Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Б. ДАЦЕВ

О ТРЕХМЕРНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 I 1955)

Метод решения уравнения теплопроводности, который мы разработали для многослойной задачи теплопроводности в случае одного ([1]) или двух измерений ([2]), обобщается непосредственно для случая трех измерений.

Пусть S — гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая область R_2. Внешняя для S область R_1 бесконечная. R_1 и R_2 заняты однородными телами A_1 и A_2. Обозначим $u_i(x, y, z, t) = u_i(r, t)$ $(i = 1, 2)$ температуры R_i. Функции u_i удовлетворяют уравнениям теплопроводности

$$a_i^2 \Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

начальным условиям

$$u_i(r, 0) = \Phi_i(r) \tag{2}$$

и условиям непрерывности на S

$$u_1 = u_2, \tag{3}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu}; \tag{3'}$$

$\Phi_i(x, y, z)$ — ограниченная интегрируемая функция в R_i; ν — внутренняя нормаль S.

Нужно найти функции u_1, u_2, удовлетворяющие (1), (2), (3), (3').

Пусть α, β — две криволинейные координаты на S; s или σ — их совокупность; $M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(\alpha_0, \beta_0) = M_0(s_0)$ — точка S; $M_2(r)$ и $M_1(r)$ — точки R_2 и R_1. Обозначим $f(s, t) = f(\alpha, \beta, t)$ неизвестную температуру S. Температуру u_2 (соответственно u_1) можно представить в виде ([3], [4]).

$$u_2(r, t) = V_2(r, t) + W_2(r, t); \tag{4}$$

$$V_2(r, t) = \frac{1}{(2a_2\sqrt{\pi t})^3} \iiint_{R_2} \Phi_2(\xi, \eta, \zeta) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a_2^2 t}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta; \tag{5}$$

$$W_2(r, t) = \int_0^t d\tau \int_S d\sigma_2 \mu_2(\sigma_2, \tau) K_2(r, \sigma_2, t, \tau); \tag{6}$$

$$K_2 = \frac{\partial E_2}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\exp\left[-\frac{r_{02}^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right]}{4\alpha_2 \pi^{3/2} (t-\tau)^{3/2}} = \frac{\exp\left[-\frac{r_{02}^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right] r_{02} \cos(r_{02}, \nu)}{(2\sqrt{\pi} a_2)^3 (t-\tau)^{5/2}}. \tag{6'}$$

Функция W_2 (6) — тепловой потенциал двойного слоя на S плотностью $\mu_2(\alpha, \beta, t)$, $r_{02} = M_0M_2$.

Аналогично выражается функция u_1 в R_1.

Известно ([3], [4]), что W_2 имеет конечный разрыв на S. Когда точка M_2 стремится к точке $M_{02}(s)$ поверхности S, W_2 стремится к пределу, и в предельном выражении для W_2 μ_2 выходит за интеграл. Благодаря этому и условию, что $u_2 \to f$ на S, получим

$$\mu_2(s, t) + \int_0^t d\nu \int_S d\sigma_2 \mu_2(\sigma_2, \tau) K_2(s, \sigma_2, t, \tau) = f(s, t) - V_2(s, t). \quad (7)$$

Решение этого интегрального уравнения известно ([3]) и имеет вид

$$\mu_2(s, t) = f(s, t) + \int_0^t d\tau \int_S d\sigma_2 f(\sigma_2, \tau) K^2(s, \sigma_2, t, \tau) + V_2^1(s, t), \quad (8)$$

где K^2 — резольвента уравнения (7) и V_2^1 просто выражается через V_2 (5) и K^2.

Таким же образом найдем $\mu_1(s, t)$. Подставляя, соответственно, μ_2 (8) в W_2 (6) и μ_1 в W_1, выразим функции u_2, u_1 через $f(s, t)$. Так построенные функции u_2, u_1 удовлетворяют условию (3), и функцию f определим из условия (3′).

Составляем выражение $\partial u_2 / \partial \nu$ в точке M_2, близкой к точке M_{02} поверхности S. Пусть ν_1 и ν_2 — два направления, проходящих через точку M_2 и ν, ν_1, ν_2 взаимно перпендикулярны. Дифференцируя W_2 (6) по ν, получим под интегралом выражение

$$\frac{\partial K_2}{\partial \nu} = \frac{\partial^2 E_2}{\partial \nu_2} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial \nu_1^2} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial \nu_2^2}, \quad (9)$$

так как E_2 (6′) удовлетворяет (1). Аналогично выразим $\partial K_1 / \partial \nu$.

В условии (3′), проинтегрированном по t от 0 до T, заменим $\partial u_i / \partial \nu$, используя (9). Получается уравнение

$$\int_0^T dt \int_0^t d\tau \int_S d\sigma f(\sigma, \tau) \left\{ \frac{k_1}{a_1^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{k_2}{a_2^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} \right\} + \int_0^T dt \int_0^t d\tau \int_S d\sigma f(\sigma, \tau) N = M(s, T), \quad (10)$$

где $N(s, \sigma, t, \tau)$, $M(s, T)$ представляются посредством уже написанных выражений и выражение E_1 аналогично E_2 (6′).

Меняя в первом члене I_1 (10) порядок интегрирования по t и τ и интегрируя по t, найдем ($r_0 = M_0M_{02}$):

$$I_1 = \int_0^T d\tau \int_S d\sigma f(\sigma, \tau) E,$$

$$E = \frac{1}{4\pi^{3/2} (T - \tau)^{3/2}} \left(\frac{k_1}{a_1^3} \exp\left[- \frac{r_0^2}{4a_1^2 (T - \tau)} \right] + \frac{k_2}{a_2^3} \exp\left[- \frac{r_0^2}{4a_2^2 (T - \tau)} \right] \right). \quad (11)$$

(10) — интегральное уравнение первого рода для функции f. Его можно преобразовать в уравнение известного типа как в ([2]). Для этого

умножим (10) на $dT/\sqrt{T_0-T}$ и проинтегрируем его по T от 0 до T_0, имея в виду (11). Полученное уравнение дифференцируем по T_0. Таким образом найдем, как в (2), уравнение

$$Af(s,\ T_0)+\int_0^{T_0} d\tau\int_S d\sigma\, f(\sigma,\tau)\,Q(s,\sigma,T_0,\tau)=\frac{\partial}{\partial T_0}\int_0^{T_0}\frac{dT\,M(s,T)}{\sqrt{T_0-T}}, \qquad (12)$$

$$A=\sqrt{\pi}\left(\frac{k_1}{a_1}+\frac{k_2}{a_2}\right).$$

Функция Q выражается посредством написанных выше выражений.

Интегральное уравнение (12) для $f(\alpha,\beta,T_0)$ имеет вид уравнения (7). (Можно проверить, что ядро Q имеет слабую особенность и что правая часть (12) — ограниченная функция T_0.) Его решение известно (3). Следовательно будут известны и функции u_1, u_2, удовлетворяющие условиям (1), (2), (3), (3′), и этим поставленная задача решена.

Обозначим через OX нормаль ν в фиксированной точке O поверхности S. Выберем оси OY, OZ в плоскости, касательной к S в точке O, и деформируем S, пока она превратится в плоскость OYZ, и область R_2 займет пространство $x>0$. Если $\Phi_i(r)$ зависят только от x, найденное здесь решение превращается в решение для соответствующего линейного случая (1).

Рассмотрим случай, когда R_1 тоже конечная область, ограниченная гладкой поверхностью S_1 и содержащая S. Пусть на S_1 дана температура $f_1(\alpha_1,\beta_1,t)$, а другие условия те же, что выше. Неизвестную температуру S обозначим $f(\alpha,\beta,t)$. Функцию u_2 выражаем по формуле (4), а u_1 представим в виде $u_1=V_1+W_1^1+W_1^2$, где W_1^1, W_1^2 — тепловые потенциалы двойных слоев, распространенные на S_1 и S с неизвестными плотностями $\mu_1(\alpha_1,\beta_1,t)$, $\mu(\alpha,\beta,t)$. Из условий, что u_1 принимает на S_1 и S значения f_1, f, получаем для μ_1, μ систему двух интегральных уравнений вида (7), решения которых известны. Из (3′) определим функцию f изложенным способом посредством уравнения вида (12).

Последняя задача обобщается легко для случая n пространственных слоев $R_1,\ldots,R_n$, когда каждый слой R_i содержит слой R_{i+1}, и поверхность S_{i+1}, разделяющая слои R_i и R_{i+1}, гладкая. Определим температуры $u_1,\ldots,u_{n-1}$, если дана температура f_1 на S_1 и условия (2), (3), (3′), как в только что кратко разобранной задаче, а u_n для области R_n по формуле (4). Температуры $f_2,\ldots,f_n$ на $S_2,\ldots,S_n$ найдем из системы $n-1$ интегральных уравнений вида (10), соответственно (12), с известным решением. Аналогично можно решить задачу, когда какая-нибудь из областей, например R_1, имеет p границ $S_1,\ldots,S_p$. Тогда u_1 выражается через p двойных слоев плотностей $\mu_1,\ldots,\mu_p$, которые определяются посредством p интегральных уравнений вида (7). Случай, когда внешняя поверхность удаляется в бесконечность или имеет точки в бесконечности, получается простым граничным переходом. Если на внешней поверхности вместо u_1 даны значения $\partial u_1/\partial\nu$ или линейная зависимость между u_1 и $\partial u_1/\partial\nu$, задача решается аналогично. Тогда u_1 содержит потенциалы двойных слоев и один потенциал простого слоя плотностью $\mu_1(\alpha_1,\beta_1,t)$, распространенный на S_1. Решение задачи в этом случае не ведет к новым затруднениям.

Софийский государственный университет
София, Болгария

Поступило
3 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Дацев, ДАН, **56**, № 4 (1947); ДАН, **82**, № 6 (1952). [2] А. Б. Дацев, ДАН, **101**, № 5 (1955). [3] Г. Мюнц, Интегральные уравнения, 1934. [4] С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, 1947.