Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

МАТЕМАТИКА

В. С. КОРОЛЮК

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОВЫШЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ МЕТОДА СЕТОК

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 I 1955)

Повышение точности метода сеток при решении уравнения Лапласа можно проводить по двум различным направлениям: путем уменьшения шага сетки h и путем замены производных разностями достаточно высокого порядка. В первом случае резко возрастает число уравнений, во втором случае усложняются сами уравнения.

Для экономии счета во втором случае Фоксом ([2]) и Вудзом ([3]) был предложен итерационный процесс для решения усложненной системы уравнений, с теоретической стороны рассмотренный Е. А. Волковым ([1]).

А. Н. Колмогоров обратил наше внимание на то, что повышение точности метода сеток во втором случае можно осуществить довольно экономным способом.

Пусть в области G на плоскости с криволинейной границей Γ задано уравнение Пуассона

$$\Delta u = \varphi \tag{1}$$

с граничным условием

$$u|_{\Gamma} = f.$$

Оператор Лапласа Δ может быть заменен простейшим разностным оператором на внутренних узлах квадратной сетки:

$$\frac{1}{h^2}\Delta_h u_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}.$$

При этом погрешность будет иметь величину порядка h^2, т. е.

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\Delta_h u + O(h^2).$$

Для граничных точек погрешность порядка h^2 дает разностный оператор, введенный Коллатцом ([4]), который мы обозначим $\delta_h u = f$.

Для увеличения точности решения уравнения (1) методом сеток воспользуемся представлением оператора Лапласа Δ через разностные операторы в виде ряда по степеням h.

Лемма 1. *Для оператора Лапласа*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

имеет место разложение во внутренних узлах квадратной сетки

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\Delta_h u + h^2 L_1(u) + \ldots + h^{2q-2} L_{q-1}(u) + O(h^{2q}), \tag{2}$$

где $\frac{1}{h^2}\Delta_h$ *и* L_k $(k = 1, 2, \ldots, q-1)$ *с точностью до величин порядка* h^2 *приближают, соответственно, дифференциальные операторы* $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ *и* $c_k\left(\frac{\partial^{2k+2}}{\partial x^{2k+2}} + \frac{\partial^{2k+2}}{\partial y^{2k+2}}\right)$.

Для повышения точности при сносе граничных условий поступим следующим образом: разложим граничный разностный оператор δ_h в ряд по дифференциальным операторам и заменим производные соответствующими разностными операторами. Таким образом для решения u уравнения (1) с граничным условием $u|_\Gamma = f$ получим

$$\delta_h u = f + h^2\delta_1(u) + \ldots + h^{2q-2}\delta_{q-1}(u) + O(h^{2q}) \tag{3}$$

($\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{q-1}$ — некоторые разностные операторы).

Теперь решение уравнения (1) находим в виде суммы

$$u^{(q)} = u_0 + h^2 u_1 + \ldots + h^{2q-2}u_{q-1}, \tag{4}$$

где члены асимптотического разложения u_k являются решениями рекуррентной системы разностных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}\Delta_h u_0 = \varphi, && \delta_h u_0 = f;\\
&\frac{1}{h^2}\Delta_h u_1 + L_1(u_0) = 0, && \delta_h u_1 = \delta_1(u_0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\
&\frac{1}{h^2}\Delta_h u_{q-1} + L_1(u_{q-2}) + \ldots + L_{q-1}(u_0) = 0, && \\
& && \delta_h u_{q-1} = \delta_1(u_{q-2}) + \ldots + \delta_{q-1}(u_0).
\end{aligned} \tag{5}$$

Теорема. *Если* $\Gamma \in \Lambda_{4q}(B, \lambda)$, $f \in H(4q, A, \lambda)$ **,* $\varphi \in H(4q-2, A, \lambda)$, *то решение и уравнения Пуассона* (1) *в узлах квадратной сетки с шагом* h *представимо в виде асимптотического ряда*

$$u = u_0 + h^2 u_1 + \ldots + h^{2q-2}u_{q-1} + O(h^{2q}), \tag{6}$$

где функции $u_0, u_1, \ldots, u_{q-1}$ *являются решениями системы разностных уравнений* (5).

Для доказательства теоремы используется следующая лемма:

Лемма 2. *В условиях теоремы решение разностного уравнения*

$$\frac{1}{h^2}\Delta_h u = \varphi \tag{7}$$

с граничным условием

$$\delta_h u = f \tag{8}$$

*имеет в рассматриваемой области асимптотически равномерно ограниченные разделенные разности ** по совокупности переменных до* $(4q-2)$*-го порядка включительно.*

---

* Определение Λ и H см. в [5].

** Функция $\varphi(x, y)$ имеет в области G асимптотически равномерно ограниченную разделенную разность по x, если $\left|\frac{1}{h}[\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)]\right| < C$ для всех $x, y \in G$ и всех $h \to 0$.

Лемма 2 следует из теоремы 1 Е. А. Волкова ([1]), которая остается справедливой для уравнения (7) и с граничным условием (8), только члены разложения, определяемые теоремой 1 Е. А. Волкова, в нашем случае зависят от h.

Способ, рассмотренный Е. А. Волковым, состоит в том, что разностный оператор L, аппроксимирующий оператор Лапласа Δ с точностью до величины порядка h^{2n}, представляется в виде суммы $L = \frac{1}{h^2}\Delta_h + L''$, где $\frac{1}{h^2}\Delta_h$ — разностный оператор, аппроксимирующий оператор Лапласа с точностью до величины порядка h^2. Разностное уравнение $L(u) = \varphi$, соответствующее уравнению Пуассона $\Delta u = \varphi$, решается методом итераций:

$$\frac{1}{h^2}\Delta_h(u^{(k+1)}) = \varphi - L''(u^{(k)}).$$

Из сформулированной нами теоремы следует, что q-е приближение $u^{(q)}$, полученное асимптотическим способом, дает решение уравнения (1) с такой же точностью, как и способ, рассмотренный Е. А. Волковым. Так например, при уточнении асимптотическим способом решения уравнения Пуассона $\Delta u = -2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y$ $(u|_\Gamma = 0)$ в квадрате $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y < 1)$ при $h = 0,1$ получено в первом приближении 2 верных знака, во втором приближении 4 и в третьем 6 верных знаков, т. е. то же, что и у Е. А. Волкова, но в данном случае операции, совершаемые над предыдущими приближениями для получения уравнения следующего приближения, более просты. Кроме того, при применении способа, рассмотренного Е. А. Волковым, заранее фиксируется порядок используемых старших разностей n, который выбирается из соображений малости h^{2n}, что еще не гарантирует такой же точности в решении. Таким образом, если полученная максимальная точность решения недостаточна, то для повышения точности нужно брать новый разностный оператор и, используя его полностью, находить новое приближение. С другой стороны, если необходимая точность получена раньше, чем проведено максимальное число итераций, то в этом случае можно было использовать разности более низкого порядка и провести счет экономнее. В случае применения асимптотического способа порядок точности заранее не фиксируется. Наконец, разностное уравнение для граничных точек в данном случае проще рассмотренных Е. А. Волковым.

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. А. Н. Колмогорову за постановку задачи и советы.

Институт математики
Академии наук СССР

Поступило
17 XII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Волков, ДАН, **94**, № 4, 685 (1954). [2] L. Fox, Proc. Roy. Soc., A, **190**, 31 (1947). [3] L. Woods, Quart. J. Mech. and Appl. Math., **3**, 349 (1950). [4] L. Collatz, Zs. angew. Math. u. Mech., **13**, 56 (1933). [5] Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, 1953.