Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

МАТЕМАТИКА

М. А. РУТМАН

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

В нашей заметке (1) рассматривались операторные уравнения в линейном полуупорядоченном пространстве. Записывая решения этих уравнений при помощи контурных интегралов, мы получили достаточные признаки ограниченности их решений. Приведем некоторые конкретные применения полученных результатов. Из теорем 1, 2, 3 и 4, приведенных в (1), как частные случаи, вытекают спектральные признаки устойчивости по Ляпунову для некоторых систем линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Анализируя формулы (2), (4) и (6) из (1), можно убедиться, что эти признаки (кроме последнего, следующего из теоремы 4) являются не только достаточными, но и необходимыми. Мы примем те же определения и обозначения, что и в (1).

Пусть $\tilde{E}$ — множество всех функций $x(t)$, заданных и непрерывных при $0 \leqslant t < \infty$ ((1), пример), с областью значений, принадлежащей комплексному банахову пространству $\tilde{\mathcal{E}}$. Выберем в качестве «масштабного» элемента ξ_0 элемент ξ из $\tilde{\mathcal{E}}$ (см. построение конуса). Пространство $\tilde{E}_0$ ограниченных элементов совпадет при этом с множеством тех $x(t)$ из $\tilde{E}$, для которых $\overline{\lim} \| x(t) \| < \infty$.

Положим далее $Sx(t) = \int_0^t x(s)\,ds$; этот оператор является монотонным и вольтерровым.

Из теоремы 1 (1) и формулы (2) (1) следует:

Теорема 1. *Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в $\tilde{\mathcal{E}}$. Для того чтобы краевая задача*

$$\frac{dy}{dt} - Ay = x_1(t); \quad y(0) = x_0 \quad (x_1 \in \tilde{E}; \quad x_0 \in \tilde{\mathcal{E}}) \tag{1}$$

имела ограниченное решение при всяких $x_0 \in \tilde{\mathcal{E}}$ и ограниченном $x_1 \in \tilde{E}_0$, необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора A лежал в открытой левой полуплоскости. Если же хотя бы одна точка спектра A попадает в открытую правую полуплоскость, то существует элемент $x_0 \in \tilde{\mathcal{E}}$, при котором однородная краевая задача

$$\frac{dy}{dt} - Ay = 0; \quad y(0) = x_0$$

имеет неограниченное решение.

Это предложение в столь общей форме было впервые получено М. Г. Крейном (2).

Пусть $\tilde{E}$ — множество функций $x(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, заданных и непрерывных при $0 \leqslant t_1, t_2, \ldots, t_n < \infty$ с областью значений, принадлежащей $\tilde{\mathcal{E}}$ ((1), пример).

Выберем неотрицательное фиксированное α и положим ξ_0 равным $\xi e^{\alpha(t_1+t_2+\ldots+t_n)}$. Ясно, что $x(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \tilde{E}_0$ тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim} \frac{\| x(t_1, t_2, \ldots, t_n) \|}{e^{\alpha(t_1+t_2+\ldots+t_n)}} < \infty.$$

Положим

$$S_1 x = \int_0^{t_1} x(s, t_2, \ldots, t_n)\, ds; \quad S_2 x = \int_0^{t_2} x(t_1, s, \ldots, t_n)\, ds; \ldots;$$

$$S_n x = \int_0^{t_n} x(t_1, t_2, \ldots, s)\, ds. \tag{2}$$

Эти операторы монотонны, вольтерровы и попарно перестановочны.

Из теоремы 2 (1) и формулы (4) (1) следует

Теорема 2. *Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в $\tilde{\mathcal{E}}$. Рассмотрим краевую задачу*

$$\frac{\partial^n y}{\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_n} - Ay = x_0(t_1, t_2, \ldots, t_n);$$

$$y(0, t_2, \ldots, t_n) = x_1(t_2, \ldots, t_n);\ y(t_1, 0, \ldots, t_n) = x_2(t_1, t_3, \ldots, t_n); \ldots; \tag{3}$$

$$y(t_1, t_2, \ldots, 0) = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),$$

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \in \tilde{E}$$

с непротиворечивыми краевыми условиями.

Если α — действительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\alpha > \max_{\lambda \in S_A} \operatorname{Re} \sqrt[n]{\lambda} \quad (S_A — спектр\ A),$$

то для всяких $x_0, x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям

$$\overline{\lim} \frac{\| x_0(t_1, t_2, \ldots, t_n) \|}{e^{\alpha(t_1+t_2+\ldots+t_n)}} < \infty;$$

$$\overline{\lim} \frac{\| x_j(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n) \|}{e^{\alpha(t_1+t_2+\ldots+t_n)}} < \infty \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

решение данной краевой задачи тоже удовлетворяет условию

$$\overline{\lim} \frac{\| y(t_1, t_2, \ldots, t_n) \|}{e^{\alpha(t_1+t_2+\ldots+t_n)}} < \infty. \tag{5}$$

Если же

$$\alpha \leqslant \max_{\lambda \in S_A} \operatorname{Re} \sqrt[n]{\lambda}, \tag{6}$$

то существуют непротиворечивые краевые данные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и правая часть x_0, удовлетворяющие условиям (4), *для которых решение данной краевой задачи не удовлетворяет условию* (5). *При*

этом, если в (6) *имеет место строгое неравенство, всегда существует элемент* $y_0 \in \tilde{\mathcal{E}}$, *для которого однородная краевая задача*

$$\frac{\partial^n y}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_n} - Ay = 0;$$

$$y(0, t_2, \ldots, t_n) = y(t_1, 0, \ldots, t_n) = \ldots = y(t_1, t_2, \ldots, 0) = y_0$$

имеет решение, не удовлетворяющее условию (5).

При $n = 1$ из теоремы 2 следует теорема 1.

При $n = 2$ однородная краевая задача может иметь ограниченные решения при всяких ограниченных краевых значениях только тогда, когда весь спектр A расположен на отрицательном луче.

При $n > 2$ это возможно лишь в том случае, когда спектр A исчерпывается точкой O.

Что касается неоднородной краевой задачи, то при всяком $n \geqslant 2$, каков бы ни был оператор A, она может иметь неограниченное решение при ограниченной правой части и ограниченных краевых данных.

Пусть попрежнему $\tilde{E}$ означает пространство всех непрерывных функций от n вещественных переменных, значения которых принадлежат $\tilde{\mathcal{E}}$. Положим, однако, что $0 \leqslant t_1 < \infty$, в то время как остальные переменные пробегают конечные сегменты $0 \leqslant t_j \leqslant b_j$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$. Операторы $S_1, S_2, \ldots, S_n$ снова зададим формулами (2).

Из теоремы (3) (1) и формулы (6) (1) легко получается

Теорема 3. *Пусть в краевой задаче*

$$\frac{\partial^n y}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_n} - A_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t_2 \partial t_3 \ldots \partial t_n} - A_2 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t_1\, \partial t_3 \ldots \partial t_n} - \ldots - A_n \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_{n-1}} -$$

$$A_{12} - \frac{\partial^{n-2} y}{\partial t_3 \ldots \partial t_n} - \ldots - A_{n-1,n} \frac{\partial^{n-2} y}{\partial t_1 \ldots \partial t_{n-2}} - \ldots - A_{12\ldots n} y = x_0(t_1, t_2, \ldots, t_n);$$

$$y(0, t_2, \ldots, t_n) = x_1(t_2, \ldots, t_n); \tag{7}$$

$$y(t_1, 0, \ldots, t_n) = x_2(t_1, t_3, \ldots, t_n); \ldots; y(t_1, t_2, \ldots, 0) = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1});$$

$$(0 \leqslant t_1 < \infty; \quad 0 \leqslant t_j \leqslant b_j; \quad j = 2, 3, \ldots, n; \quad x_0, x_1, \ldots, x_n \in \tilde{E})$$

с непротиворечивыми краевыми условиями линейные операторы $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{12}, \ldots, A_{12\ldots n}$ *действуют и ограничены в пространстве* $\tilde{\mathcal{E}}$.

Для того чтобы всяким ограниченным краевым данным и правой части соответствовало ограниченное решение, необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора A_1 *лежал в открытой левой полуплоскости.*

Если же хотя бы одна точка спектра оператора A_1 *находится в открытой правой полуплоскости, то существует система ограниченных краевых данных, при которых соответствующая однородная краевая задача имеет неограниченное решение.*

Это предложение можно получить также из теоремы 1 (1) и формулы (12) (1), если проинтегрировать по всем переменным обе части уравнения (7), выбрав промежутки интегрирования для $t_2, t_3, \ldots, t_n$ достаточно малыми. Полученное операторное уравнение окажется при этом «близким» к уравнению типа (1) (1).

Если в уравнении (7) оператор A_1 равен нулю, то, как легко видеть, решение, отвечающее ограниченным $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеет

«минимальный тип», т. е. норма его мажорируется функцией вида $Ce^{\varepsilon t_1}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, а C достаточно велико.

Отметим еще, что решение краевой задачи (3) при $0 \leqslant t_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $0 \leqslant t_n \leqslant b$ и при ограниченных $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, независимо от расположения спектра A, также допускает аналогичную оценку

$$\| y(t_1, t_2, \ldots, t_n) \| \leqslant Ce^{\varepsilon(t_1+t_2+\ldots+t_{n-1})}.$$

Мы уже отмечали, что решение неоднородной краевой задачи (3) в области $0 \leqslant t_1, t_2, \ldots, t_n < \infty$ всегда неустойчиво, если $n \geqslant 2$. Существуют, однако, «полные» гиперболические уравнения, решения которых устойчивы.

Приведем для иллюстрации следующий результат.

Теорема 4. *Пусть дана краевая задача*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t_1 \partial t_2} - A\frac{\partial y}{\partial t_1} - B\frac{\partial y}{\partial t_2} - Cy = x_0(t_1, t_2); \tag{8}$$

$$y(0, t_2) = x_1(t_2); \quad y(t_1, 0) = x_2(t_1); \quad x_1(0) = x_2(0)$$

$$(0 \leqslant t_1, t_2 < \infty; \; x_0, x_1, x_2 \in \tilde{E}),$$

в которой A, B, C — попарно перестановочные линейные операторы, действующие и ограниченные в $\mathfrak{E}$.

Если для всяких трех точек λ, μ, ν, принадлежащих, соответственно, спектрам A, B, C, выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(\lambda + \mu) + \sqrt{[\operatorname{Re}(\lambda - \mu)]^2 + 2\operatorname{Re}(\nu + \lambda\mu) + 2|\nu + \lambda\mu|} < 0,$$

то при каждых ограниченных $x_0(t_1, t_2)$, $x_1(t_2)$, $x_2(t_1)$ решение данной краевой задачи тоже ограничено.

Это предложение вытекает из теоремы 4 (1).

До сих пор мы всюду предполагали, что линейные операторы A, $A_1, A_2, \ldots$, при помощи которых строится та или иная краевая задача, действуют в пространстве $\mathfrak{E}$ «постоянных» элементов. В том случае, когда $\mathfrak{E}$ конечномерно и операторы эти задаются матрицами, мы имеем дело с дифференциальными системами, коэффициенты которых постоянны.

Более детальное исследование решений краевых задач (1), (3), (7) и (8), опять-таки основанное на формулах (2) (1), (4) (1), (6) (1) и (7) (1), дает возможность распространить наши критерии устойчивости на дифференциальные системы значительно более общего типа, в частности, на системы, образованные при помощи операторов со «слабой вариацией». (Это понятие было впервые введено В. П. Персидским (3) и затем использовано М. Г. Крейном (2) и другими авторами.)

Одесский гидрометеорологический институт

Поступило 5 X 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Рутман, ДАН, **101**, № 2 (1955). [2] М. Г. Крейн, Усп. матем. наук, **3**, 3 (25), 166 (1948). [3] К. П. Персидский, Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., ч. 1, **8**, сер. 3, 47 (1936).