Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 6

ГИДРОМЕХАНИКА

М. Л. ЛИДОВ

К ТЕОРИИ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ОКОЛО ОДНОМЕРНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 22 IV 1955)

В общем случае характеристики неустановившегося адиабатического движения идеального совершенного газа зависят от трех существенных постоянных параметров a, b и ε. Без ограничения общности всегда можно принять, что размерность этих параметров определяется формулами вида:

$$[a] = ML^kT^s, \quad [b] = L^mT^n, \quad [\varepsilon] = T^{-l}.$$

При использовании сферической системы координат всегда можно ввести безразмерные переменные по формулам * ([1]):

$$\begin{aligned} V_r &= b^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{n}{m}-1} \tilde{V}_r(\lambda, \nu, \theta, \varphi), \\ V_\theta &= b^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{n}{m}-1} \tilde{V}_\theta(\lambda, \nu, \theta, \varphi), \\ V_\varphi &= b^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{n}{m}-1} \tilde{V}_\varphi(\lambda, \nu, \theta, \varphi), \\ P &= ab^{-\frac{k+1}{m}} t^{\frac{n}{m}(k+1)-(s+2)} \tilde{P}(\lambda, \nu, \theta, \varphi), \\ \rho &= ab^{-\frac{k+3}{m}} t^{\frac{n}{m}(k+3)-s} \tilde{R}(\lambda, \nu, \theta, \varphi), \end{aligned} \tag{1}$$

где V_r, V_θ, V_φ — соответствующие компоненты скорости; P — давление; ρ — плотность; t — время; θ и φ — угловые координаты; $\lambda = br^{-m}t^{-n}$ и $\nu = \varepsilon t^l$ — безразмерные переменные параметры; $\tilde{V}_r$, $\tilde{V}_\theta$, $\tilde{V}_\varphi$, $\tilde{P}$ и $\tilde{R}$ — безразмерные функции.

Предположим, что при $\nu = 0$ рассматриваемое движение вырождается в автомодельное движение со сферической симметрией, для которого $[\tilde{P}]_{\nu=0} = P_0(\lambda)$, $[\tilde{R}]_{\nu=0} = R_0(\lambda)$, $[\tilde{V}_r]_{\nu=0} = V_{r0}(\lambda)$, $[\tilde{V}_\theta]_{\nu=0} = [\tilde{V}_\varphi]_{\nu=0} = 0$.

В области, где ν мало, для исследования эффектов малых отклонений от автомодельного решения можно провести линеаризацию соответствующей безразмерной системы уравнений. В общем случае задача сводится к решению системы 5 линейных уравнений в частных производных по λ, φ, θ с переменными коэффициентами, зависящими от основного точного решения.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_\Omega \left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right)^z \rho \, d\Omega, \tag{2}$$

* Используемая ниже теория размерности, подобия и автомодельных движений изложена в книге Л. И. Седова ([1]).

где γ — показатель адиабаты; Ω — переменный во времени объем, заключенный между двумя сферами $r''(t) = b^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{n}{m}} (\lambda'')^{-\frac{1}{m}}$, $r'(t) = b^{\frac{1}{m}} t^{-\frac{n}{m}} (\lambda')^{-\frac{1}{m}}$ и боковыми криволинейными поверхностями, перемещающимися вместе с частицами, т. е.

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{r'}^{r''} dr \int_{\varphi_1(\lambda,\nu)}^{\varphi_2(\lambda,\nu)} d\varphi \int_{\theta_1(\lambda,\nu,\varphi)}^{\theta_2(\lambda,\nu,\varphi)} d\theta.$$

В случае малых отклонений от сферической симметрии пределы интегрирования можно представить в виде:

$$\theta_2 = \theta_2^0 + \Theta_2^1(\lambda, \varphi, \theta_2^0)\nu + \ldots, \quad \theta_1 = \theta_1^0 + \Theta_1^1(\lambda, \varphi, \theta_1^0)\nu + \ldots,$$

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 + \varphi_1^1(\lambda, \varphi_1^0, \theta_1^0, \theta_2^0)\nu + \ldots, \quad \varphi_2 = \varphi_2^0 + \varphi_2^1(\lambda, \varphi_2^0, \theta_1^0, \theta_2^0)\nu + \ldots,$$

где θ_1^0, θ_2^0, φ_1^0, φ_2^0 — произвольные фиксированные углы; Θ_1^1, Θ_2^1, φ_1^1 и φ_2^1 — неизвестные функции, характеризующие в линейной постановке отличие траектории от прямолинейной.

Из определения I имеем $[I] = M^{(1-\gamma)z+1} L^{(3\gamma-1)z} T^{-2z}$. Величина I может быть представлена (1) в виде

$$I = a^x b^y t^\mu K(\lambda', \lambda'', \nu, \theta_1^0, \theta_2^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0), \tag{3}$$

где K — некоторая функция, а x, y, z, μ связаны соотношениями

$$(1-\gamma)z + 1 = x, \quad (3\gamma - 1)z = kx + my, \quad -2z = sx + ny + \mu. \tag{4}$$

Продифференцируем соотношения (2) и (3) по времени и приравняем правые части:

$$a^x b^y t^{\mu-1}\left(\mu K(\lambda', \lambda'', \nu) + l\,\frac{\partial K(\lambda', \lambda'', \nu)}{\partial \nu}\nu\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\Omega^*} \rho\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right)^z d\Omega + \int_{\sigma''} \rho\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right)^z \left(\frac{dr}{dt} - V_r\right) d\sigma - \int_{\sigma'} \rho\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right)^z \left(\frac{dr}{dt} - V_r\right) d\sigma, \tag{5}$$

где Ω^* — объем, совпадающий в рассматриваемый момент с Ω и перемещающийся вместе с частицами; $\int_{\sigma''}$ и $\int_{\sigma'}$ — интегралы по частям сферических поверхностей $r = r''$ и $r = r'$, ограничивающих объем Ω. Так как (P/ρ^γ) есть функция энтропии, то в силу адиабатичности производная от интеграла, взятого по объему Ω^*, равна нулю.

Если перейти к безразмерным переменным (1), то, принимая во внимание (4), последнее равенство можно написать в безразмерном виде:

$$\mu K(\lambda', \lambda'', \nu) + l\nu\,\frac{\partial K(\lambda', \lambda'', \nu)}{\partial \nu} =$$

$$= -\int_{\sigma''(\lambda=\lambda')} F(\lambda, \nu, \varphi, \theta)\, d\omega + \int_{\sigma'(\lambda=\lambda')} F(\lambda, \nu, \varphi, \theta)\, d\omega, \tag{6}$$

где $F(\lambda, \nu, \varphi, \theta) = \frac{\lambda^{-3/m}}{m}(n + \lambda^{1/m} m \tilde{V}_r)\left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{R}^\gamma}\right)^z \tilde{R}$; $d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ — элемент телесного угла.

Если

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \gamma - 1 \\ k & m & 1 - 3\gamma \\ s & n & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то всегда можно подобрать такое $z = z^*$, чтобы система (4) удовлетворялась при произвольном значении μ.

Введем обозначения:

$$\left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \nu}\right]_{\nu=0} = P(\lambda, \theta, \varphi), \quad \left[\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \nu}\right]_{\nu=0} = R(\lambda, \theta, \varphi), \quad \left[\frac{\partial \tilde{V}_r}{\partial \nu}\right]_{\nu=0} = V_r(\lambda, \theta, \varphi).$$

Величины P, R, V_r суть функции, которые удовлетворяют линеаризованной безразмерной системе уравнений.

Пусть $\mu = -l$, т. е. $z^* = \dfrac{lm + kn - ms}{n[3\gamma - 1 - k(1-\gamma)] - m[s(\gamma-1)-2]}$. Если продифференцировать (6) по ν и положить $\nu = 0$, то, как следствие получившегося равенства, будем иметь основное соотношение (7):

$$F_0(\lambda)(\cos\theta_1^0 - \cos\theta_2^0)(\varphi_2^1 - \varphi_1^1) + \int_{\varphi_1^0}^{\varphi_2^0} d\varphi\, F_0(\lambda)[\sin\theta_2^0\Theta_2^1 - \sin\theta_1^0\Theta_1^1] +$$

$$+ \int_{\varphi_1^0}^{\varphi_2^0} d\varphi \int_{\theta_1^0}^{\theta_2^0} d\theta \sin\theta \{D_1(\lambda) P(\lambda, \varphi, \theta) + D_2(\lambda) R(\lambda, \varphi, \theta) + D_3(\lambda) V_r(\lambda, \varphi, \theta)\} =$$

$$= C(\theta_1^0, \theta_2^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0), \qquad (7)$$

где

$$D_1(\lambda) = \frac{z^*\lambda^{-3/m}\left(\frac{P_0}{R_0^\gamma}\right)^{z^*-1}(n + m\lambda^{1/m}V_{r0})}{R_0^{\gamma-1}},$$

$$D_2(\lambda) = \frac{\lambda^{-3/m}}{m}(1 - \gamma z^*)(n + m\lambda^{1/m}V_{r0})\left(\frac{P_0}{R_0^\gamma}\right)^{z^*},$$

$$D_3(\lambda) = \lambda^{-2/m}R_0\left(\frac{P_0}{R_0^\gamma}\right)^{z^*},$$

$$F_0(\lambda) = \frac{\lambda^{-3/m}}{m}(n + m\lambda^{1/m}V_{r0})\left(\frac{P_0}{R_0^\gamma}\right)^{z^*}R_0,$$

а $C(\theta_1^0, \theta_2^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0)$ — неизвестная функция указанных аргументов.

Рассмотрим примеры.

1. Пусть рассматриваемое движение не автомодельно, но обладает сферической симметрией. В этом случае имеем $\varphi_2^1(\lambda, \varphi_2^0, \theta_1^0, \theta_2^0) \equiv \varphi_1^1(\lambda, \varphi_1^0, \theta_1^0, \theta_2^0) \equiv \Theta_1^1(\lambda, \varphi, \theta_1^0) \equiv 0$. Из (7) для системы уравнений в вариациях имеем интеграл в виде

$$D_1(\lambda)P(\lambda) + D_2(\lambda)R(\lambda) + D_3(\lambda)V_r(\lambda) = \text{const}.$$

2. Случай произвольного одночленного разделения переменных вида (2)

$$P(\lambda, \theta, \varphi) = P_1(\lambda)P_2(\theta, \varphi),$$

$$R(\lambda, \theta, \varphi) = R_1(\lambda)R_2(\theta, \varphi), \quad V_r(\lambda, \theta, \varphi) = V_{r1}(\lambda)V_{r2}(\theta, \varphi),$$

причем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \{P_2(\theta, \varphi), R_2(\theta, \varphi), V_{r2}(\theta, \varphi)\} = \{A, B, C\},$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

В этом случае, полагая $\varphi_1^0 = 0$, $\varphi_2^0 = 2\pi$, $\theta_1^0 = 0$, $\theta_2^0 = \pi$, получим интеграл в виде:

$$AD_1(\lambda) P_1(\lambda) + BD_2(\lambda) R_1(\lambda) + CD_3(\lambda) V_{r1}(\lambda) = \text{const}.$$

Ясно, что приведенные примеры не исчерпывают всех случаев, в которых из соотношения (7) можно получить интеграл уравнений в вариациях. Кроме того, (7) может служить для анализа решений и в более сложных случаях.

Из вывода видно, что без существенных изменений аналогичные соотношения можно получить при малых отклонениях от автомодельных движений с цилиндрической и плоской симметрией.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, изд. 3-е, 1954.
[2] В. П. Карликов, ДАН, **101**, № 6 (1955).