Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

ФИЗИКА

В. Ю. УРБАХ

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 21 XII 1954)

I. Кривое „непифагорово" пространство. Успехи общей теории относительности наводят на мысль использовать геометрический метод также в теории векторных полей, имея в виду получить известное (нелинейное) обобщение теории. При этом векторному полю следует сопоставить некоторое вспомогательное „непифагорово" 4-пространство, в котором $ds = \gamma_l dx^l$.

В искривленном — неевклидовом — пространстве надо различать ко- и контравариантные компоненты тензоров, причем $A^l = b^{ik} A_k$, $A_l = b_{lk} A^k$, где b_{ik} и b^{ik} — некоторые (полагаемые симметричными) коэффициенты, которые, вообще говоря, определяются метрикой пространства, т. е. являются функциями от γ_l. Из совместности этих двух систем уравнений следует, что $b^{il} b_{kl} = \delta^i_k$. Условием евклидовости пространства будет $A_l \equiv A^l$; в этом случае $b_{ik} = b^0_{ik} = \delta_{ik}$.

Всем этим условиям удовлетворяют

$$b_{ik} = {}^1/_2 (\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i)\, e_l \qquad (1)$$

($e_1 = e_2 = e_3 = 1$, $e_4 = -1$; индекс при e_l в суммировании не участвует), т. е. γ_l являются обобщением дираковских матриц.

Из условия $\delta \int ds = 0$ получается уравнение геодезической линии в виде

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_k \frac{dx^k}{ds} = 0, \qquad (2)$$

где

$$\Gamma^i_k = \Gamma_{km} b^{mi}, \qquad \Gamma_{km} = \frac{\partial \gamma_m}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma_k}{\partial x^m}. \qquad (3)$$

Введя трехиндексные коэффициенты связности $\Gamma_{ik,l} = {}^1/_2 (\Gamma_{il} \gamma_k + \Gamma_{kl} \gamma_i)$, $\Gamma^m_{ik} = \Gamma_{ik,l} b^{lm}$, можно уравнение геодезической линии записать в обычном римановом виде:

$$\frac{d^2 x^m}{ds^2} + \Gamma^m_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \qquad (4)$$

При помощи (4) можно получить определение ковариантных производных ко-, контравариантных и смешанных тензоров в обычной форме, но с другими Γ^m_{ik}.

Вычисление разности $\{(A_l)_k\}_l - \{(A_i)_l\}_k$ приводит, как и в римановой геометрии, к тензору кривизны B^m_{ikl}, также имеющему обычный вид. При $m = l$ получается свернутый тензор 2-го ранга $R_{ik} = B^m_{ikm}$.

Далее используется вариационный принцип (например, для свободного поля) $\delta S_\gamma = 0$, где $S_\gamma = \xi \int R \sqrt{b}\, d\Omega = \xi \int \sqrt{b} R_{ik}\, b^{ik}\, d\Omega$. После довольно-

но длинных вычислений (причем выделяются интегралы от полных производных типа дивергенции) получается $S_\gamma = \int L\sqrt{b}d\Omega$, где

$$L = \xi^{3}/_{4}\,\Gamma_{im}\Gamma_{kn}b^{ik}b^{mn} = \xi^{3}/_{4}\Gamma_{im}\Gamma^{im}, \tag{5}$$

т. е. имеет место естественное обобщение максвелловского лагранжиана $L_0 = -\frac{1}{16\pi}F_{im}F_{im}$; лагранжиан (5) является инвариантом в неевклидовом пространстве, определяемом метрикой $ds = \gamma_i dx^i$. С другой стороны, естественным образом выполняется программа Ми: наряду с тензором Γ_{im} имеется тензор $\Gamma^{im} = f(\Gamma_{im}, \gamma_i)$. Сравнивая с электродинамикой общей теории относительности, где $F^{ik} = F_{mn}g^{im}g^{kn}$, можно также сказать, что воздействие на электромагнитное поле гравитационного поля заменяется самодействием того же электромагнитного поля.

Для контравариантных компонент тензора энергии — импульса получается

$$T^{ik} = T^l_s b^{sk} = \lambda\left(\Gamma_{sn}\Gamma^{in} - {}^{1}/_{4}b^l_s\Gamma_{mn}\Gamma^{mn}\right)b^{sk}. \tag{6}$$

Подходящим преобразованием координат можно добиться выполнения условий $b_{ik} = 0$ при $i \neq k$, так что $b^{(ii)} = 1/b_{(ii)}$ (по индексам, взятым в скобки, суммирования нет); тогда $b_{(ii)} = e_i\gamma_i^2$, $\gamma^i = e_i\gamma_i^{-1}$, так что

$$L = {}^{3}/_{4}^{\xi}\Gamma_{km}\Gamma_{km}\gamma^{-2}_{(k)}\gamma^{-2}_{(m)}e_ke_m, \tag{7}$$

$$T^{ik} = \lambda\left(\Gamma_{im}\Gamma_{km}\gamma^{-2}_{(i)}\gamma^{-2}_{(k)}\gamma^{-2}_{(m)}e_ie_ke_m - {}^{1}/_{4}\Gamma_{mn}\Gamma_{mn}\gamma^{-2}_{(m)}\gamma^{-2}_{(n)}b^{ik}e_me_n\right), \tag{8}$$

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} = e_i\gamma^{-2}_{(i)}\Gamma_{ik}\frac{dx^k}{ds}. \tag{9}$$

После того как получены эти фундаментальные выражения, можно оставить в стороне геометрическую интерпретацию и в дальнейшем рассматривать величины γ_i просто как характеристики поля. При этом в классическом приближении условие коммутации (1) отпадает.

II. Электромагнитное поле. Соотношения (7), (8), (9) можно применить к описанию электромагнитного поля. Для слабых полей получается электродинамика Максвелла — Лоренца, и сравнение с соответствующими выражениями последней позволяет установить связь между Γ_{im} и F_{im} и определить коэффициенты ξ и λ. Получается:

$$\gamma_i = \gamma_i^0 + h_i; \quad \gamma_\alpha^0 = 1\ (\alpha = 1, 2, 3), \quad \gamma_4^0 = i;$$
$$h_i = \frac{e}{m_0c^2}\varphi_i, \qquad \varphi_i = (\mathbf{A}, i\varphi), \tag{10}$$

$$L = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_0c^2}{e}\right)^2\left(\frac{\partial\gamma_m}{\partial x^k}\frac{\partial\gamma_m}{\partial x^k} - \frac{\partial\gamma_m}{\partial x^k}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x^m}\right)\gamma^{-2}_{(k)}\gamma^{-2}_{(m)}e_ke_m, \tag{11}$$

где e и m_0 — заряд и масса покоя пробного тела. Следует заметить, что свойства пробного тела входят в данную теорию существенным образом, так как они дают критерий малости (и, следовательно, линейности) поля: энергия заряда в поле должна быть много меньше собственной энергии заряженного тела, т. е. $e\varphi_i \ll m_0c^2$ или $h_i \ll \gamma_i^0$.

Уравнения свободного поля получаются, как обычно, в виде эйлеровых уравнений. Эти уравнения могут быть решены для случая статического сферически-симметричного поля. В этом случае $G^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$), а $G^4 = 0$ дает уравнение

$$\gamma_4'' + \frac{2}{r}\gamma_4' - \gamma_4'^2\gamma_4^{-1} = 0, \tag{12}$$

которое подстановкой $\gamma_4 = e^{\mu}$ приводится к линейному уравнению $\mu'' + \frac{2}{r}\mu' = 0$. Окончательно получается

$$\varphi = \frac{m_0 c^2}{e}\left[\exp\left(\frac{e}{m_0 c^2}\frac{\varepsilon}{r}\right) - 1\right],$$

где ε — константа интегрирования — есть заряд источника поля.

В качестве пробного заряда естественно взять электрон. Тогда для поля, создаваемого другим электроном, следует принять $\varepsilon = e$, так что $\frac{e}{m_0 c^2}\varepsilon = \frac{e^2}{m_0 c^2} = r_0$, и поэтому

$$\varphi = \frac{e}{r_0}(e^{r_0/r} - 1), \tag{13}$$

что при слабом поле (при $r \gg r_0$) дает обычный кулоновский потенциал. При $r \to 0$ потенциал, начиная с расстояний $\sim r_0$, очень круто возрастает, так что можно считать, что при столкновении два электрона ведут себя как твердые шарики радиуса $\sim r_0$.

Если использовать потенциал (13) для вычисления полной энергии электромагнитного поля электрона, приняв для T^{44} статического сферически-симметричного поля выражение, вытекающее из (с), то получится

$$m_{\text{кл}} = \frac{e^2}{2c^2}\int_0^{\infty} e^{-2r_0/r}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4}m_0,$$

где m_0 — полная масса электрона; вопрос о природе „затравочной" массы остается открытым.

Для расчета квантовой добавки $\Delta m_{\text{кв}}$ к массе электрона электромагнитное поле надо проквантовать. Это можно сделать, более или менее предварительно, следующим образом. В нелинейной теории для энергии заряда, помещенного в поле другого заряда, вместо $E_1 = e\varphi_1 = e^2/r$ получается $E = e\varphi = \frac{e^2}{r_0}(e^{r_0/r} - 1) = m_0 c^2 (e^{E_1/m_0 c^2} - 1)$. Если перенести это соотношение на энергию фотонов, то будет

$$\omega = \omega_0 (e^{\omega_1/\omega_0} - 1), \tag{14}$$

где $\omega_0 = m_0 c^2/\hbar$ есть та критическая частота, при которой энергия кванта равна энергии покоя частицы, с которой взаимодействует квантованное поле. Применение подстановки (14) в обычном выражении квантовой электродинамики тогда дает:

$$\Delta m_{\text{кв}} = \frac{\alpha}{\pi} m_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{e^{\xi} - 1} \approx 0{,}77\,\alpha m_0, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}.$$

Если электрон находится в поле, создаваемом протоном (или позитроном), то $\varepsilon = -e$. Тогда $\frac{e}{m_0 c^2}\varepsilon = -r_0$ и

$$\varphi_- = \frac{e}{r_0}(e^{-r_0/r} - 1), \tag{13'}$$

так что $\varphi_-(0) = -e/r_0$. Различие потенциалов (13) и (13′) означает несимметричность теории относительно знака зарядов, что соответствует действительному положению вещей; для слабых полей (при $r \gg r_0$) теория, конечно, симметрична.

III. Мезонное поле. Лагранжиан векторного мезонного поля будет в рассматриваемой теории иметь вид:

$$\tilde{L} = -\frac{1}{16\pi}\left(\frac{M_0 c^2}{g}\right)^2 \{\Gamma_{im}\Gamma^{im} - 2k_0^2(\gamma_m - \gamma_m^0)(\gamma^m - \gamma_0^m)\}, \tag{15}$$

где, как и ранее, $\gamma_\alpha^0 = 1$, $\gamma_0^\alpha = 1$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, $\gamma_4^0 = i$, $\gamma_0^4 = e_4/\gamma_4^0 = i$, а M_0, g, k_0 — те же, что и в линейной теории. Получающиеся отсюда уравне-

ния в случае статического сферически-симметричного поля имеют вид $\tilde{G}^{\alpha} \equiv 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$), а $\tilde{G}^{4} = 0$; если положить $\gamma_4 = i\eta$, это дает уравнение

$$\eta'' + \frac{2}{r}\eta' - \eta'^2\eta^{-1} - \frac{k_0^2}{2}(\eta^2 - 1) = 0, \tag{16}$$

которое для слабого поля ($\eta = 1 + y$, $y \ll 1$) переходит в обычное уравнение мезодинамики. При помощи подстановки $\eta = e^{\nu}$ из (16) получается также нелинейное уравнение

$$\nu'' + \frac{2}{r}\nu' - k_0^2 \operatorname{sh}\nu = 0, \tag{17}$$

которое, повидимому, не решается в элементарных функциях. Но если в разложении $\operatorname{sh}\nu = \nu + \frac{\nu^2}{3!} + \ldots$ ограничиться первым членом, то можно получить приближенное решение

$$\Phi_1 = \frac{g}{R_0}\left(e^{-\frac{R_0}{r}e^{-k_0 r}} - 1\right), \qquad R_0 = \frac{g^2}{M_0 c^2}. \tag{18}$$

Численное интегрирование (по методу Блесса) уравнения (16) дает точный потенциал — значения, отражаемые графиком (см. рис. 1); расстояния выражены в единицах $\Lambda = 1/k_0 = h/\mu c \approx 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ см, а потенциал — в единицах $M_0c^2/g = g/R_0$. Если считать, что $g^2/hc \approx 12$ (как это в последнее время принимается), то $R_0 \approx 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ см. Итак, те значения r ($\sim \Lambda$ и меньше), при которых потенциал заметно отличается от нуля, лежат целиком в области $< R_0$, где линейная теория уже неприменима. Следовательно, юкавский потенциал непригоден даже как первое приближение, что, повидимому и вызывает многие неувязки мезонной теории ядерных сил. Как видно из графика, приближенный потенциал (1с) довольно хорошо передает истинный ход кривой.

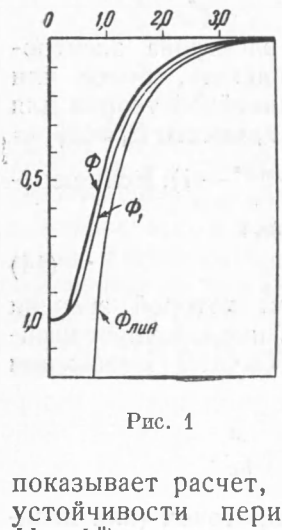


Рис. 1

При учете спиновых взаимодействий (нецентральные силы) в линейной мезодинамике возникает так называемая дипольная трудность. Как показывает расчет, вытекающее из теоремы вариала условие $\bar{E} < 0$ устойчивости периодического движения ($E = T + V = {}^1/_2 rV' + V$, а $V \sim \Phi''$) в развиваемой нелинейной теории выполняется при $r \sim 1{,}4\,\Lambda \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см, т. е. для всех r, где потенциал заметно отличен от нуля; следовательно, здесь дипольная трудность не возникает.

Нелинейная теория предусматривает наличие сил отталкивания между нуклонами как сил электрического происхождения. Именно, при уменьшении расстояния между протонами силы отталкивания между ними, в соответствии с (13), быстро растут, так что, несмотря на то, что $e < g$, они становятся больше сил притяжения. Это относится и к нейтрону, если, как обычно, считать, что он часть времени проводит в диссоциированном состоянии, и учесть, что отталкивание между одноименными электрическими зарядами вносит больший вклад, нежели притяжение между разноименными зарядами.

Автор благодарит проф. Д. Д. Иваненко и участников руководимого им семинара за ценные дискуссии при обсуждении результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 XI 1954