Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

МАТЕМАТИКА

Л. Н. СЛОБОДЕЦКИЙ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 XII 1954)

Рассмотрим в слое $[0, T]$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ параболическую систему

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} A^{(i_1, \ldots, i_r)}(t, x) \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}} - A(t, x)\, u = f(t, x), \quad \text{(A)}$$

где $A^{(i_1, \ldots, i_r)}(t, x)$ и $A(t, x)$ — квадратные матрицы порядка N с комплексными элементами; $u = u(t, x)$ и $f(t, x)$ — вектор-функции в N-мерном комплексном векторном пространстве.

Пусть $Q = \Omega \times [0, T]$ $(x \in \Omega, \ 0 \leqslant t \leqslant T)$ — цилиндрическая область и $f(t, x)$ суммируема по Q. Суммируемая по Q вектор-функция $u = u(t, x)$ называется обобщенным в смысле С. Л. Соболева (1) решением уравнения (A), если для любой вектор-функции $v = v(t, x)$, имеющей непрерывные производные, входящие в (A), и равной нулю в некоторой пограничной полоске области (Q), имеет место равенство:

$$\iiint_{(Q)} (u, \tilde{L}v)\, dt\, dx = \iiint_{(Q)} (f, v)\, dt\, dx, \qquad (1)$$

где $\tilde{L}$ — дифференциальный оператор, сопряженный с L, и (u, v) — знак скалярного произведения в N-мерном комплексном векторном пространстве.

Целью работы является качественная характеристика обобщенных решений параболической системы и эллиптической системы, получающейся из (A), если считать коэффициенты системы, правую часть и u независимыми от t.

В дальнейшем используются матрицы $G(t, x; \tau, y)$ и $\tilde{G}(t, x; \tau, y)$, являющиеся основными матричными решениями однородных систем

$$Lu = 0; \qquad (A_0)$$

$$\tilde{L}u = 0. \qquad (\tilde{A}_0)$$

Эти матрицы построены в (2) при некоторых условиях гладкости коэффициентов системы (A). Более слабые условия для систем 2-го порядка указаны в (3). Все результаты этой работы следуют из оценок матрицы $G(t, x; \tau, y)$ и ее производных, приведенных в (2), и оценок приращений $G(t, x; \tau, y)$ и ее производных, приведенных в (3), и из теорем 3 и 4 работы (3). Как обычно, вектор-функции, совпадающие почти всюду, мы считаем равными.

Введем следующие функциональные пространства:

1. $L_q(Q)$ $(q \geqslant 1)$ — пространство вектор-функций $u(t, x)$, суммируемых по Q со степенью q. Норму $u(t, x)$ в этом пространстве положим равной $\|u(t, x)\|_{L_q(Q)} = \left[\iiiint\limits_{(Q)} |u(t, x)|^q \, dt\, dx\right]^{1/q}$ *.

2. $L_q(\Omega)$ $(q \geqslant 1)$ — пространство вектор-функций $u(x)$, суммируемых по Ω со степенью q. Норму $u(x)$ в этом пространстве положим равной $\|u(x)\|_{L_q(\Omega)} = \left[\iiint\limits_{(\Omega)} |u(x)|^q \, dx\right]^{1/q}$.

3. $N(Q)$ $(q \geqslant 1)$ — пространство вектор-функций $f(t, x)$, удовлетворяющих условиям: а) $f(t, x) \in L_q(\Omega)$ при почти всех $t \in [0, T]$; б) функция $\varphi(t) = \|f(t, x)\|_{L_q(\Omega)}$ суммируема по $[0, T]$. Норму $f(t, x)$ в $N_q(Q)$ положим равной $\|f(t, x)\|_{N_q(\Omega)} = \int\limits_0^T \|f(t, x)\|_{L_q(\Omega)} \, dt$.

Пусть $M_q(Q)$ — линеал из $L_q(Q)$, состоящий из обобщенных решений однородной системы (A_0).

Теорема 1. *$M_q(Q)$ является подпространством $L_q(Q)$. Оно состоит из вектор-функций $u_0(t, x)$, имеющих внутри (Q) непрерывные производные всех порядков, входящих в (A_0), и, следовательно, являющихся внутри (Q) регулярными решениями системы (A_0). Сходимость последовательности $u_0^{(m)}(t, x)$ в $M_q(Q)$ влечет за собой равномерную сходимость $u_0^{(m)}(t, x)$ и всех производных $u_0^{(m)}(t, x)$, входящих в (A_0), во всякой замкнутой и ограниченной подобласти Q.*

Для уравнения теплопроводности теорема 1 доказана С. Л. Соболевым ([1], стр. 303—305) в более узкой форме.

Теорема 2. *Пусть $f(t, x) \in N_q(Q)$. Для того, чтобы $u(t, x)$ была обобщенным решением системы $(A) \in L_q(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$u(t, x) = u_0(t, x) + \int\limits_0^t ds \iint\limits_{(\Omega)} G(t, x; s, y) f(s, y) \, dy. \qquad (2)$$

где $u_0(t, x) \in M_q(Q)$.

Интеграл $u_1(t, x) = \int\limits_0^t ds \iint\limits_{(\Omega)} G(t, x; s, y) f(s, y) \, dy$ назовем объемным параболическим потенциалом с плотностью $f(t, x)$. Рассматриваемый на вектор-функциях $f(t, x) \in N_q(Q)$, объемный параболический потенциал является линейным оператором, отображающим $N_q(Q)$ на некоторое подпространство $K_q(Q)$ пространства $L_q(Q)$.

Будем говорить, что $f(t, x)$ есть вектор-функция класса (R_1) $(f \in R_1)$, если в любой ограниченной подобласти (D) области (Q) она непрерывна и если функция $\lambda(u, D) = \sup\limits_{|x_1 - x_2| \leqslant u} |f(t, x_1) - f(t, x_2)|$ при (t, x_1) и $(t, x_2) \in (D)$ такова, что интеграл $\int\limits_0^b \frac{\lambda(u, D)}{u} du$ $(b > 0)$ сходится.

Будем говорить, что $f(t, x)$ — вектор-функция класса (R_2) $(f \in R_2)$, если для любой ограниченной подобласти (D) области (Q) функция $\omega(u, D) = \sup\limits_{|x_1 - x_2| + \sqrt[2p]{|t_1 - t_2|} \leqslant u} |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)|$ такова, что интеграл $\int\limits_0^b \frac{\omega(u, D)}{u} du$ сходится.

---

* $|u(t, x)| = \sqrt{(u, u)}$ — длина вектора $u(t, x)$.

Теорема 3. *Пусть* $f(t, x) \in R_1$ *и* Ω' *— любая подобласть* Ω *с гладкой границей. В любой внутренней точке* $Q' = \Omega' \times [0, T]$ $u_1(t, x)$ *имеет все непрерывные производные, входящие в* (A). *При этом:*

$$D_x^{2p} u_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{(\Omega')} \cdots \int D_x^{2p} G(t, x; s, y) [f(s, y) - f(s, x)] dy +$$

$$+ \int_0^t D_x^{2p} Z(t, x; s) f(s, x) ds +$$

$$+ \int_0^t ds \int_{(\Omega)-(\Omega')} \cdots \int D_x^{2p} G(t, x; s, y) f(s, y) dy; \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{(\Omega')} \cdots \int \frac{\partial}{\partial t} G(t, x; s, y) [f(s, y) - f(s, x)] dy + f(t, x) +$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} Z(t, x; s) f(s, x) ds + \int_0^t ds \int_{(\Omega)-(\Omega')} \cdots \int \frac{\partial}{\partial t} G(t, x; s, y) f(s, y) dY, \tag{4}$$

где $Z(t, x; s) = \int_{(\Omega')} \cdots \int G(t, x; s, y) dy$. *Младшие производные по* $x_1, \ldots, x_n$ *получаются формальным дифференцированием под знаком интеграла.*

Если $f(t, x) \in R_2$, *то для старших производных имеют место формулы:*

$$D_x^{2p} u_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{(\Omega')} \cdots \int D_x^{2p} G(t, x; s, y) [f(s, y) - f(t, x)] dy +$$

$$+ \left(D_x^{2p} \int_0^t Z(t, x; s) ds \right) f(t, x) +$$

$$+ \int_0^t ds \int_{(\Omega)-(\Omega')} \cdots \int D_x^{2p} G(t, x; s, y) f(s, y) dy; \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1(t, x) = \int_0^t ds \int_{(\Omega')} \cdots \int \frac{\partial}{\partial t} G(t, x; s, y) [f(s, y) - f(t, x)] dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t Z(t, x; s) ds \right) f(t, x) + \int_0^t ds \int_{(\Omega)-(\Omega')} \cdots \int \frac{\partial}{\partial t} G(t, x; s, y) f(s, y) dy. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) для объемного потенциала уравнения теплопроводности впервые получены Леви ([4]) при более узких предположениях.

Теорема 4. *Пусть* $f(t, x) \in N_q(Q)$ $(q \geqslant 1)$. *Тогда при каждом фиксированном* $t \in [0, T]$ *вектор-функция* $w(t, x) = \int_0^t u_1(s, x) ds$ *имеет по области* Ω *обобщенные производные по* $x_1, \ldots, x_n$ *порядков* $\leqslant 2p - 1$. *При этом:*

$$\| D_x^l w(t, x) \|_{L_q(\Omega)} \leqslant C \| f(t, x \|_{N_q(Q)}, \quad 0 \leqslant l \leqslant 2p - 1, \tag{7}$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от коэффициентов уравнения (A) *и T. Если коэффициенты при старших производных в системе* (A) *не зависят от x и $q>1$, то $w(t, x)$ имеет по $x_1, \ldots, x_n$ обобщенные производные порядка $2p$, удовлетворяющие неравенству* (7).

Теорема 5. *Пусть $f(x)$ — не зависящая от t плотность $u_1(t, x)$ и пусть $f(x) \in L_q(\Omega)$. Тогда $u_1(t, x)$ при всех $t \in [0, T]$ имеет по области Ω обобщенные производные по $x_1, \ldots, x_n$ порядков $\leqslant 2p-1$. При этом:*

$$\| D_x^l u_1(t,\ x) \|_{L_q(\Omega)} \leqslant C \| f(x) \|_{L_q(\Omega)}, \quad 0 \leqslant l \leqslant 2p-1. \tag{8}$$

Если коэффициенты при старших производных в системе (A) *не зависят от x и $q>1$, то $u_1(t, x)$ имеет по Ω обобщенные производные порядка $2p$, удовлетворяющие неравенству* (8).

Из теорем 1, 2, 4 и 5 следуют для обобщенных решений системы (A) предложения, аналогичные теоремам 4 и 5 для объемного параболического потенциала, в любой замкнутой и ограниченной подобласти Q' области Q.

Из сформулированных выше теорем немедленно следуют соответствующие теоремы для обобщенных решений эллиптических систем вида

$$M_1 u \equiv \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} A^{(i_1, \ldots, i_r)}(x) \frac{\partial^r u(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}} + A(x) u(x) = f(x), \tag{B}$$

где оператор M_1 после умножения на некоторую достаточно гладкую и неособенную матрицу $C(x)$ превращается в оператор M, для которого система $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - Mu(t, x) = 0$ параболическая. В частности, M может быть сильно-эллиптическим оператором М. И. Вишика (5).

Наши результаты относительно обобщенных решений эллиптических систем (B) являются обобщением соответствующих результатов Зигмунда и Кальдерона (6) относительно ньютоновского потенциала. Они являются также частичными обобщениями результатов С. Г. Михлина (7) и О. А. Ладыженской (8) для одного эллиптического уравнения второго порядка и Фридрихса (9) для сильно-эллиптических систем, поскольку нам проходится ограничиваться случаем, когда старшие коэффициенты системы (B) — постоянные числа.

Ленинградский государственный
педагогический институт

Поступило
23 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, 1947. [2] С. Д. Эйдельман, ДАН, **98**, № 6 (1954). [3] Л. Н. Слободецкий, ДАН, **101**, № 5 (1955). [4] H. Lewy, Ann. di Mat., 3 (14) (1908). [5] М. И. Вишик, Матем. сборн., **29** (71): 3 (1951). [6] A. P. Calderon, A. Zygmund, Acta Math., **88**, № 1—2, 85(1952). [7] С. Г. Михлин, ДАН, **77**, № 3 (1951). [8] О. А. Ладыженская, ДАН, **79**, № 5 (1951). [9] K. O. Friedrichs, Comm. Pure Appl. Math., **6** No. 3, 299 (1953).