Доклады Академии наук СССР
1955. Том 101, № 6

МАТЕМАТИКА

Ю. Я. КААЗИК и Э. Э. ТАММЕ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 XII 1954)

Пусть требуется найти приближенное решение функционального уравнения

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где P есть (в некоторой окрестности точного решения x^*) аналитический оператор ([3]) из банахова пространства X в линейное нормированное пространство Y. Начальное приближение x_0 решения предполагается известным.

Рассматриваемый метод состоит в нахождении последующих приближений x_n из рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} P(x_0) + P'(x_0)\,\Delta x_1 = 0, \\ P(x_0) + \Big[P'(x_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0)\,\Delta x_{n-k+1} \ldots \Delta x_{n-1}\Big]\Delta x_n = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots), \end{gathered} \tag{2}$$

где положено $\Delta x_i = x_i - x_0$.

В случае, когда P является комплексной функцией, из (2) получается известный метод, который изучен Фюрстенау, Шредером ([1]), Гамильтоном ([2]) и др. (ср. также ([4])).

Проблема применимости и сходимости данного процесса решается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть для начального приближения x_0 выполнены условия;*

1°. *Существует обратный оператор* $\Gamma = [P'(x_0)]^{-1}$, *причем*

$$\|\Gamma\| \leqslant B.$$

2°. $\|\Gamma P(x_0)\| \leqslant \eta$.

3°. *Найдутся постоянные A и H такие, что*

$$\Big\|\frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0)\Big\| \leqslant HA^{k-2} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

4°. *Постоянные B, η, A и H удовлетворяют неравенству*

$$A\eta + 2\sqrt{BH\eta} < 1.$$

5°. *Оператор P аналитичен во внутренних точках (разлагается внутри сферы в степенной ряд около x_0) и непрерывен на краевых точках сферы*

$$\|x - x_0\| \leqslant \frac{\eta}{1-\delta}, \tag{3}$$

где

$$\delta = {}^1\!/_2\,(1 - A\eta - \sqrt{(1-A\eta)^2 - 4BH\eta}\,). \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* (3) *решение* x^*, *к которому сходится процесс* (2) *со скоростью*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\eta}{1-m} m^n, \tag{5}$$

где

$$m = \frac{A\eta + \delta}{1-\delta}. \tag{6}$$

Доказательство. Очевидно,

$$\| \Delta x_1 \| = \| -\Gamma P(x_0) \| \leqslant \eta.$$

На основании 1° можем второе из уравнений (2) написать в виде

$$\left[E + \Gamma \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0) \Delta x_{n-k+1} \ldots \Delta x_{n-1}\right] \Delta x_n = -\Gamma P(x_0).$$

Опираясь на условия теоремы и теорему Банаха, нетрудно индуктивно доказать, что

$$\Delta x_n = -\left[E - \Gamma \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0) \Delta x_{n-k+1} \ldots \Delta x_{n-1}\right]^{-1} \Gamma P(x_0) \tag{7}$$

и

$$\| \Delta x_n \| < \frac{\eta}{1-\delta}. \tag{8}$$

Оценим теперь величину $\| x_{n+1} - x_n \|$. Из (7) получаем

$$x_{n+1} - x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = \left[E + \Gamma \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0) \Delta x_{n-k+2} \ldots \Delta x_n\right]^{-1} \times$$

$$\times \Gamma \left[\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0)(\Delta x_{n-k+2} \ldots \Delta x_n - \Delta x_{n-k+1} \ldots \Delta x_{n-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+1)!} P^{(n+1)}(x_0) \Delta x_1 \ldots \Delta x_n\right] \times$$

$$\times \left[E + \Gamma \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0) \Delta x_{n-k+1} \ldots \Delta x_{n-1}\right]^{-1} \Gamma P(x_0).$$

Так как производные высших порядков симметричны относительно своих аргументов ([3]), то

$$P^{(k)}(x_0)(\Delta x_{n-k+2} \ldots \Delta x_n - \Delta x_{n-k+1} \ldots \Delta x_{n-1}) =$$
$$= P^{(k)}(x_0) \Delta x_{n-k+2} \ldots \Delta x_{n-1}(\Delta x_n - \Delta x_{n-k+1})$$

и

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \frac{BH\eta}{(1-\delta)^2} \left[\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{A\eta}{1-\delta}\right)^{k-2} \| x_n - x_{n-k+1} \| + \left(\frac{A\eta}{1-\delta}\right)^{n-1} \eta\right].$$

Найдем постоянную $m \left(1 > m > \frac{A\eta}{1-\delta}\right)$ так, чтобы

$$\| x_{k+1} - x_k \| \leqslant \eta m^k \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

При $k = 0$, очевидно, $\| x_1 - x_0 \| = \| \Delta x_1 \| \leqslant \eta$. Если (9) верно и для всех $k < n$, то

$$\| x_n - x_{n-k+1} \| \leqslant \| x_n - x_{n-1} \| + \ldots + \| x_{n-k+2} - x_{n-k+1} \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\eta}{1-m}(m^{n-k+1} - m^n),$$

и m определяем из условия

$$\frac{BH\eta^2}{(1-\delta)^2}\left[\frac{1}{1-m}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{A\eta}{1-\delta}\right)^{k-2}(m^{n-k+1}-m^n)+\left(\frac{A\eta}{1-\delta}\right)^{n-1}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{BH\eta^2m^n}{(1-\delta)^2}\left[\frac{1}{(1-m)\left(m-\frac{A\eta}{1-\delta}\right)}-\frac{1}{(1-m)\left(1-\frac{A\eta}{1-\delta}\right)}\right]\leqslant\eta m^n.$$

Взяв в последнем случае знак равенства, получим выражение для m:

$$m=\frac{BH\eta}{(1-\delta)^2\left(1-\frac{A\eta}{1-\delta}\right)}+\frac{A\eta}{1-\delta}=\frac{A\eta+\delta}{1-\delta}<1,$$

т. е. (6). Итак, при таком выборе m соблюдается (9) для всех $k=0, 1, \ldots$

Теперь для любых натуральных p и n

$$\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\|x_{n+p}-x_{n+p-1}\|+\ldots+\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\frac{\eta}{1-m}m^n,$$

и из полноты пространства X следует существование предела

$$x^*=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

При $p\to\infty$ получим из предыдущего неравенства

$$\|x^*-x_n\|\leqslant\frac{\eta}{1-m}m^n\quad(n=1, 2, \ldots),$$

т. е. (5), а из (8) при $n\to\infty$

$$\|x^*-x_0\|\leqslant\frac{\eta}{1-\delta},$$

т. е. принадлежность x^* к сфере (3).

Остается доказать, что x^* является решением уравнения (1). Но на основании (8), 3° и 5°

$$P(x_n)=P(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}P^{(k)}(x_0)\,\Delta x_n^k.$$

Вычитая отсюда (2), получим

$$P(x_n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}P^{(k)}(x_0)(\Delta x_n^{k-1}-\Delta x_{n-k+1}\ldots\Delta x_{n-1})\,\Delta x_n+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}P^{(k)}(x_0)\,\Delta x_n^k.$$

Здесь

$$\left\|\frac{1}{k!}P^{(k)}(x_0)(\Delta x_n^{k-1}-\Delta x_{n-k+1}\ldots\Delta x_{n-1})\Delta x_n\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{1}{k!}P^{(k)}(x_0)\sum_{i=1}^{k-1}\Delta x_n^{k-1-i}(\Delta x_n-\Delta x_{n-i})\,\Delta x_{n-i+1}\ldots\Delta x_n\right\|\leqslant$$

$$\leqslant HA^{k-2}\left(\frac{\eta}{1-\delta}\right)^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\|x_n-x_{n-i}\|\leqslant\frac{H\eta^2m^{n-1}}{(1-\delta)(1-m)^2}\left(\frac{A\eta}{m(1-\delta)}\right)^{k-2},$$

и, следовательно:

$$\| P(x_n) \| \leqslant \frac{H\eta^2 m^{n-1}}{(1-\delta)(1-m)^2} \frac{1}{1-\frac{A\eta}{m(1-\delta)}} + H\left(\frac{\eta}{1-\delta}\right)^2 \frac{\left(\frac{A\eta}{1-\delta}\right)^{n+1}}{1-\frac{A\eta}{1-\delta}} \to 0$$

при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = 0.$$

Так как P непрерывен, то $P(x^*) = 0$, и теорема доказана.

Пользуясь методом сжатых отображений, можно доказать и следующую теорему:

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1° — 4° *теоремы* 1 *и условие*: 5°. *Оператор* P *аналитичен в сфере*

$$\| x - x_0 \| < \frac{1 - \sqrt{BH\eta}}{A + BH}, \tag{10}$$

то уравнение (1) *имеет в сфере* (10) *единственное решение.*

Нетрудно также доказать, что сфера (3) содержится в (10).

Полученная оценка (5) для точности приближения весьма хорошо согласуется с практикой. Ниже приводим два примера, которые иллюстрируют точность оценки (5) в случае одного уравнения и системы двух уравнений, хотя этими случаями не ограничивается область применимости данного метода.

Пример 1. Взяв в случае уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$ $x^3 = 2$, получаем следующие результаты:

n	x_n	Оценка по формуле (5)	Действительн. погрешность
1	2,1	0,0098	0,0055
2	2,0943	0,0009	0,0003
3	2,094558	$8 \cdot 10^{-5}$	$0{,}7 \cdot 10^{-5}$
4	2,0945513	$7 \cdot 10^{-6}$	$0{,}2 \cdot 10^{-6}$
5	2,09455149	$7 \cdot 10^{-7}$	$0{,}1 \cdot 10^{-7}$
6	2,0945514814	$6 \cdot 10^{-8}$	$0{,}02 \cdot 10^{-8}$

Пример 2. Введя метрику пространства m_2 и взяв $x_0 = 1{,}2$, $y_0 = 1{,}7$, получаем для системы уравнений $2x^3 - y^2 - 1 = 0$, $xy^3 - y - 4 = 0$:

n	x_n	y_n	Оценка	Действительн. погрешность
1	1,2349	1,6610	0,0054	0,00063
2	1,234278	1,661551	0,00064	0,000025
3	1,2342741	1,6615264	0,00008	0,0000004
4	1,234274493	1,661526465	0,00001	0,00000001

Тартусский государственный университет

Поступило 8 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Schröder, Math. Ann., **2**, 317 (1870). [2] H. J. Hamilton, Am. Math. Monthly, **57**, 517 (1950). [3] М. К. Гавурин, Уч. зап. ЛГУ, в. 19 (1950). [4] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, **3**, в. 6 (28) (1948).