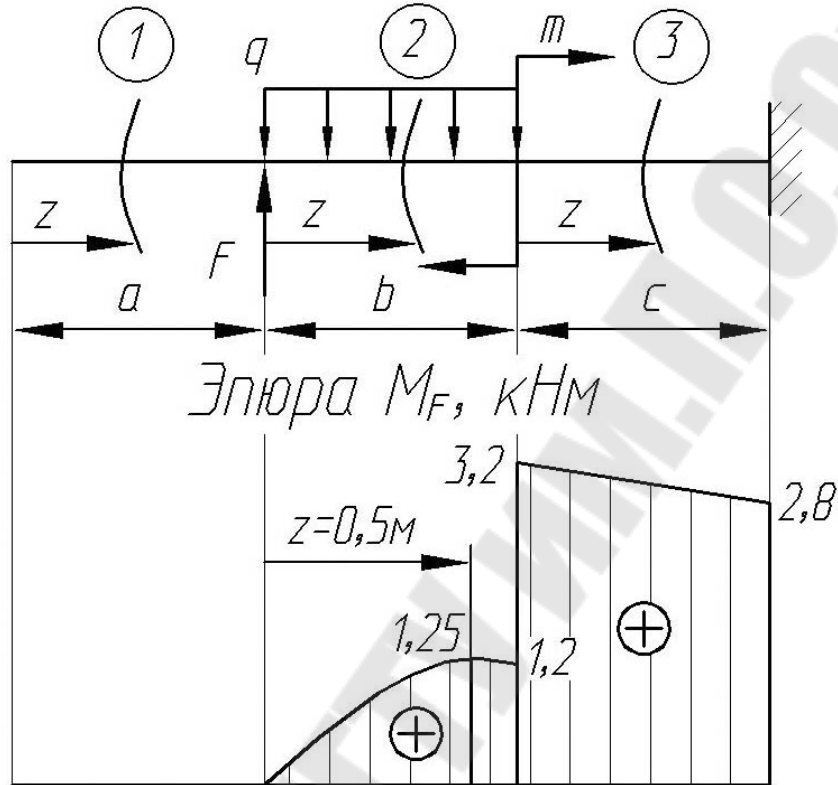


Рис. 58. Грузовая эпюра

Для определения коэффициентов канонических уравнений строим единичные эпюры (рис. 59).

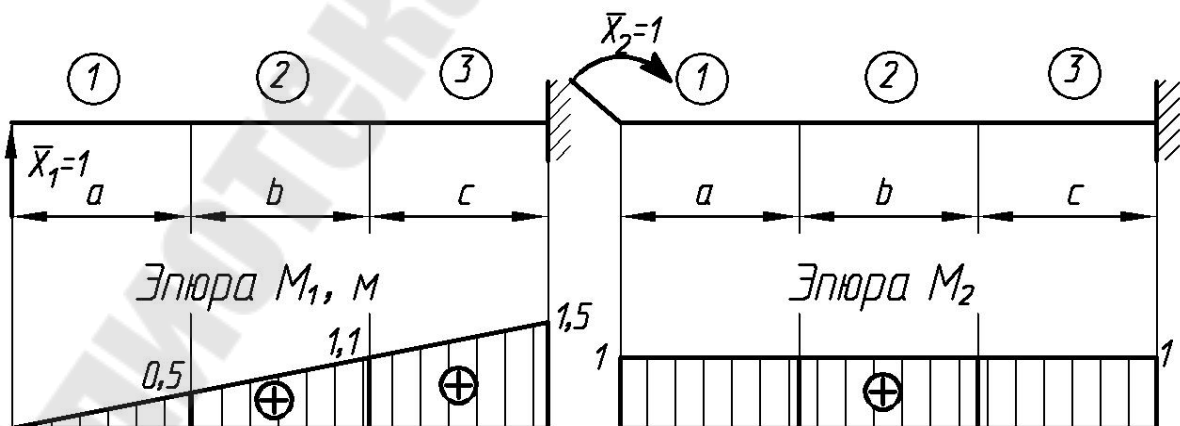


Рис. 59. Единичные эпюры

С помощью интеграла Мора определяем коэффициенты канонических уравнений.

Интеграл Мора будем вычислять по способу Верещагина, применяя формулы Симпсона.

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1 dz}{EI} = \frac{\omega \cdot y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \right) = \frac{1,125}{EI}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2 dz}{EI} = \frac{\omega \cdot y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot 1 \right) = \frac{1,125}{EI}.$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2 M_2 dz}{EI} = \frac{\omega \cdot y_c}{EI} = \frac{1}{EI} (1,5 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1,5}{EI}.$$

$$\Delta_{1F} = \int \frac{M_F M_1 dz}{EI} = \frac{\omega_1 \cdot y_{c1} + \omega_2 \cdot y_{c2} + \omega_3 \cdot y_{c3}}{EI},$$

где индекс в произведениях ωy_c указывает на участок

$$\omega_1 y_{c1} = 0;$$

$$\omega_2 y_{c2} = \frac{0,6}{6} \left(0 \cdot 0,5 + 1,2 \cdot 1,1 + 4 \left(\frac{0 + 1,2}{2} + \frac{10 \cdot 0,6^2}{8} \right) \cdot \left(\frac{0,5 + 1,1}{2} \right) \right) = 0,468;$$

$$\omega_3 y_{c3} = \frac{0,4}{6} (2 \cdot 3,2 \cdot 1,1 + 2 \cdot 2,8 \cdot 1,5 + 3,2 \cdot 1,5 + 2,8 \cdot 1,1) = 1,5547;$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} (0 + 0,468 + 1,5547) = \frac{2,0227}{EI}.$$

$$\Delta_{2F} = \int \frac{M_F M_2 dz}{EI} = \frac{\omega_1 \cdot y_{c1} + \omega_2 \cdot y_{c2} + \omega_3 \cdot y_{c3}}{EI};$$

$$\omega_1 y_{c1} = 0; \quad \omega_2 y_{c2} = \frac{0,6}{6} \left(0 \cdot 1 + 1,2 \cdot 1 + 4 \left(\frac{0 + 1,2}{2} + \frac{10 \cdot 0,6^2}{8} \right) \cdot 1 \right) = 0,54;$$

$$\omega_3 y_{c3} = \frac{3,2 + 2,8}{2} \cdot 0,4 \cdot 1 = 1,2;$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} (0 + 0,54 + 1,2) = \frac{1,74}{EI}.$$

Решаем канонические уравнения

$$\begin{cases} \frac{1,125}{EI} X_1 + \frac{1,125}{EI} X_2 + \frac{2,0227}{EI} = 0 & X_1 = -2,552 \text{ кН}; \\ \frac{1,125}{EI} X_1 + \frac{1,5}{EI} X_2 + \frac{1,74}{EI} = 0 & X_2 = 0,754 \text{ кНм}. \end{cases} \Rightarrow$$

Знак « \leftarrow » у X_1 говорит о том, что эта сила направлена в сторону, противоположную единичной силе \bar{X}_1 .

4. Для эквивалентной системы строим окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 60).

$$M_{Xi} = M_{Fi} + \bar{M}_{1i} \cdot X_1 + \bar{M}_{2i} \cdot X_2.$$

$$M_{XA} = 0 + 0 \cdot (-2,552) + 1 \cdot 0,754 = 0,754 \text{ кНм};$$

$$M_{XB} = 0 + 0,5 \cdot (-2,552) + 1 \cdot 0,754 = -0,522 \text{ кНм};$$

$$M_{XC} = 1,2 + 1,1 \cdot (-2,552) + 1 \cdot 0,754 = -0,8532 \text{ кНм};$$

$$M_{XC'} = 3,2 + 1,1 \cdot (-2,552) + 1 \cdot 0,754 = 1,1468 \text{ кНм};$$

$$M_{XD} = 2,8 + 1,5 \cdot (-2,552) + 1 \cdot 0,754 = -0,274 \text{ кНм}.$$

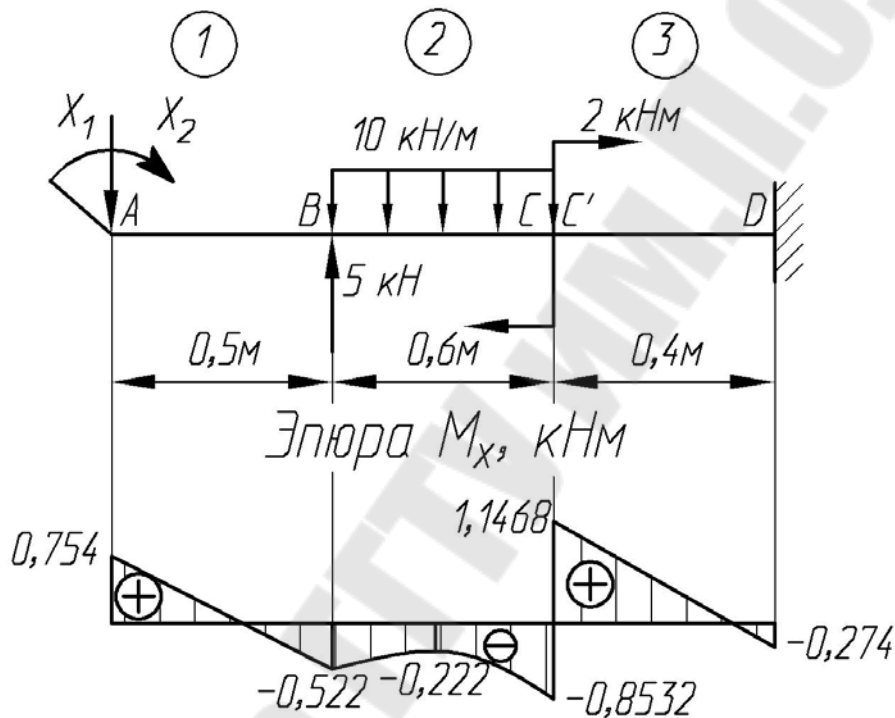


Рис. 60. Окончательная эпюра изгибающих моментов

5. Выполняем деформационную проверку.

Перемещение в точке A должно равняться нулю.

$$\delta_A = \int \frac{M_X M_1}{EI} dz = \frac{\omega_1 \cdot y_{c1} + \omega_2 \cdot y_{c2} + \omega_3 \cdot y_{c3}}{EI}$$

$$\omega_1 y_{c1} = \frac{0,5}{6} (2 \cdot (-0,522) \cdot 0,5 + 0,754 \cdot 0,5) = -0,012;$$

$$\omega_2 y_{c2} = \frac{0,6}{6} \left((-0,522) \cdot 0,5 + (-0,8532) \cdot 1,1 + \right. \\ \left. + 4 \left(\frac{-0,522 - 0,8532}{2} + \frac{10 \cdot 0,6^2}{8} \right) \cdot \left(\frac{0,5 + 1,1}{2} \right) \right) = -0,196;$$

$$\omega_{3y_{c3}} = \frac{0,4}{6} \left(2 \cdot 1,1468 \cdot 1,1 + 2 \cdot (-0,274) \cdot 1,5 + \right. \\ \left. + 1,1468 \cdot 1,5 + (-0,274) \cdot 1,1 \right) = 0,208; \\ \Delta_{1F} = \frac{1}{EI} (-0,012 - 0,196 + 0,208) = 0.$$

Таким образом, линейное перемещение сечения A равно нулю. Деформационная проверка выполняется.

6. Из условия прочности при изгибе определяем размеры сечения.

$$\sigma = \frac{M_{X \max}}{W_X} \leq [\sigma],$$

где $M_{X \max} = 1,1468$ кНм; $W_X = \frac{bh^2}{6}$.

Исходя из условия, что $\frac{h}{b} = 2$, получим $W_X = \frac{2}{3}b^3$.

Тогда из условия прочности

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot M_{X \max}}{2 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1146,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 160}} = 22 \text{ мм}, \quad h = 2 \cdot 22 = 44 \text{ мм}.$$

11. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ (ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ)

Основным видом деформирования при продольном изгибе является сжатие. Однако когда размеры поперечного сечения несоизмеримо малы по сравнению с длиной стержня и имеет место значительная осевая нагрузка, стержень будет терять устойчивость.

Основным показателем продольного изгиба является *гибкость* стержня λ

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

где μ – коэффициент приведенной длины;

l – длина стержня;

i_{\min} – минимальный радиус инерции сечения,

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

Коэффициент приведенной длины зависит от варианта закрепления стержня, характера нагрузки и определяется по рисунку 61.

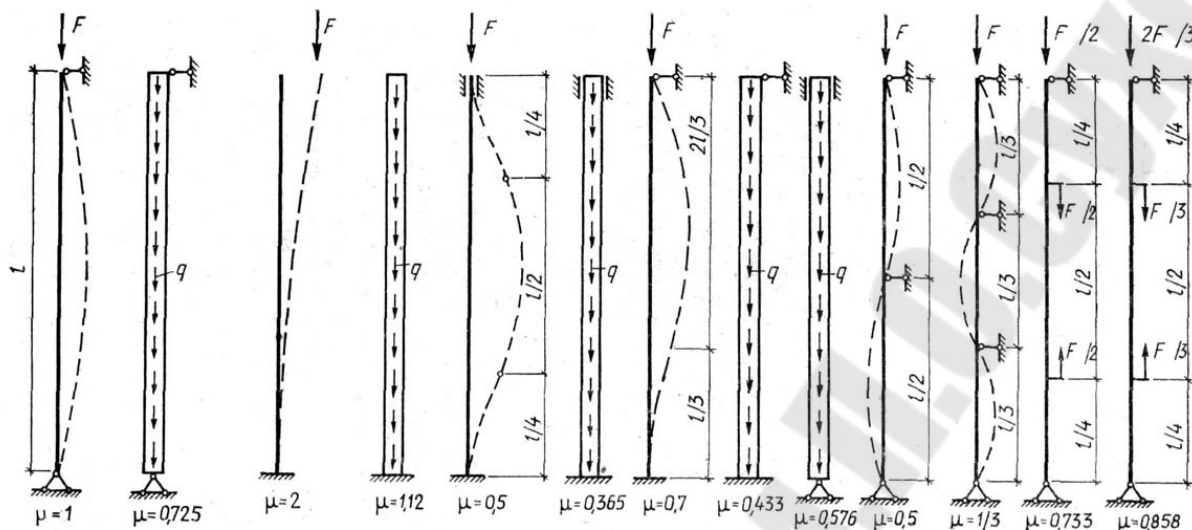


Рис. 61. Схемы стержней и коэффициенты приведенной длины

Если стержень в двух взаимно перпендикулярных плоскостях имеет неодинаковые схемы, то необходимо стремиться к равенству гибкостей в этих плоскостях или к условному равенству. Условия равных гибкостей можно записать, например, в виде

$$\lambda_{XZ} = \lambda_{YZ}.$$

Условие устойчивости имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi[\sigma],$$

где N – продольная сила, $N = F$;

φ – коэффициент продольного изгиба или коэффициент понижения допускаемых напряжений $[\sigma]$.

Коэффициент продольного изгиба определяется исходя из расчетной гибкости стержня по формулам или таблицам. В таблице 6 приведены коэффициенты продольного изгиба для некоторых материалов.

Таблица 6

Коэффициенты продольного изгиба для некоторых материалов

Гибкость λ	Значения φ для							
	сталь			чугун		Дерево независимо от породы	Бетон	
	Ст. 0	Ст. 5	НЛ-2	СЧ 15-30	СЧ 21-14		тяжелый	легкий
	Ст. 2	НЛ-1		СЧ 15-15	СЧ 28-48			
Ст. 3			СЧ 15-36					
Ст. 4			СЧ 41-40					
0	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,99	1	1
20	0,97	0,95	0,95	0,91	0,87	0,97	0,96	0,96
30	0,95	0,93	0,93	0,81	0,75	0,92	0,90	0,86
40	0,92	0,90	0,90	0,69	0,60	0,87	0,84	0,73
50	0,89	0,84	0,83	0,57	0,43	0,80	0,76	0,68
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,71	0,70	0,59
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,61	0,63	0,52
80	0,75	0,66	0,63	0,26	0,18	0,49	0,57	0,46
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,38	0,51	–
100	0,60	0,50	0,45	0,16	0,12	0,31	0,45	–
110	0,52	0,43	0,39	–	–	0,26	–	–
120	0,45	0,38	0,33	–	–	0,22	–	–
130	0,40	0,32	0,29	–	–	0,18	–	–
140	0,36	0,28	0,26	–	–	0,15	–	–
150	0,32	0,27	0,23	–	–	0,14	–	–
160	0,29	0,24	0,21	–	–	0,12	–	–
170	0,26	0,21	0,19	–	–	0,11	–	–
180	0,23	0,19	0,17	–	–	0,10	–	–
190	0,21	0,17	0,15	–	–	–	–	–
200	0,19	0,16	0,14	–	–	–	–	–

Задача № 24.

Для заданной стойки (рис. 62), устройство опор которой дано в двух проекциях, подобрать размеры поперечного сечения её элементов, если допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma]=160\text{МПа}$, модуль продольной упругости $E=2\cdot 10^5\text{ МПа}$, материал элементов Ст. 3. Элементы приварены друг к другу.

Исходные данные к расчету:

$$F = 200 \text{ кН}; l = 3 \text{ м};$$

сечение – два неравнополочных уголка ГОСТ 8510-86.

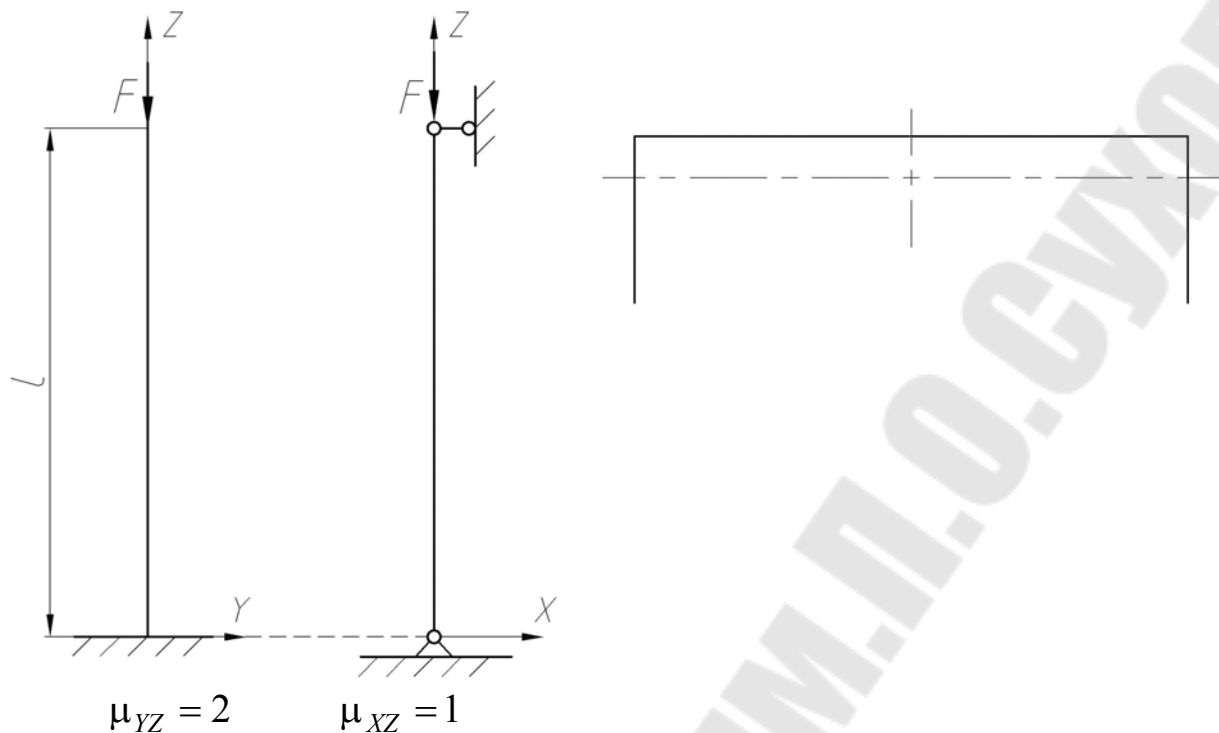


Рис. 62. Стержень в двух проекциях и его поперечное сечение

Решение.

1. Определяем размеры сечения из условия устойчивости

Принимаем в первой попытке $\varphi_1 = 0,5$.

$$A_{\text{ТРЕБ}} \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{200000}{0,5 \cdot 160} = 2500 \text{ мм}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

$$A_{\text{угол}} \geq \frac{A_{\text{ТРЕБ}}}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Из таблицы 3 сортамента прокатной стали выбираем уголок 100x65x8: $A = 12,73 \text{ см}^2$; $I_X = 128,31 \text{ см}^4$; $I_Y = 42,96 \text{ см}^4$; $x_0 = 1,56 \text{ см}$; $y_0 = 3,28 \text{ см}$; $B = 100 \text{ мм}$; $b = 65 \text{ мм}$.

2. Располагаем сечение рационально, исходя из условия равных гибкостей

$$\lambda_{XZ} = \lambda_{YZ},$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{XZ} &= \frac{\mu_{XZ} l}{i_Y} = \frac{l}{i_Y}, \\ \lambda_{YZ} &= \frac{\mu_{YZ} l}{i_X} = \frac{2l}{i_X}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow i_Y < i_X, I_Y < I_X.$$

Сечение необходимо расположить таким образом, чтобы момент инерции сечения относительно оси X был наибольшим.

Определим моменты инерции сечения (рис. 63) относительно вспомогательных осей $Uc-Vc$.

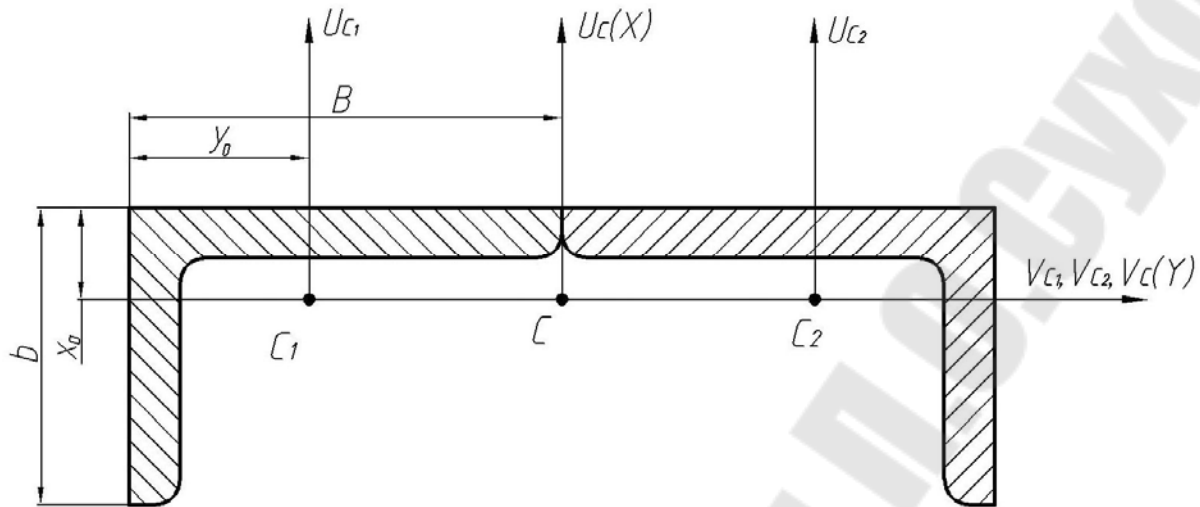


Рис. 63. Расчетная схема поперечного сечения

$$I_{Vc} = 2I_Y^{y^2} = 2 \cdot 42,96 = 85,92 \text{ см}^4;$$

$$I_{Uc} = 2(I_X^{y^2} + A(B - y_0)^2) = 2 \cdot (128,31 + 12,73 \cdot (10 - 3,28)^2) = 1406,3 \text{ см}^4.$$

Таким образом, т.к. $I_{Vc} < I_{Uc}$, то ось Uc соответствует оси X , а ось Vc – оси Y .

Тогда

$$I_Y = 85,92 \text{ см}^4; I_X = 1406,3 \text{ см}^4.$$

$$i_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{1406,3}{2 \cdot 12,73}} = 7,43 \text{ см};$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{85,92}{2 \cdot 12,73}} = 1,83 \text{ см}.$$

$$\lambda_{XZ} = \frac{1 \cdot 300}{1,83} = 163,93,$$

$$\lambda_{YZ} = \frac{2 \cdot 300}{7,43} = 80,75.$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} = \lambda_{XZ} = 163,93.$$

Уточним коэффициент φ_1 , используя таблицу коэффициентов продольного изгиба:

$$\varphi_{160} = 0,29; \varphi_{170} = 0,26.$$

$$\varphi_1 = \varphi_{163,93} = \varphi_{160} - \frac{\varphi_{160} - \varphi_{170}}{10} \cdot 3,93 = 0,29 - \frac{0,29 - 0,26}{10} \cdot 3,93 = 0,2782.$$

Проверка

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_1' \cdot A} = \frac{200000}{0,2782 \cdot 2 \cdot 12,73 \cdot 10^{-4}} = 282,3 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Условие устойчивости не выполняется.

Перегрузка составляет

$$\Delta\sigma = \frac{282,3 - 160}{160} 100\% = 76 \%!!! - \text{Это очень значительная перегрузка.}$$

Во второй попытке принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1' + \varphi_1}{2} = \frac{0,2782 + 0,5}{2} = 0,39.$$

$$A_{ТРЕБ} \geq \frac{200000}{0,39 \cdot 160} = 32 \text{ см}^2; \quad A_{угол} = \frac{32}{2} = 16 \text{ см}^2.$$

Выбираем уголок 125x80x8:

$$A = 15,98 \text{ см}^2; \quad I_X = 225,62 \text{ см}^4; \quad I_Y = 80,95 \text{ см}^4; \quad x_0 = 1,84 \text{ см}; \\ y_0 = 4,05 \text{ см}; \quad B = 125 \text{ мм}; \quad b = 80 \text{ мм}.$$

Определим моменты и радиусы инерции сечения

$$I_Y = 2I_Y^{y^2} = 2 \cdot 80,95 = 161,9 \text{ см}^4;$$

$$I_X = 2(I_X^{y^2} + A(B - y_0)^2) = 2 \cdot (225,62 + 15,98 \cdot (12,5 - 4,05)^2) = 2733,3 \text{ см}^4.$$

Тогда

$$i_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{2733,3}{2 \cdot 15,98}} = 9,2 \text{ см};$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{161,9}{2 \cdot 15,98}} = 2,25 \text{ см}.$$

$$\lambda_{XZ} = \frac{1 \cdot 300}{2,25} = 133,3, \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_{\max} = \lambda_{XZ} = 133,3. \\ \lambda_{YZ} = \frac{2 \cdot 300}{9,2} = 65,2. \end{array} \right.$$

Уточним коэффициент φ_2 :

$$\varphi_{130} = 0,40; \quad \varphi_{140} = 0,36.$$

$$\varphi_2 = \varphi_{133,3} = \varphi_{130} - \frac{\varphi_{130} - \varphi_{140}}{10} \cdot 3,3 = 0,40 - \frac{0,40 - 0,36}{10} \cdot 3,3 = 0,387.$$

Проверка

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_2' \cdot A} = \frac{200000}{0,387 \cdot 2 \cdot 15,98 \cdot 10^{-4}} = 161,7 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Условие устойчивости не выполняется.

Перегрузка составляет

$$\Delta\sigma = \frac{161,7 - 160}{160} 100\% = 1 \text{ \%!!!} - \text{перегрузка меньше допустимой } 5\%.$$

Для дальнейшего расчета оставляем уголок 125x80x8.

Определяем критическую силу.

Критическая сила определяется исходя из величины расчетной гибкости. Если расчетная гибкость больше предельной для данного материала расчет ведется по формуле Эйлера, если меньше – по формуле Ясинского:

$$\text{формула Эйлера} - F_{KP} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} A;$$

$$\text{формула Ясинского} - F_{KP} = A(a - b \cdot \lambda_{\max}),$$

где $a = 310$ МПа и $b = 1,14$ МПа для стали Ст.3.

Так как $\lambda_{\max} > \lambda_{\text{пред}} = 100$ (для стали) критическую силу определяем по формуле Эйлера

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} A = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{(133,3)^2} \cdot 2 \cdot 15,98 \cdot 10^{-4} = 355 \text{ кН.}$$

Определяем коэффициент запаса прочности

$$n_y = \frac{F_{kp}}{F} = \frac{355}{200} = 1,78.$$

12. УДАРНЫЕ НАГРУЗКИ

При ударе скорость ударяемого груза быстро доходит до нуля, а напряжения и деформации в ударяемом теле достигают наибольших значений. Затем происходит постепенное затухание колебаний тел и устанавливается *статическое равновесие*, т.е. напряжения и деформации уменьшаются до величин соответствующих статическому приложению ударяющего груза.

Необходимо отметить, что точное решение задачи при ударе очень сложное. Трудности вызываются такими факторами, как волновой характер деформаций, пластическими свойствами различных материалов и т.д. Для упрощения решения задачи вводятся некоторые допущения и ограничения.

Будем рассматривать такие задачи, где удар вызывает только упругие деформации и только первый период удара, когда скорость

ударяющего груза падает от максимума до нуля и в момент соприкосновения с ударяемым телом остается связанным с ним во время всего дальнейшего движения.

Будем также считать, что ударяющий груз является абсолютно жестким телом, а также допустим, что деформации в стержне от ударяющего груза распространяющиеся по всей длине, подчиняются закону Гука, т.е. связь между динамическими силами (напряжениями) и перемещениями (деформациями) остается такой же, как и при статической нагрузке.

Основным показателем удара является динамический коэффициент

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{CT}}},$$

где H – высота падения груза. Если $H = 0$ имеем наименьшее значение динамического коэффициента – $k_{\partial} = 2$;

Δ_{CT} – статическое перемещение точки удара.

Задача № 25

Для заданной упругой системы (рис. 64,а) определить максимальные динамические напряжения, возникающие при ударе о нее груза массой $m = 50$ кг, падающего с высоты $H = 0,4$ м, а так же величину перемещения сечения в месте удара по его направлению. Материал системы – сталь, модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $d = 50$ мм; $l = 1,5$ м.

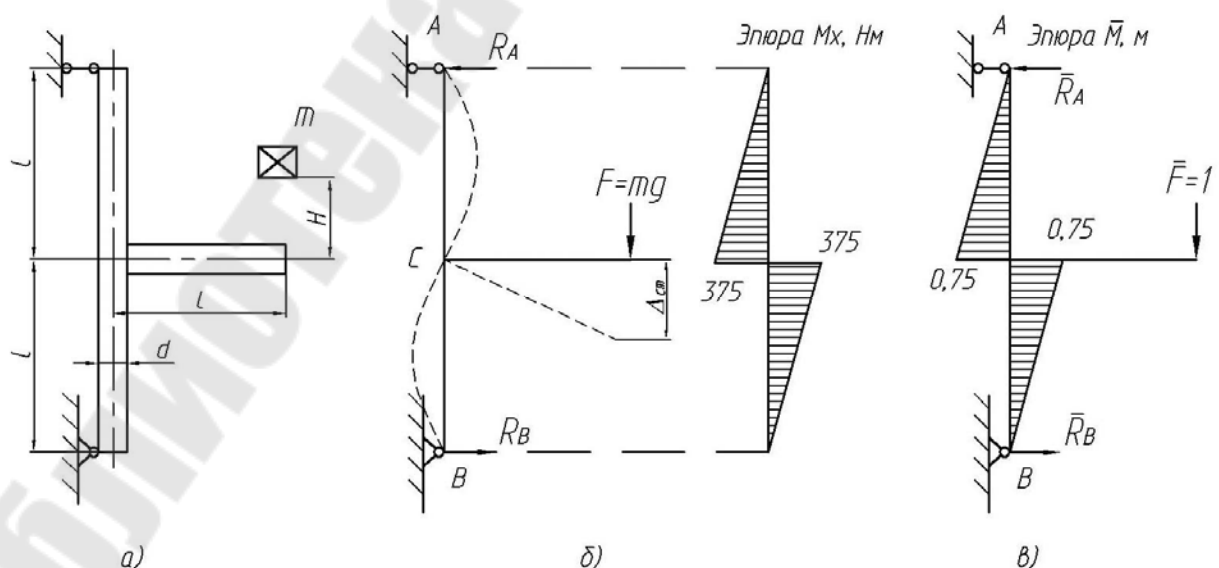


Рис. 64. Расчетная схема и эпюры моментов.

Решение.

1. Определяем статическое перемещение точки удара.

Для этого рассмотрим в статике схему приложения к балке силы

$$F = mg \approx 50 \cdot 10 = 500 \text{ Н.}$$

Определим опорные реакции и построим эпюру изгибающих моментов (рис. 64,б). Будем считать, что рычаг, на который падает груз, является жестким.

Тогда

$$R_A = R_B = \frac{Fl}{2l} = \frac{500 \cdot 1,5}{2 \cdot 1,5} = 250 \text{ Н.}$$

$$M_A = M_B = 0;$$

$$M_C^{BEPX} = R_A l = 250 \cdot 1,5 = 375 \text{ Нм;}$$

$$M_C^{HIZ} = R_B l = 250 \cdot 1,5 = 375 \text{ Нм.}$$

Приложим к точке удара единичную силу $\bar{F} = 1$ и аналогично определим опорные единичные реакции и построим единичную эпюру (рис. 64,в).

$$\bar{R}_A = \bar{R}_B = \frac{\bar{F}l}{2l} = \frac{1 \cdot 1,5}{2 \cdot 1,5} = 0,5.$$

$$\bar{M}_A = \bar{M}_B = 0;$$

$$\bar{M}_C^{BEPX} = \bar{R}_A l = 0,5 \cdot 1,5 = 0,75 \text{ м;}$$

$$\bar{M}_C^{HIZ} = \bar{R}_B l = 0,5 \cdot 1,5 = 0,75 \text{ м.}$$

Произведем перемножение эпюр друг на друга и получим искомое перемещение. При этом искомое перемещение будет выражать собой угол поворота сечения C.

$$\Theta_C = \sum \frac{1}{EI_X} \omega_i y_{Ci} = \frac{1}{EI_X^{AC}} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 375 \right) + \frac{1}{EI_X^{BC}} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 375 \right) = \frac{140,625}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,07 \cdot 10^{-7}} + \frac{140,625}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,07 \cdot 10^{-7}} =$$
$$= 0,00458 \text{ рад.}$$

$$I_X^{AC} = I_X^{BC} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 0,05^4}{64} = 3,07 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4.$$

Тогда, линейное перемещение точки удара, соответствующее перемещению по окружности, можно определить из выражения

$$\delta_{CT} = \Theta_C l = 4,58 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 = 6,87 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 6,87 \text{ мм.}$$

2. Определяем максимальное статическое напряжение. Оно воз-

никнет в сечении с наибольшим изгибающим моментом, если жесткость балки постоянна. Если жесткость балки непостоянная, то необходимо учитывать в расчете несколько предполагаемых опасных сечений.

В нашем случае опасными сечениями являются сечения, расположенные в непосредственной близости (в окрестностях) от сечения C ($M_X^{\max} = 375$ Нм). Поэтому имеем

$$\sigma_{CT}^{\max} = \sigma_C = \frac{M_X^{\max}}{W_X}.$$

Определим момент сопротивления сечения изгибу

$$W_X = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 0,05^3}{32} = 1,23 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

$$\sigma_C = \frac{375}{1,23 \cdot 10^{-5}} = 30,48 \cdot 10^6 \text{ Па} = 30,48 \text{ МПа}.$$

3. Динамический коэффициент

$$K_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{\delta_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 400}{6,87}} = 11,84.$$

4. Динамическое перемещение точки удара и максимальное динамическое напряжение определим по формулам

$$\delta_\delta = \delta_{CT} \cdot K_\delta = 6,87 \cdot 11,84 = 81,3 \text{ мм};$$

$$\sigma_\delta = \sigma_{CT} \cdot K_\delta = 30,48 \cdot 11,84 = 360,9 \text{ МПа}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Белявский С. М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. М. 1964
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М. 1986.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М. 1976.
4. Беляев Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов. М. 1972.
5. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М. 1989.
6. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. И.Н. Миролюбов и др. М. 1974, 1969, 1985.
7. Рудицын М.Н. и др. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Мн. 1970.
8. Ицкович Г.Н. и др. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. М. 1970.
9. Сборник задач по сопротивлению материалов. Под ред. В.К. Качурин. М. 1970.
10. Справочник по сопротивлению материалов. / Е.Ф. Винокуров и др./ Мн. 1988. – 464 с.

Родзевич Павел Евгеньевич
Орлов Сергей Алексеевич

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Методические указания
по решению расчетно-графических и контрольных работ
по одноименному курсу для студентов
дневной и заочной форм обучения

Подписано в печать 22.10.09.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 6,97. Уч.-изд. л. 5,98.

Изд. № 137.

E-mail: ic@gstu.gomel.by

<http://www.gstu.gomel.by>

Отпечатано на цифровом дуплекаторе
с макета оригинала авторского для внутреннего использования.

Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого».

246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.