Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

МАТЕМАТИКА

Я. В. ХИОН

УПОРЯДОЧЕННЫЕ АССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 XII 1954)

Кольцо R называется упорядоченным, если оно (линейно) упорядочено отношением $\geqslant$, причем упорядоченность связана с операциями кольца следующим образом:

если $a \geqslant b$, то $a + c \geqslant b + c$ при любом c из R;

если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $ab \geqslant 0$.

В работе автора [1] было дано описание всех архимедовски упорядоченных колец, т. е. таких упорядоченных колец, в которых из $a > b > 0$ следует существование такого натурального числа n, что $nb > a$. Доказано, что такие кольца могут быть только либо подкольцами поля действительных чисел, либо кольцами с нулевым умножением на подгруппах аддитивной группы действительных чисел, в обоих случаях с естественной упорядоченностью.

В настоящей работе изучаются упорядоченные ассоциативные кольца при помощи понятий выпуклого идеала, выпуклого подкольца и выпуклой подгруппы (подмножество A упорядоченного множества B называется выпуклым в B, если из $a_1, a_2 \in A$, $b \in B$ и $a_1 \leqslant b \leqslant a_2$ следует $b \in A$). Особая роль выпуклых идеалов определяется тем, что они совпадают с ядрами тех гомоморфизмов упорядоченного кольца, которые сохраняют порядок.

Неотрицательный элемент a упорядоченного кольца называется бесконечно малым, если для любого натурального числа n выполняется неравенство $na^2 \leqslant a$.

Элемент $a \geqslant 0$ называется конечным, если существуют такие натуральные числа m и n, что $ma^2 > a$ и $na > a^2$.

Элемент $a \geqslant 0$ называется бесконечно большим, если для всех натуральных n выполняется неравенство $na < a^2$.

Отрицательный элемент называется, соответственно, бесконечно большим, конечным или бесконечно малым, если таким является его противоположный элемент.

Всякий элемент упорядоченного кольца будет либо бесконечно малым, либо конечным, либо бесконечно большим. Обозначим рассматриваемое упорядоченное кольцо через R, множество всех его бесконечно малых элементов через M и множество всех бесконечно малых и конечных элементов через K. Под кольцом мы будем дальше всюду понимать ассоциативное кольцо.

Теорема 1. *Множество K является во всяком упорядоченном кольце R выпуклым подкольцом.*

Теорема 2. *В любом упорядоченном кольце R множество M является выпуклым двусторонним идеалом в K.*

Существуют упорядоченные кольца R, которые совпадают с K и даже с M; в последнем случае все элементы кольца будут бесконечно малыми. Существуют и такие упорядоченные кольца, для которых $M = 0$ и даже $K = 0$; в последних все элементы, кроме 0, будут бесконечно большими.

Теорема 3. *Если $R=K$, то всякая выпуклая подгруппа аддитивной группы кольца R будет двусторонним идеалом.*

Покажем, что выпуклая подгруппа, порожденная в таком кольце любым элементом a, является двусторонним идеалом. Мы можем предположить, что $a>0$ (случай $a<0$ сводится к этому). Докажем, что при $r>0$ элемент ar принадлежит этой подгруппе (случай $r<0$ сводится к этому). Так как $R=K$, то существует такое натуральное число n, что $r^2<pr$ для всех $p\geqslant n$. Отсюда следует, что $ar^2\leqslant par$. Если бы здесь для всех $p\geqslant n$ (или хотя бы для $p=n$ и $p=n+1$) стоял знак равенства, то отсюда следовало бы $ar=0$, и элемент ar принадлежал бы выпуклой подгруппе, порожденной элементом a. В противном случае будет существовать такое p, что $ar^2<par$. Отсюда $ar<pa$, так как из $ar\geqslant pa$ вытекало бы $ar^2\geqslant par$. Этим доказано, что ar содержится в рассматриваемой подгруппе. Аналогично можно показать, что эта подгруппа является и левым идеалом в R.

Теорема 4. *Если I является выпуклым правым идеалом упорядоченного кольца R и $I\neq R$, то $I\subset M$.*

Мы докажем следующее утверждение: если $a\notin M$, *то выпуклый правый идеал, порожденный элементом a, совпадает со всем кольцом.*

Можно опять предположить, что $a>0$, и лишь показать, что рассматриваемый идеал содержит все положительные r. Из $a\notin M$ следует существование такого натурального n, что $pa^2>a$ для всех $p\geqslant n$. Тогда при любом $r>0$ будет $pa^2r\geqslant ar$. Как и в теореме 3, здесь либо $a^2r=0$ и, тогда $ar=0$, либо существует такое p, что $pa^2r>ar$. Если $ar=0$, то из $r\geqslant a$ следовало бы, так как $a\notin M$, что $0=ar\geqslant a^2>0$, что невозможно. Поэтому $r<a$, т. е. r содержится в рассматриваемом идеале. Из неравенства же $pa^2r>ar$ следует, как и в теореме 3, что $par>r$. А это также означает, что r содержится в выпуклом правом идеале, порожденном элементом a.

Теорема 5. *Во всяком упорядоченном кольце R фактор-кольцо K/M изоморфно подкольцу поля действительных чисел.*

Покажем сначала, что если a и b — два конечных элемента кольца R и $a>b>0$, то существует такое натуральное n, что $nb>a$.

По теореме 4 выпуклый идеал, порожденный элементом b в кольце K, совпадает со всем K. По теореме 3 этот идеал совпадает с выпуклой подгруппой, порожденной элементом b. Отсюда и вытекает существование такого n, что $nb>a$.

Из этого утверждения следует архимедовость фактор-кольца K/M. Допустим, что оно содержит делители нуля, т. е. в K существуют такие конечные элементы a и b (можно их считать положительными, причем пусть $a\geqslant b$), что $ab\in M$. Тогда $ab\geqslant b^2$ и $b^2\in M$. Существует, однако, такое натуральное n, что $nb^2>b$, а тогда из выпуклости M следует $b\in M$, что является противоречием. Таким образом, K/M не содержит делителей нуля и поэтому, как показано в работе (1), изоморфно подкольцу поля действительных чисел.

Нетрудно показать, что *всякий нильпотентный элемент упорядоченного кольца является бесконечно малым.*

Теорема 6. *Радикал Бэра упорядоченного кольца является выпуклым идеалом.*

Теорема 7. *Если упорядоченное кольцо R содержит делители нуля, то оно содержит и такой выпуклый двусторонний идеал Z, что $Z\neq 0$, но $Z^2=0$.*

Назовем правым аннулятором подмножества $A\subset R$ совокупность элементов r кольца, удовлетворяющих условию $Ar=0$. Легко убедиться, что правый аннулятор любого множества является правым идеалом. Покажем, что в упорядоченном кольце правый аннулятор любого множества является выпуклым. Действительно, если, например, $a>0$, $ab=ad=0$ и $b\leqslant c\leqslant d$, то $0=ab\leqslant ac\leqslant ad=0$, т. е. $ac=0$ и c

принадлежит аннулятору. Нетрудно видеть, что правый аннулятор правого идеала является двусторонним идеалом.

Пусть кольцо R содержит делители нуля. Тогда оно содержит элемент a с ненулевым правым аннулятором I, который является выпуклым правым идеалом. Левый аннулятор J идеала I отличен от нуля, так как $J \ni a$, и является выпуклым левым идеалом. Так как идеалы I и J выпуклые, то либо $I \subset J$, либо $J \subset I$. Если, например, $I \subset J$, то $I^2 \subset JI = 0$. Отсюда следует, что правый аннулятор K идеала I отличен от нуля. Так как I — правый идеал, то K — двусторонний идеал и $I \subset K$, $IK = 0$. Левый аннулятор L идеала K отличен от нуля и является выпуклым двусторонним идеалом. Опять либо $K \subset L$, либо $L \subset K$. Квадрат меньшего из идеалов K, L равен нулю. Такие же рассуждения применимы и к случаю $J \subset I$.

Теорема 8. *Фактор-кольцо упорядоченного кольца по его радикалу Бэра не содержит делителей нуля.*

Теорема 9. *В упорядоченном кольце радикалы Бэра, Левицкого и Кете совпадают.*

Этими теоремами изучение произвольных упорядоченных колец сводится в некотором смысле к изучению упорядоченных ниль-колец и упорядоченных колец без делителей нуля.

Можно показать, что *в упорядоченном кольце радикалы Джекобсона и Брауна—Маккоя могут не быть выпуклыми.*

Теорема 10. *Если $R \neq M$, то в R существует максимальный выпуклый двусторонний идеал L. Фактор-кольцо R/L не содержит нетривиальных выпуклых двусторонних идеалов.*

Эта теорема позволяет изучение упорядоченных колец в некотором смысле свести к изучению упорядоченных колец, состоящих из бесконечно малых элементов, и упорядоченных колец, не содержащих нетривиальных выпуклых двусторонних идеалов. Из теоремы 7 следует, что кольцо без нетривиальных выпуклых двусторонних идеалов является либо кольцом без делителей нуля, либо кольцом с нулевым умножением. Заметим, что этот класс простых упорядоченных колец содержит все упорядоченные тела и все архимедовски упорядоченные кольца, но не исчерпывается ими.

Теорема 11. *Простое (в смысле отсутствия нетривиальных выпуклых двусторонних идеалов) упорядоченное кольцо не содержит и односторонних выпуклых идеалов.*

В классе простых упорядоченных колец можно выделить более узкий подкласс колец без нетривиальных выпуклых подколец. Он содержит все архимедовски упорядоченные кольца, не исчерпывается ими, но уже не содержит неархимедовски упорядоченных тел.

Назовем упорядоченное кольцо без делителей нуля мультипликативно архимедовым, если в нем из $a > b > 0$ и $b < b^2$ следует существование такого натурального n, что $b^n > a$, а из $b > a > 0$ и $b > b^2$ следует существование такого n, что $b^n < a$.

Теорема 12. *Неархимедовски упорядоченное кольцо тогда и только тогда не содержит нетривиальных выпуклых подколец, если в нем $K = 0$ и оно мультипликативно архимедово.*

Теорема 13. *Если R удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей для выпуклых правых идеалов и I — выпуклый правый идеал в R, где $I \subset M$, то I нильпотентен.*

Эта теорема аналогична теореме о нильпотентности ниль-колец, удовлетворяющих условию обрыва убывающих цепей для правых идеалов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. В. Хион, Усп. матем. наук, **9**, 4 (1954).