Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 6

ГИДРАВЛИКА

Ф. И. ФРАНКЛЬ

ОПЫТ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ НАНОСОВ В НЕРАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 IV 1955)

Существующая «диффузионная теория» движения взвешенных наносов разработана и проверена только для случая равномерного потока ([1-3]). С другой стороны, выведенные нами динамические уравнения движения взвешенных наносов ([4]) в принципе применимы к любому течению, но содержащаяся в них осредненная сила сопротивления жидкости движению наносов R_i оставлена там неопределенной и должна быть определена при помощи допущений, согласующихся с диффузионной теорией в случае равномерного потока, что и является задачей данной заметки.

Согласно диффузионной теории имеем в равномерном потоке

$$sw + \alpha v' l \frac{ds}{dy} = 0. \tag{1}$$

Здесь s — мутность; w — предельная скорость свободного падения частицы (так называемая гидравлическая крупность); y — вертикальная координата *; l — путь смешения; v' — средний модуль вертикальной скорости пульсации и α — численный коэффициент. Смысл уравнения (1) заключается в том, что при равновесном распределении наносов поток твердых частиц равен и противоположен потоку частиц, вызванному падением частиц с предельной скоростью w. При этом w определяется из уравнения

$$D(w) = (\rho_s - \rho) g V, \tag{2}$$

где $D(w)$ — сопротивление отдельной частицы при движении ее со скоростью w в неподвижной жидкости; ρ^s — плотность материала частиц; ρ — плотность жидкости; V — средний объем одной частицы (в дальнейшем мы будем ради простоты считать, что все частицы имеют одинаковые объемы).

С другой стороны, полуэмпирическая теория турбулентного трения полагает

$$\tau = \beta \rho v' l \frac{du}{dy}, \tag{3}$$

где u — продольная осредненная скорость, а β — численный коэффициент.

Подробные опыты Ванони ([3]) показывают, что коэффициенты α и β не совпадают строго, но все же близки. Будем их в дальнейшем считать совпадающими.

* Точнее, координата, перпендикулярная ко дну; вместо w точнее надо писать $w \cos i$, где i — уклон.

В полуэмпирической теории турбулентного трения считается, что

$$\tau = \tau_0\left(1 - \frac{y}{h}\right), \tag{4}$$

где координата y считается от дна, h — глубина потока и

$$l = ky, \tag{5}$$

k — безразмерная постоянная. Эта постоянная в чистой воде равна 0,4; при больших средних мутностях, согласно опытам Ванони ([3]), она уменьшается. Кроме того принимается

$$\beta v' = l\frac{du}{dy}, \tag{6}$$

так что

$$\tau = \rho\left(l\frac{du}{dy}\right)^2 = \rho(\beta v')^2 = \tau_0\left(1 - \frac{y}{h}\right), \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{ky}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}\left(1 - \frac{y}{h}\right)},$$

и коэффициент обмена ε равен

$$\varepsilon = \beta v' l = l^2\frac{du}{dy} = k\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\,y\sqrt{1 - \frac{y}{h}}. \tag{7}$$

Привлечем теперь для сравнения наши динамические уравнения для движения взвешенных наносов ([4]), причем пропустим знаки осреднения «*» и «—»:

$$\rho_s s\left(\frac{\partial u_{is}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} u_{sk}\frac{\partial u_{is}}{\partial x_k}\right) = -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \Pi_{iks}}{\partial x_k} - s\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + R_i + \rho_s s X_{is}$$

$$\left(R_i = -\sum_{k=1}^{3} s\overline{\frac{\partial p'_{ik}}{\partial x_k}}\right). \tag{8}$$

В случае равномерного потока при равновесном распределении наносов все величины зависят только от $y = x_2$. При этом $u_{1s} = u_1$ для достаточно мелких наносов (см. об этом опыты Н. А. Михайловой ([5])) и, пренебрегая микронапряжениями трения, примем $p_{11} = p_{22} = p_{33} = p$, $p_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Далее $X_{1s} = g\sin i \approx gi$, $X_{2s} = -g\cos i \approx -g$, $X_{3s} = 0$. Таким образом получим

$$-\frac{d\Pi_{yys}}{dy} - s\frac{dp}{dy} + R_y - \rho_r s g = 0.$$

Принимая, что наносы не влияют на распределение давления, что при малых мутностях допустимо, получим $dp/dy = -\rho g$, так что

$$R_y - \frac{d\Pi_{yys}}{dy} = 0. \tag{9}$$

Но $\Pi_{yys} = \rho_s (v'^2_s)^*_s$.

Средний квадрат вертикальных пульсационных скоростей $(v'^2_s)^*_s$ мало зависит от y, за исключением точек вблизи дна (см. опыты Е. М. Минского ([6])) и равен приблизительно $0{,}02\,U^2_{\max}$. Следовательно,

$$\frac{1}{s(\rho_s - \rho)g}\frac{d\Pi_{yys}}{dy} \approx 0{,}02\frac{\rho_s U^2_{\max}}{(\rho_s - \rho)g}\frac{1}{s}\frac{ds}{dy} = -0{,}02\frac{U^2_{\max}}{gh}\frac{d\ln s}{d(y/h)} =$$

$$= -0{,}02\frac{U^2_{\max}}{gh}\frac{wh}{\alpha v' l} = -0{,}02\frac{\rho_s}{\rho_s - \rho}\frac{U^2_{\max}}{gh}\frac{wh}{\sqrt{\tau_0/\rho}\,ky\sqrt{1 - y/h}}. \tag{10}$$

Отношение скорости падения частиц w к динамической скорости $\sqrt{\tau_0/\rho}$ практически, как правило, мало: в опытах Ванони [3] это отношение всегда значительно меньше 0,1. Число Фруда $U_{\max}/\sqrt{gh}$ по порядку, как правило, сравнимо с единицей или меньше.

Следовательно, за исключением непосредственной близости дна и поверхности, эффективный вес частиц уравновешивается испытанным ими сопротивлением, но не градиентом турбулентных напряжений; последним можно практически пренебречь.

Мы приходим, следовательно, к выводу, что при равновесном распределении частиц последние испытывают в жидкости некоторое сопротивление, несмотря на то, что их средняя вертикальная скорость, так же как и средняя вертикальная скорость жидкости, равна нулю.

Физически это нетрудно объяснить. В самом деле, представим себе, что частицы наносов заменены частицами, имеющими тот же удельный вес, что и жидкость. Они начнут тогда диффундировать снизу вверх, стремясь к равномерному распределению по глубине. Это движение вызвано тем, что твердые частицы захватываются движущимися беспорядочно сравнительно крупными объемами жидкости; имея тот же удельный вес, что и жидкость, они при этом практически имеют те же скорости, что и переносящие их объемы жидкости, и в среднем не испытывают сопротивления. Итак, следует принять, что осредненное сопротивление частиц R_i равно нулю тогда, когда частицы двигаются относительно жидкости со «скоростью турбулентной диффузии»

$$v_{id} = -\varepsilon \frac{\partial \ln s}{\partial x_i}. \tag{11}$$

Если $D_i(\mathbf{v})$ — компоненты сопротивления частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ в неподвижной жидкости, то мы можем положить осредненное сопротивление частиц в единице объема равной

$$R_i = \frac{s}{V} D_i(\mathbf{u}_s - \mathbf{u} - \mathbf{v}_d) \tag{12}$$

($\mathbf{u}_s$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_d$ — соответственно, осредненные скорости частиц, жидкости и турбулентной диффузии; заметим, что s/V есть число частиц в единице объема).

Для малых частиц сферической формы, когда применима формула Стокса, будем иметь

$$R_i = -\frac{s}{V} 6\pi\mu r (u_{is} - u_i - v_{id}) = -\frac{9}{2}\frac{s}{r^2}(u_{is} - u_i - v_{id}). \tag{12a}$$

Таким образом, мы приходим к следующим приближенным уравнениям для движения наносов в равномерном потоке:

$$\rho_s \left(\frac{\partial u_{is}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} u_{ks} \frac{\partial u_{is}}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{s} R_i + \rho_s X_{is}, \tag{13}$$

где R_i определяется из формул (12) или (12а), причем v_{id} дается формулой (11). Для приближенной теории можно считать достаточным определить входящий в формулу (10) коэффициент обмена ε по формуле (7), хотя последняя, строго говоря, относится только к равномерному потоку; более точными теориями для определения ε мы пока не обладаем *.

* В работе [7] этот вопрос не решен до конца, так как эту работу требуется дополнить неразработанными пока полуэмпирическими теориями.

Для замыкания системы (13) требуется теперь только уравнение неразрывности

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial (su_{ks})}{\partial x_k}=0. \tag{14}$$

Движение жидкости в первом приближении при малых мутностях может быть определено без учета влияния твердых частиц, так что в уравнения (13), (14) входят только неизвестные u_{is} и s, т. е. столько же неизвестных, сколько налицо уравнений.

В частном случае равномерного течения мы получаем снова, как и должно быть, результаты диффузионной теории. В самом деле, из (13) получим:

$$s\left(\rho_s g+\frac{dp}{dy}\right)=s(\rho_s-\rho)g=R_y=\frac{s}{V}D(-v_d),$$

или

$$D(-v_d)=(\rho_s-\rho)gV,$$

что, благодаря (2), дает

$$w=-v_d$$

в согласии с уравнением (1).

В тех случаях, когда необходимо пользоваться точными уравнениями (8), мы также предлагаем определять силу сопротивления R_i из уравнения (12).

Обнаруженное Н. А. Михайловой ([5]) отставание осредненного продольного движения крупных наносов от осредненного продольного движения жидкости в равномерном потоке не может быть объяснено приближенными уравнениями (13), а только точными уравнениями (8). Это отставание объясняется в основном поперечным градиентом турбулентного касательного напряжения Π_{xys} согласно условию:

$$-s\frac{dp_{xy}}{dy}-\frac{d\Pi_{xys}}{dy}+R_x+s\rho_s gi\approx-\frac{d\Pi_{xys}}{dy}+R_x+s\rho gi=0.$$

Поскольку приближенно

$$-\frac{d\Pi_{xy}}{dy}+\rho gi\approx 0,$$

можно также написать

$$s\frac{d\Pi_{xy}}{dy}-\frac{d\Pi_{xys}}{dy}+R_x=0. \tag{15}$$

Для очень мелких наносов, согласно (12), это дает в пределе $R_x=0$, т. е. отставание должно исчезнуть, в полном соответствии с данными опыта.

Киргизский государственный университет

Поступило 5 VII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Th. Kármán, JAS, 1, No. 1 (1934). [2] М. А. Великанов, Метеорология и гидрология, № 9—10 (1938). [3] V. A. Vanoni, Am. Soc. Civ. Eng. Papers, June (1944). [4] Ф. И. Франкль, ДАН, **92**, № 2 (1953). [5] Н. А. Михайлов, Метеорология и гидрология, № 7 (1953). [6] Е. М. Минский, Тр. ЦАГИ, № 625 (1947). [7] Ф. И. Франкль, ДАН, **102**, № 5 (1955).