Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

ГИДРОМЕХАНИКА

В. П. КАРЛИКОВ

РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗИРОВАННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ О ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ*

(Представлено академиком Л. И. Седовым 2 III 1955)

В предлагаемой заметке дается решение осесимметричной задачи о сильном точечном взрыве в газе, плотность которого в невозмущенном состоянии распределена по закону:

$$\rho_1 = \rho_{01} - \varepsilon z^{\varkappa} = \rho_{01} - \varepsilon r^{\varkappa} \cos^{\varkappa} \theta; \tag{1}$$

Oz — вертикальная ось; r — расстояние до центра взрыва; θ — широта, отсчитываемая от вертикали; ρ_{01}, ε, $\varkappa$ — постоянные; ε достаточно мала.

Задача решается в обычной постановке о точечном взрыве ([1]). Считая, что выделяющаяся при взрыве энергия достаточно велика, в условиях на ударной волне пренебрегаем давлением в невозмущенном газе. Учет противодавления в линеаризированной постановке дан в ([2]).

Запишем решение задачи в виде:

$$p = p_0 + p'; \quad \rho = \rho_0 + \rho'; \quad v_r = v_{r_0} + v_r'; \quad v_\theta = v_\theta', \tag{2}$$

где p — давление; ρ — плотность; v_r — радиальная и v_θ — трансверсальная составляющие скорости; p_0, ρ_0, v_{r_0} — известные величины из решения задачи о сильном взрыве в среде с постоянной плотностью ρ_{01}, найденного Л. И. Седовым ([1, 2]); p', ρ', v_r', v_0' — малые добавки.

Мы ищем решение системы уравнений газовой динамики для осесимметричных адиабатических неустановившихся движений. Функции, входящие в эти уравнения, заменим безразмерными по формулам

$$v_r = \frac{r}{t}\overline{V}_r(\mu, \lambda, \theta); \quad v_\theta = \frac{r}{t}\overline{V}_\theta(\mu, \lambda, \theta); \quad \rho = \rho_{01}\overline{R}(\mu, \lambda, \theta);$$

$$p = \frac{r^2\rho_{01}}{t^2}\overline{P}(\mu, \lambda, \theta),$$

где $\lambda = \frac{E_0}{\rho_{01}}\frac{t^2}{r^5}$; $\quad \mu = \frac{\varepsilon}{\rho_{01}} r^{\varkappa}$. E_0 — величина, пропорциональная энергии взрыва.

Вариации v_r', v_θ', p', ρ' по μ при малых μ имеют вид:

$$v_r' = \frac{r^{\varkappa+1}}{t}\frac{\varepsilon}{\rho_{01}} V_r(\lambda, \theta); \quad v_\theta' = \frac{r^{\varkappa+1}}{t}\frac{\varepsilon}{\rho_{01}} V_\theta(\lambda, \theta);$$

$$\rho' = r^{\varkappa}\varepsilon R(\lambda, \theta); \quad p' = \frac{\varepsilon r^{\varkappa+2}}{t^2} P(\lambda, \theta). \tag{3}$$

Варьируя уравнения газовой динамики и подставляя в них (3), получим следующую систему:

$$1.\ \lambda(2 - 5V_{r_0})\frac{\partial R(\lambda, \theta)}{\partial\lambda} - 5\lambda R_0 \frac{\partial V_r(\lambda, \theta)}{\partial\lambda} + \left[(\varkappa + 3) R_0 - 5\lambda\frac{dR_0}{d\lambda}\right] V_r(\lambda, \theta) +$$

$$+ \left[(\varkappa + 3) V_{r_0} - 5\lambda\frac{dV_{r_0}}{d\lambda}\right] R(\lambda, \theta) + R_0\frac{\partial V_\theta(\lambda, \theta)}{\partial\theta} + R_0 \operatorname{ctg}\theta V_\theta(\lambda, \theta) = 0.$$

* Доложено на семинаре в МГУ в октябре 1954 г.

2. $$\lambda(2-5V_{r_0})R_0\frac{\partial P}{\partial\lambda}-\gamma\lambda P_0(2-5V_{r_0})\frac{\partial R}{\partial\lambda}+$$
$$+\left\{\gamma\lambda(5V_{r_0}-2)\frac{dR_0}{d\lambda}+R_0[(\varkappa+2)V_{r_0}-2]\right\}P(\lambda,\ \theta)+$$
$$+\left\{\lambda(2-5V_{r_0})\frac{dP_0}{d\lambda}+P_0[(2-\varkappa\gamma)V_{r_0}-2]\right\}R(\lambda,\ \theta)+$$
$$+\left\{\left(2P_0-5\lambda\frac{dP_0}{d\lambda}\right)R_0+5\gamma\lambda P_0\frac{dR_0}{d\lambda}\right\}V_r=0. \tag{I}$$

3. $$\lambda R_0(2-5V_{r_0})\frac{\partial V_r(\lambda,\ \theta)}{\partial\lambda}-5\lambda\frac{\partial P}{\partial\lambda}+R_0\left[(\varkappa+2)V_{r_0}-1-5\lambda\frac{dV_{r_0}}{d\lambda}\right]V_r(\lambda,\theta)+$$
$$+(\varkappa+2)P(\lambda,\ \theta)+\left[V_{r_0}^2-V_{r_0}+\lambda(2-5V_{r_0})\frac{dV_{r_0}}{d\lambda}\right]R(\lambda,\ \theta)=0.$$

4. $$\lambda R_0\ (2-5V_{r_0})\frac{\partial V_\theta(\lambda,\ \theta)}{\partial\lambda}+\frac{\partial P(\lambda,\ \theta)}{\partial\theta}+R_0[(\varkappa+2)V_{r_0}-1]\ V_\theta(\lambda,\ \theta)=0.$$

Здесь V_{r_0}, R_0, P_0 — известные функции от λ (1).

Соотношения на ударной волне при сделанных предположениях имеют вид (1):

$$v_2=\frac{2}{\gamma+1}D;\quad \rho_2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1;\quad p_2=\frac{2}{\gamma+1}\rho_1D^2, \tag{4}$$

где D — нормальная скорость ударной волны; ρ_1 — начальная плотность; v_2, ρ_2, p_2 — параметры за фронтом ударной волны ($\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_r+\mathbf{v}_\theta$). Для скорости D следует написать:

$$D=D_0+D'=\frac{2}{5}\frac{r_0^\bullet}{t}+\frac{r}{t}\mu\Delta(\theta). \tag{5}$$

На ударной волне можно считать $\lambda=1$ (2).

Подставляя в формулы (4) выражения (1), (2) и (5) и учитывая, что для решения $p_0(\lambda)$, $\rho_0(\lambda)$, $v_{r_0}(\lambda)$ также выполняются соотношения (4), получим после перехода к безразмерной форме:

$$V_{r2}(\theta)=\frac{2}{\gamma+1}\Delta(\theta);\quad R_2=-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\cos^\varkappa\theta;\quad P_2=\frac{8}{5(\gamma+1)}\left[\Delta(\theta)-\frac{\cos^\varkappa\theta}{5}\right]. \tag{6}$$

Для определения искомых функций V_r, V_θ, P, R имеем систему (I) и три условия на ударной волне (6). Четвертое условие будет получено ниже. Функцию $\Delta(\theta)$ также нужно найти.

Если искать решение системы (I) в виде

$$V_r(\lambda,\ \theta)=\mathfrak{N}(\theta)V_r(\lambda);\quad V_\theta(\lambda,\ \theta)=V_\theta(\theta)V_\theta(\lambda);\quad R(\lambda,\ \theta)=\mathfrak{N}(\theta)R(\lambda);$$
$$P(\lambda,\ \theta)=\mathfrak{N}(\theta)P(\lambda), \tag{7}$$

то получаются две системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\lambda(2-5V_{r_0})\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}-5\lambda R_0\frac{dV_r(\lambda)}{d\lambda}+\left(\varkappa+3-\frac{5\lambda}{R_0}\frac{dR_0}{d\lambda}\right)R_0V_r(\lambda)+$$
$$+\left[(\varkappa+3)V_{r_0}-5\lambda\frac{dV_{r_0}}{d\lambda}\right]R(\lambda)+k^2R_0V_\theta(\lambda)=0;$$
$$\lambda R_0(2-5V_{r_0})\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}-\gamma\lambda P_0(2-5V_{r_0})\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}+$$
$$+\left\{\gamma\lambda\frac{dR_0}{d\lambda}(5V_{r_0}-2)+R_0[(\varkappa+2)V_{r_0}-2]\right\}P(\lambda)+$$
$$+\left\{\lambda(2-5V_{r_0})\frac{dP_0}{d\lambda}+P_0[(2-\varkappa\gamma)V_{r_0}-2]\right\}R(\lambda)+$$
$$+\left\{\left(2P_0-5\lambda\frac{dP_0}{d\lambda}\right)R_0+5\gamma\lambda P_0\frac{dR_0}{d\lambda}\right\}V_r(\lambda)=0; \tag{A}$$

$$\lambda R_0(2-5V_{r_0})\frac{dV_r(\lambda)}{d\lambda}-5\lambda\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}+(\varkappa+2)P(\lambda)+$$
$$+R_0\left[(\varkappa+2)V_{r_0}-1-5\lambda\frac{dV_{r_0}}{d\lambda}\right]V_r(\lambda)+$$
$$+\left[V_{r_0}^2-V_{r_0}+\lambda(2-5V_{r_0})\frac{dV_{r_0}}{d\lambda}\right]R(\lambda)=0;$$
$$\lambda R_0(2-5V_{r_0})\frac{dV_\theta(\lambda)}{d\lambda}+R_0[(\varkappa+2)V_{r_0}-1]V_\theta(\lambda)-n^2P(\lambda)=0;$$
$$\frac{dV_\theta(\theta)}{d\theta}+\operatorname{ctg}\theta V_\theta(\theta)-k^2\mathfrak{N}(\theta)=0;\quad \frac{d\mathfrak{N}(\theta)}{d\theta}+n^2V_\theta(\theta)=0, \tag{B}$$

где k^2 и n^2 — постоянные. Система (B) имеет частное решение вида:

$$\mathfrak{N}(\theta)=\text{const}\cdot\mathscr{P}_\nu(\cos\theta),\quad V_\theta(\theta)=-\frac{\text{const}}{n^2}\frac{d\mathscr{P}_\nu(\cos\theta)}{d\theta}, \tag{8}$$

где $\mathscr{P}_\nu(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, причем $k^2n^2=\nu(\nu+1)$.

Пользуясь полученным набором выражений для функций $\mathfrak{N}(\theta)$ и $V_\theta(\theta)$ (при ν натуральных), можно для любого целого $\varkappa$ получить решение поставленной задачи, удовлетворяющее условиям (6), а также найти функцию $Д(\theta)$.

Пусть, например, $\varkappa=2$. Условия (6) на ударной волне имеют вид:

$$V_{r2}(\theta)=\frac{2}{\gamma+1}Д(\theta);\ R_2(\theta)=-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\cos^2\theta;\ P_2=\frac{8}{5(\gamma+1)}\left[Д(\theta)-\frac{\cos^2\theta}{5}\right]. \tag{9}$$

Система (1), в силу линейности, имеет решение вида:

$$\begin{aligned}
&P(\lambda,\theta)=1/2\ [(3\cos^2\theta-1)P(\lambda)+\overline{P}(\lambda)];\\
&R(\lambda,\theta)=1/2\ [(3\cos^2\theta-1)R(\lambda)+\overline{R}(\lambda)];\\
&V_r(\lambda,\theta)=1/2\ [(3\cos^2\theta-1)V_r(\lambda)+\overline{V}_r(\lambda)];\\
&V_\theta(\lambda,\theta)=\frac{3}{n^2}\sin\theta\cos\theta\,V_\theta(\lambda),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $P(\lambda)$, $R(\lambda)$, $V_r(\lambda)$, $V_\theta(\lambda)$ — решения системы (A) при условии, что $k^2n^2=6$, а $\overline{P}(\lambda)$, $\overline{R}(\lambda)$, $\overline{V}_r(\lambda)$ — решения системы $(\overline{A})$, получающейся из системы (A), если положить в ней $V_\theta(\lambda)\equiv0$ (4-е уравнение системы (A) для решения такого вида удовлетворяется тождественно).

Из (9) и (10) следует, что

$$Д(\theta)=C_1+C_2\cos^2\theta, \tag{11}$$

где C_1 и C_2 — неизвестные константы, подлежащие определению.

Для функций $P(\lambda)$, $R(\lambda)$, $V_r(\lambda)$, $V_0(\lambda)$ и $\overline{P}(\lambda)$, $\overline{R}(\lambda)$, $\overline{V}_r(\lambda)$ имеем следующие начальные условия:

$$P(1)=\frac{16}{15(\gamma+1)}\left(C_2-\frac{1}{5}\right);\quad R(1)=-\frac{2}{3}\frac{\gamma+1}{\gamma-1};\quad V_r(1)=\frac{4}{3(\gamma+1)}C_2; \tag{12}$$
$$\overline{P}(1)=\frac{16}{5(\gamma+1)}\left(C_1+\frac{C_2}{3}\right)-\frac{16}{75(\gamma+1)};\quad \overline{R}(1)=-\frac{2}{3}\frac{\gamma+1}{\gamma-1};$$
$$\overline{V}_r(1)=\frac{4}{\gamma+1}\left(C_1+\frac{C_2}{3}\right). \tag{13}$$

Согласно (5) и (11) можно написать:

$$D=D_0+D'=\frac{2}{5}\frac{r_0^*}{t}+\frac{r_0^{*3}}{t}\frac{\varepsilon}{\rho_{01}}C_1+\frac{r_0^{*3}}{t}\frac{\varepsilon}{\rho_{01}}C_2\cos^2\theta,\quad \text{где } r_0^*=\left[\frac{E_0}{\rho_{01}}\right]^{1/5}t^{2/5}. \tag{14}$$

Произведя интеграцию (14) по времени, получим выражение для радиуса-вектора поверхности ударной волны:

$$r^*=\left[\frac{E_0}{\rho_{01}}\right]^{1/5}t^{2/5}+C_1\left[\frac{E_0}{\rho_{01}}\right]^{2/5}\frac{\varepsilon}{\rho_{01}}\frac{5}{6}t^{6/5}+C_2\left[\frac{E_0}{\rho_{01}}\right]^{2/5}\frac{\varepsilon}{\rho_{01}}\frac{5}{6}t^{6/5}\cos^2\theta. \tag{15}$$

Пользуясь этим, для системы (A), сделав замену $V_0(\lambda) = n^2 \overline{V}_0(\lambda)$ получаем четвертое условие:

$$\overline{\overline{V}}_0(1) = \frac{4C_2}{9(\gamma+1)}. \tag{16}$$

Необходимо проинтегрировать систему (A) с начальными условиями (12) и (16) и систему ($\overline{\text{A}}$) с начальными условиями (13). Заметим, что поскольку в начальные условия неизвестная константа $C_1 + C_2/3$ входит линейно, а также в силу линейности системы ($\overline{\text{A}}$), ее решение имеет вид:

$$\overline{P}(\lambda) = \overline{P}_1(\lambda)(C_1 + C_2/3) + \overline{P}_2(\lambda); \quad \overline{R}(\lambda) = \overline{R}_1(\lambda)(C_1 + C_2/3) + \overline{R}_2(\lambda);$$
$$\overline{V}_r(\lambda) = \overline{V}_{r1}(\lambda)(C_1 + C_2/3) + \overline{V}_{r2}(\lambda); \tag{17}$$

$\overline{P}_1$, $\overline{R}_1$, $\overline{V}_{r1}$ и $\overline{P}_2$, $\overline{R}_2$, $\overline{V}_{r2}$ — частные решения системы ($\overline{\text{A}}$), соответствующие начальным условиям:

$$\overline{P}_1(1) = \frac{16}{5(\gamma+1)}; \quad \overline{R}_1(1) = 0; \quad \overline{V}_{r1} = \frac{4}{(\gamma+1)};$$
$$\overline{P}_2(1) = -\frac{16}{75(\gamma+1)}; \quad \overline{R}_2(1) = -\frac{2}{3}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}; \quad \overline{V}_{r2}(1) = 0. \tag{18}$$

В центре взрыва (т. е. при $\lambda = \infty$) скорость должна быть равна нулю. Отсюда следует, что

$$V_r(\lambda)|_{\lambda=\infty} = 0, \quad \overline{V}_r(\lambda)|_{\lambda=\infty} = 0. \tag{19}$$

Это и есть условие для определения постоянных C_1 и $(C_1 + C_2/3)$.

Вблизи центра взрыва общее решение системы ($\overline{\text{A}}$) имеет асимптотический вид:

$$\overline{P}(\lambda) = 0{,}048115a_1\lambda^{-3,5} + 0{,}01236a_2\lambda^{-2,5} + a_3\lambda^{0,8} + \ldots;$$
$$\overline{R}(\lambda) = a_1\lambda^{-0,5} + a_2\lambda^{-2,5} + \ldots; \quad \overline{V}_r(\lambda) = -0{,}08173a_1\lambda + \ldots, \tag{20}$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные.

Решения $\overline{P}_1$, $\overline{R}_1$, $\overline{V}_{r1}$ и $\overline{P}_2$, $\overline{R}_2$, $\overline{V}_{r2}$ вне некоторой окрестности центра взрыва находятся численным интегрированием системы ($\overline{\text{A}}$) с начальными условиями (18) и затем соответствующим подбором констант a_1, a_2, a_3 непрерывно сопрягаются с асимптотическим решением (20). Пусть для решения P_1, $\overline{R}_1$, $\overline{V}_{r1}$ получаем значения постоянных a_{11}, a_{21}, a_{31}, а для решения $\overline{P}_2$, $\overline{R}_2$, $\overline{V}_{r2}$ — a_{12}, a_{22}, a_{32}. Тогда, согласно условию (19), $C_1 + C_2/3 = -a_{12}/a_{11}$. Если $\varkappa = 1$, то нужно взять $\mathfrak{N}(0) = \cos\theta$ и $V_0(0) = \frac{\sin\theta}{n^2}$ (что соответствует $k^2n^2 = 2$). В остальном решение проводится точно так же, как и в случае $\varkappa = 2$, но из условия в центре взрыва следует положить $C_1 = 0$.

Автор статьи очень признателен Л. И. Седову, под руководством которого выполнена эта работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, ДАН, 52, № 1 (1946). [2] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, 1954.