Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

МАТЕМАТИКА

В. И. КРЫЛОВ

УВЕЛИЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ПРИ НАЛИЧИИ ГЛАВНОГО УЧАСТКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ МАЛОЙ ДЛИНЫ В ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОСТАТКА КВАДРАТУРЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 20 XII 1954)

Если механическая квадратура имеет алгебраическую степень точности $m-1$ и функция f m-кратно непрерывно дифференцируема, дополнительный член квадратурной формулы представим в виде

$$R(f)=\int_a^b p(x)f(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k)=\int_a^b f^{(m)}(x)K(x)\,dx. \qquad (1)$$

Ядро остатка K не зависит от f.

Будем рассматривать частный случай увеличения точности квадратуры, когда в интеграле (1) ядро K таково, что на отрезке $[a, b]$ существует участок $[\alpha, \beta]$ конечной длины, вне которого K имеет «пренебрежимо малые» значения*. В образовании остатка R интегрирование по $[\alpha, \beta]$ будет тогда играть главную роль. Если $f^{(m)}$ мало изменяется на $[\alpha, \beta]$**, для выделения главной части остатка R достаточно $f^{(m)}$ разложить на две части, положив $f^{(m)}(x)=f^{(m)}(\alpha_0)+[f^{(m)}(x)-f^{(m)}(\alpha_0)]$, где α_0 есть некоторая точка главного участка интегрирования $[\alpha, \beta]$:

$$R(f)=f^{(m)}(\alpha_0)\int_a^b K\,dx+\int_a^b[f^{(m)}(x)-f^{(m)}(\alpha_0)]K\,dx.$$

Когда ядро K знакопостоянно, за α_0 естественно принять такую точку, вблизи которой сосредоточены значения ядра, наибольшие по абсолютной величине, и считать α_0 равным средней абсциссе по весу K: $\alpha_0=\left[\int_a^b K\,dx\right]^{-1}\int_a^b xK\,dx$. Остаток R тогда приводится к виду:

$$R(f)=C_0 f^{(m)}(\alpha_0)+\int_a^b f^{(m+2)}K_1\,dx,$$

$$C_0=\int_a^b K\,dx,\quad K_1(x)=\int_a^b K(t)\,[E(t-x)-E(\alpha_0-x)]\,(t-x)\,dt,$$

$$E(x)=\tfrac{1}{2}(1+\operatorname{sign}x).$$

* Или быстро убывает при удалении от $[\alpha, \beta]$.
** Или $[\alpha, \beta]$ имеет «малую длину».

Повторные применения таких рассуждений приведут к следующей формуле, позволяющей в некоторых случаях последовательно увеличивать точность механической квадратуры:

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + C_0 f^{(m)}(\alpha_0) + C_1 f^{(m+2)}(\alpha_1) + \ldots$$

$$\ldots + C_s f^{(m+2s)}(\alpha_s) + \int_a^b f^{(m+2s+2)} K_{s+1}\,dx, \qquad (2)$$

$$K_0 = K, \quad K_{i+1}(x) = \int_a^b K_i(t)\,[E(t-x) - E(\alpha_i - x)]\,(t-x)\,dt,$$

$$C_i = \int_a^b K_i\,dx, \quad \alpha_i = \left[\int_a^b K_i\,dx\right]^{-1} \int_a^b x K_i\,dx.$$

Рассмотрим, например, механическую квадратуру наивысшей степени точности $2n-1$ с n узлами, служащую для вычисления интегралов с весовой функцией $p(x) = (1-x)^p (1+x)^q$:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^p (1+x)^q f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f). \qquad (3)$$

Узлы ее x_k лежат в корнях якобиева многочлена степени n. Будем считать $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Если p или q будут «большими» числами, отрезок $[x_1, x_n]$, в котором расположены все узлы, будет иметь «малую» длину. Когда p значительно больше q, $[x_1, x_n]$ будет малым отрезком вблизи -1. Наоборот, если $q \gg p$, $[x_1, x_n]$ будет лежать вблизи $+1$. Вообще же говоря, положение $[x_1, x_n]$ будет зависеть от значений p и q.

В интегральном представлении остатка квадратуры (3) $R(f) = \int_{-1}^{+1} f^{(2n)} K\,dx$ ядро K имеет следующее значение:

$$K(t) = \int_t^1 (1-x)^p (1+x)^q \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{2n-1}}{(2n-1)!}. \qquad (4)$$

Можно видеть, что оно будет положительным при $-1 < t < 1$.

Вне участка $[x_1, x_n]$

$$K(t) = \int_{-1}^{t} (1-x)^p (1+x)^q \frac{(t-x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,dx \quad \text{при} \quad -1 \leqslant t \leqslant x_1;$$

$$K(t) = \int_t^1 (1-x)^p (1+x)^q \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,dx \quad \text{при} \quad x_n \leqslant t \leqslant 1.$$

При больших значениях p или q ядро K будет быстро убывать при удалении от $[x_1, x_n]$, и $[x_1, x_n]$ будет главным участком интегрирования в (4).

Кроме того, несложные вычисления показывают, что при любом s $K_s(t) > 0$ $(-1 < t < 1)$, и имеют место равенства

$$K_s(t) = \int_{-1}^{t} (1-x)^p (1+x)^q \frac{(t-x)^{2n+2s-1}}{(2n+2s-1)!}\, dx, \quad -1 \leqslant t \leqslant x_1;$$

$$K_s(t) = \int_{t}^{1} (1-x)^p (1+x)^q \frac{(x-t)^{2n+2s-1}}{(2n+2s-1)!}\, dx, \quad x_n \leqslant t \leqslant 1.$$

Формула (2) для рассматриваемого интеграла (3) имеет вид:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^p (1+x)^q f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + C_0 f^{(2n)}(\alpha_0) + C_1 f^{(2n+2)}(\alpha_1) + \ldots$$

$$\ldots + C_s f^{(2n+2s)}(\alpha_s) + \int_{-1}^{+1} f^{(2n+2s+2)} K_{s+1}\, dx. \qquad (5)$$

При любом s для больших p или q отрезок $[x_1, x_n]$ будет главным участком интегрирования в дополнительном члене (5), и выделение главной части из дополнительного члена может быть выполнено на основании изложенных выше соображений.

Вычисления дали следующие значения для C_0 и α_0:

$$C_0 = \frac{2^{p+q+2n+1}\, \Gamma(n+1)\, \Gamma(p+n+1)\, \Gamma(q+n+1)\, \Gamma(p+q+n+1)}{\Gamma(2n+1)\, \Gamma(p+q+2n+1)\, \Gamma(p+q+2n+2)},$$

$$\alpha_0 = \frac{q-p}{2n+1} \left\{ \frac{3n+1}{p+q+2n+2} - \frac{n}{p+q+2n} \right\}.$$

В ультрасферическом случае $p = q$ все α_k $(k = 0, 1, \ldots)$ обращаются в нуль, и, если ограничиться двумя членами в правой части равенства вне суммы $\sum_{k=1}^{n}$, (5) принимает форму:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^p f(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \frac{2^{2p+2n+1}\, \Gamma(n+1)\, \Gamma^2(p+n+1)\, \Gamma(2p+n+1)}{\Gamma(2n+1)\, \Gamma(2p+2n+1)\, \Gamma(2p+2n+2)} \times$$

$$\times \left\{ f^{(2n)}(0) + \frac{1}{2(2n+1)(2n+2)} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2p+2n+3} + \frac{(n-1)n}{2p+2n-1} \right] f^{(2n+2)}(0) + \ldots \right\}.$$

Применение идей, сходных с изложенными, к увеличению точности механических квадратур, служащих для приближенного вычисления интегралов $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx$ и $\int_{0}^{\infty} x^s e^{-x} f(x)\, dx$ даны в работе [1].

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Смирнов, Диссертация, Ленинградск. гос. унив., 1953.