Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

МАТЕМАТИКА

А. Х. ТУРЕЦКИЙ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 I 1955)

А. Н. Колмогоров поставил следующую задачу. Дан класс функций f и натуральное число n. Требуется исследовать величину

$$D_n(F) = \inf_{\varphi_i} \sup_{f \in F} \inf_{c_i} \rho(f, \varphi),$$

где $\rho(f, \varphi)$ — отклонение функции f от n-членного полинома

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n. \tag{1}$$

Эта задача решена для различных классов функций А. Н. Колмогоровым ([1]), С. Б. Стечкиным ([2]) и В. Рудиным ([3]).

Здесь эта задача рассматривается при дополнительном ограничении, что система функций $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ ищется среди «систем Чебышева», т. е. таких систем непрерывных функций, что любой n-членный полином (1) имеет на $[0, 2\pi)$ не более $n-1$ нулей.

Пусть $W^{(r)}$—класс 2π-периодических функций f, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$$

и имеющих измеримую r-ю производную $f^{(r)}(t)$, которая удовлетворяет условию

$$|f^{(r)}(t)| \leqslant 1.$$

В качестве отклонения $\rho(f, \varphi)$ рассматриваем величину

$$\rho(f, \varphi) = \int_0^{2\pi} |f(t) - \varphi(t)|\,dt;$$

n предполагается нечетным.

При этих условиях имеем следующий результат:

$$D_n(W^{(r)})_L = \frac{16}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^r} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{qr}}{(2q+1)^{r+2}}. \tag{2}$$

Эта нижняя граница достигается для системы функций

$$1,\ \cos \nu x,\ \sin \nu x \quad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; $\varphi(x)$ — полином (1); $\varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — система функций Чебышева на

$[a, b]$, и пусть $f(x)-\varphi(x)$ имеет при любых c_j $(j=1, \ldots, n)$ не более p нулей на (a, b). Тогда

$$\mathcal{E}_n(f)_L = \min_{c_j} I = \min_{c_j} \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx = \left|\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b f(x)\operatorname{sign} Q_p(x)dx\right|,$$

где числа x_i удовлетворяют системе уравнений

$$x_0 = a, \quad x_{p+1} = b,$$

$$f(x_i)-\varphi(x_i)=0 \quad (i=1, \ldots, p), \tag{4}$$

$$\int_a^b \varphi_j(x)\operatorname{sign} Q_p(x)\,dx = 0 \quad (j=1, \ldots, n),$$

$Q_p(x)$ меняет знак в точках x_i $(i=1, \ldots, p)$ и $p \geqslant n$.

Действительно, существование и единственность полинома $\varphi(x)$ наилучшего приближения и неравенство $p \geqslant n$ известны. Обозначив нули $f(x)-\varphi(x)$ в (a, b), где эта разность меняет знак, через x_i $(i=1, \ldots, p)$,

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_p < b,$$

получим

$$I = \left|\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x)-\varphi(x)]\,dx\right|,$$

и необходимые условия минимума приводят к (4). Легко убедиться, что эти условия также достаточны.

Рассмотрим класс K_p функций f, заданных на $[a, b]$ в виде

$$f(x) = \int_a^b u(t)K(x, t)\,dt,$$

где $K(x, t)$ суммируема на квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$; $u(t)$ — любая функция, которая на $[a, b]$ измерима и удовлетворяет неравенству $|u(t)| \leqslant 1$, причем $f(x)-\varphi(x)$ имеет на (a, b) не более p нулей; p предполагаем нечетным. Тогда

$$\mathcal{E}_n(f)_L = \left|\int_a^b \operatorname{sign} Q_p(x)\,dx \int_a^b K(x, t)\,dt\right| = \left|\int_a^b u(t)\psi(t)\,dt\right|,$$

где

$$\psi(t) = \int_a^b K(x, t)\operatorname{sign} Q_p(x)\,dx;$$

$$\mathcal{E}_n(K_p) = \sup_{f \in K_p} \mathcal{E}_n(f)_L = \int_a^b |\psi(t)|\,dt;$$

$$D_n(K_p) = \inf_{\varphi_i} \mathcal{E}_n(K_p) = \inf_{x_i} \int_a^b |\psi(t)|\,dt$$

Пусть $\int_a^b |\psi(t)|\,dt$ достигает своего наименьшего значения для функции $\psi(t)$, которая меняет знак в точках t_i $(i=1,\ldots,m)$ отрезка (a, b). Тогда условия $\psi(t_i)=0$ $(i=1,\ldots,m)$ и необходимые условия минимума приводят к следующей системе уравнений:

$$2\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}L(x_i,\ t_j)-L(b,\ t_j)=0 \quad (j=1,\ldots,m);$$

$$2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}M(x_i,\ t_j)+(-1)^m M(x_i,\ b)=0 \quad (i=1,\ldots,p), \tag{5}$$

где

$$L(x,\ t)=\int_a^x K(y,\ t)\,dy, \qquad M(x,\ t)=\int_a^t K(x,\ y)\,dy.$$

Если все решения системы дают для $\int_a^b |\psi(t)|\,dt$ одно и то же значение, то, решив ее, найдем

$$D_n(K_p)_L=\left|2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\Phi(t_j)+(-1)^m\Phi(b)\right|, \tag{6}$$

где

$$\Phi(t)=\int_a^t\left[2\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}L(x_i,\ y)-L(b,\ y)\right]dy.$$

Если $f(x)\in W^{(r)}$, то она представляется в виде

$$f(x)=\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t)\,K(x,t)\,dt,$$

где

$$K(x,\ t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\nu^r}\cos\left[\nu(t-x)+\frac{r\pi}{2}\right].$$

Система (5) в этом случае приводится к системе

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{r+1}}\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\sin\left[\nu(t_j-x_i)+\frac{r\pi}{2}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{r+1}}\sin\left(\nu t_j+\frac{r\pi}{2}\right)=0$$

$$(j=1,\ldots,m);$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{r+1}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\sin\left[\nu(t_j-x_i)+\frac{r\pi}{2}\right]-\frac{(-1)^{m+1}+1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{r+1}}\sin\left(\nu x_i-\frac{r\pi}{2}\right)=0 \tag{5'}$$

$$(i=1,\ldots,p).$$

Решение системы (5′) таково:

$$x_i = t_i = \frac{2i\pi}{p+1}\ (i = 1, \ldots, p) \qquad \text{при } r \text{ четном;}$$

$$x_i = \frac{2i\pi}{p+1}(i = 1, \ldots, p),\ t_i = \frac{(2i-1)\pi}{p+1}\ (i = 1, \ldots, p+1) \qquad \text{при } r \text{ нечетном.}$$

Вычислив $D_n(W_p^{(r)})$ по формуле (6), найдем

$$D_n(W_p^{(r)})_L = \frac{16}{\pi}\frac{1}{\left(\frac{p+1}{2}\right)^r}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{qr}}{(2q+1)^{r+2}}.$$

Так как $p \geqslant n$, то

$$D_n(W^{(r)})_L = \sup_p D_n(W_p^{(r)})_L = \frac{16}{\pi}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^r}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{qr}}{(2q+1)^{r+2}}.$$

Легко проверить, что система функций (3) есть система функций Чебышева на $[0, 2\pi)$, для которой достигается значение $D_n(W^{(r)})_L$. Вопрос о единственности этой системы остается открытым.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
1 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Ann. of Math., **37**, 107 (1936). [2] С. Б. Стечкин, Усп. матем. наук, 9, в. 1 (59), 133 (1954). [3] W. Rudin, Duke Math. J., **19**, 1 (1952). [4] Н. И. Ахиезер, Лекции по аппроксимации, 1947.