Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 6

ГИДРОМЕХАНИКА

И. З. КАЛИШЕВИЧ

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА БЕЗ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 III 1955)

В работе (1) для плоского установившегося вихревого движения идеальной сжимаемой жидкости при постоянном теплосодержании получено общее решение

$$w_1(\xi+\eta)\,\psi(\xi,\eta)+w_2(\xi+\eta)\,\chi(\psi)=\Phi_1(\xi)+\Phi_2(\eta), \qquad (1)$$

где $w_1(\xi+\eta)=c_1e^{\xi+\eta}+c_2e^{-\xi-\eta}$; $w_2(\xi+\eta)=c_3e^{\xi+\eta}+c_4e^{-\xi-\eta}$; ξ и η — характеристические координаты; $\psi(\xi,\eta)$ — искомая функция тока; c_1, c_2, c_3, c_4 — постоянные коэффициенты; $\chi(\psi)$, $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\eta)$ — произвольные функции, определяемые из граничных условий при решении краевых задач. Произвольная функция $\chi(\psi)$ связана с функцией $\tilde{\vartheta}_*(\psi)$, характеризующей распределение энтропии формулой

$$\chi(\psi)=\int_0^{\psi}\tilde{\vartheta}_*(\psi)\,d\psi. \qquad (2)$$

Так как $\chi(\psi)$ мала, если мала $\tilde{\vartheta}(\psi)$ (а это основное предположение работы (1)), то аргумент функции $\chi(\psi)$ заменим близкой величиной

$$\zeta(\xi,\eta)=\frac{\Phi_1(\xi)+\Phi_2(\eta)}{w_1(\xi+\eta)},$$

которая равна ψ при $\chi(\psi)=0$. Тогда общее решение (1) можем записать в виде

$$\psi(\xi,\eta)=\frac{\Phi_1(\xi)+\Phi_2(\eta)}{w_1(\xi+\eta)}-\frac{w_2(\xi+\eta)}{w_1(\xi+\eta)}\chi(\zeta). \qquad (3)$$

В настоящей заметке полученное общее решение уравнения движения используется для решения четырех краевых задач, относящихся к безударным движениям газа.

Задача 1. На некоторой кривой AB, пересекаемой характеристиками $\xi=\text{const}$ и $\eta=\text{const}$ только в одной точке, известны гидродинамические параметры потока газа. Необходимо определить движение в замкнутой области, ограниченной этой кривой и характеристиками разных семейств, выходящими из концов отрезка AB.

Пусть уравнение кривой AB $\xi=\bar{\xi}(\eta)$ или $\eta=\bar{\eta}(\xi)$; на ней задана функция тока $\psi=\psi_1(\xi)=\psi_2(\eta)$, ее производная $\partial\psi/\partial\xi=f_1(\xi)$ или $\partial\psi/\partial\eta=f_2(\eta)$ и функция $\chi(\psi)$, характеризующая распределение энтропии в потоке на кривой AB, а следовательно, так как в рассматриваемой области нет скачков уплотнения, и во всей области ABC.

Если известна производная $\partial\psi/\partial\xi=f_1(\xi)$, то другая производная $\partial\psi/\partial\eta=f_2(\eta)$ определится из системы

$$\frac{d\psi}{d\xi}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\bar{\eta}'(\xi)=\psi_1'(\xi),\quad \frac{d\psi}{d\eta}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\bar{\xi}'(\eta)+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=\psi_2'(\eta).$$

Дифференцируем (1) по ξ и по η и подставляем в полученную систему значения функции $\psi(\xi, \eta)$ и ее производных на кривой AB так, чтобы получить справа и слева функции только ξ или только η, т. е.

$$\Phi_1'(\xi) = w_1'(\xi + \overline{\eta})\,\psi_1 + w_2'(\xi + \overline{\eta})\,\chi(\psi_1) + \left[w_1(\xi + \overline{\eta}) + w_2(\xi + \overline{\eta})\,\frac{d\chi}{d\psi}\right] f_1(\xi), \tag{4}$$

$$\Phi_2'(\eta) = w_1'(\overline{\xi} + \eta)\,\psi_2 + w_2'(\overline{\xi} + \eta)\,\chi(\psi_2) + \left[w_1(\overline{\xi} + \eta) + w_2(\overline{\xi} + \eta)\,\frac{d\chi}{d\psi}\right] f_2(\eta).$$

Определяя из (4) квадратурами $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$ и подставляя их в общее решение задачи, получим класс решений, зависящих от одной произвольной постоянной. После определения произвольной постоянной из условия совпадения $\psi(\xi, \eta)$ с заданным значением в какой-либо точке кривой AB получим частное решение, удовлетворяющее краевым условиям задачи.

Задача 2. На отрезках двух характеристик разных семейств AB и BC заданы гидродинамические параметры потока, т. е. на AB $\xi = \xi_0$ известно $\psi = \psi_1(\eta)$ и $\chi(\psi)$ и на BC $\eta = \eta_0$ известно $\psi = \psi_2(\xi)$ и $\chi(\psi)$, причем в точке пересечения характеристик (ξ_0, η_0) значения заданных функций равны $\psi_1(\eta_0) = \psi_2(\xi_0)$. Определить движение в замкнутой области, ограниченной заданными характеристиками AB и BC и двумя характеристиками разных семейств, выходящими из концов A и C.

Из общего решения (1) при помощи условия на характеристике $\xi = \xi_0$ определим функцию $\Phi_2(\eta)$ с точностью до произвольной постоянной; аналогично на $\eta = \eta_0$ определим функцию $\Phi_1(\xi)$. Подставляя найденные произвольные функции в общее решение (1), получим уравнение для определения $\psi(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} w_1(\xi + \eta)\,\psi(\xi, \eta) + w_2(\xi + \eta)\,\chi(\psi) = {} & w_1(\xi_0 + \eta)\,\psi_1(\eta) + w_2(\xi_0 + \eta)\,\chi(\psi_1) + \\ & + w_1(\xi + \eta_0)\,\psi_2(\xi) + w_2(\xi + \eta_0)\,\chi(\psi_2) - w_1(\xi_0 + \eta_0)\,\psi_1(\eta_0) - \\ & - w_2(\xi_0 + \eta_0)\,\chi[\psi_1(\eta_0)]. \end{aligned} \tag{5}$$

При подстановке сумму произвольных постоянных $\Phi_1(\xi_0) + \Phi_2(\eta_0)$ мы определили из условия равенства заданных функций в точке (ξ_0, η_0). Функция $\chi(\psi)$ в задаче известна, и, разрешая (5) относительно $\psi(\xi, \eta)$, получим решение задачи, удовлетворяющее краевым условиям.

Задача 3. Найти движение в области, ограниченной характеристикой AB $\xi = \xi_0$, на которой известны $\psi = \psi_2(\eta)$ и $\chi(\psi)$, свободной поверхностью AC с заданным постоянным давлением σ_0 и характеристикой другого семейства, выходящей из точки B.

Свободная поверхность есть линия тока; пусть ей соответствует $\psi(\xi, \eta) = 0$. Тогда очевидно, что на свободной поверхности

$$\chi(\psi) = 0, \quad [\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta)]_{\psi=0} = 0, \quad \xi + \eta = m\sigma_0 \tag{6}$$

(значение m см. в работе [1]).

При помощи условия на характеристике AB из общего решения (1) определим произвольную функцию $\Phi_2(\eta)$:

$$\Phi_2(\eta) = w_1(\xi_0 + \eta)\,\psi_2(\eta) + w_2(\xi_0 + \eta)\,\chi(\psi_2) - \Phi_1(\xi_0). \tag{7}$$

Из условия (6) получим

$$\Phi_1(\xi) = -\Phi_1(\eta)\big|_{\xi+\eta=m\sigma_0} = -\Phi_2(m\sigma_0 - \xi).$$

Используя (7), запишем произвольную функцию $\Phi_1(\xi)$ в виде

$$\Phi_1(\xi) = -w_1(\xi_0 + m\sigma_0 - \xi)\,\psi_2(m\sigma_0 - \xi) - w_2(\xi_0 + m\sigma_0 - \xi)\,\chi(\psi_2) - \Phi_1(\xi_0).$$

Решение задачи найдется из уравнения

$$w_1(\xi+\eta)\,\psi(\xi,\eta) + w_2(\xi+\eta)\,\chi(\psi) = w_1(\xi_0+\eta)\,\psi_2(\eta) + w_2(\xi_0+\eta)\,\chi(\psi_2) - \\ - w_1(\xi_0 + m\sigma_0 - \xi)\,\psi_2(m\sigma_0 - \xi) - w_2(\xi_0 + m\sigma_0 - \xi)\,\chi[\psi_2(m\sigma_0 - \xi)].$$

Задача 4. Определим движение в области между характеристикой AB $\xi = \xi_0$, на которой заданы $\psi = \psi_2(\eta)$ и $\chi(\psi)$, твердой стенкой AC, параметрическое уравнение которой в плоскости x, y имеет вид

$$x = X(\theta), \quad y = Y(\theta) \tag{8}$$

(θ — угол между касательной к стенке и осью x), и характеристикой другого семейства BC.

Твердая стенка является линией тока; принимаем за нее $\psi(\xi, \eta) = 0$, и тогда

$$\chi(\psi)\big|_{\psi=0} = 0, \quad [\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta)]_{\psi=0} = 0. \tag{9}$$

На характеристике AB определим функцию $\Phi_2(\eta)$:

$$\Phi_2(\eta) = w_1(\xi_0+\eta)\,\psi_2(\eta) + w_2(\xi_0+\eta)\,\chi(\psi_2) - \Phi_1(\xi_0). \tag{10}$$

Для решения задачи необходимо получить уравнение стенки в координатах ξ, η; используем для этого соотношения, полученные в работе [1]:

$$dx = \frac{1}{\lambda_0}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\sin\theta - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial\delta}\cos\theta\right)d\theta + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\sin\theta - \frac{\partial^2\lambda}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cos\theta\right)d\sigma\right], \tag{11}$$

$$dy = -\frac{1}{\lambda_0}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cos\theta + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\sin\theta\right)d\theta + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\cos\theta - \frac{\partial^2\lambda}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\sin\theta\right)d\sigma\right].$$

Исключая независимое переменное $d\sigma$, деля на $d\theta$ и заменяя $dx/d\theta$ и $dy/d\theta$ их значением на стенке, получим дифференциальное уравнение стенки в переменных σ, θ:

$$\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\sin\theta + \frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\cos\theta\right)X'(\theta) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\sin\theta - \frac{\partial^2\lambda}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cos\theta\right)Y'(\theta) = \\ = \frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 - \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Дифференцируя общее решение (1) по ξ и по η, получим линейную неоднородную систему для определения $\partial\psi/\partial\xi$ и $\partial\psi/\partial\eta$:

$$w_1'(\xi+\eta)\,\psi + w_1(\xi+\eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + w_2'(\xi+\eta)\,\chi(\psi) + w_2(\xi+\eta)\frac{d\chi}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \Phi_1'(\xi), \tag{13}$$

$$w_1'(\xi+\eta)\,\psi + w_1(\xi+\eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + w_2'(\xi+\eta)\,\chi(\psi) + w_2(\xi+\eta)\frac{d\chi}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \Phi_2'(\eta).$$

Так как на стенке $\eta = \eta(\xi)$, то из условий (9) имеем

$$\Phi_1'(\xi) = -\Phi_2'(\eta)\,\eta'(\xi). \tag{14}$$

Подставляя в систему (13) значения функций на стенке (9) и (14) и разрешая ее относительно производных, получим

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right|_{\eta=\eta(\xi)} = \frac{-\Phi_2'(\eta)\,\eta'(\xi)}{w_1(\xi+\eta)+w_2(\xi+\eta)\,d\chi/d\psi},$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta(\xi)} = \frac{\Phi_2'(\eta)}{w_1(\xi+\eta)+w_2(\xi+\eta)\,d\chi/d\psi}. \qquad (15)$$

Входящая в эти формулы произвольная функция $\Phi_2(\eta)$ нам уже известна по формуле (10). Подставляя в уравнение (12), полученное в работе [1], выражение для λ

$$\lambda(\psi,\sigma) = w_1(\sigma) + w_2(\sigma)\,\tilde{\vartheta}_*(\psi),$$

используя формулы перехода

$$m\sigma+\theta = 2\xi, \quad m\sigma-\theta = 2\eta$$

и формулы (15) для производных $\partial\psi/\partial\xi$ и $\partial\psi/\partial\eta$, получим дифференциальное уравнение твердой стенки в переменных ξ и η:

$$[w_1(\xi+\eta)+w_2(\xi+\eta)\,\tilde{\vartheta}_*(0)]\,[Y'(\xi-\eta)\cos(\xi-\eta) -$$
$$-X'(\xi-\eta)\sin(\xi-\eta)]\,[1+\eta'(\xi)] + [w_1'(\xi+\eta) +$$
$$+w_2'(\xi+\eta)\,\tilde{\vartheta}_*(0)]\{[X'(\xi-\eta)\cos(\xi-\eta)+Y'(\xi-\eta)\sin(\xi-\eta)]\,[1-\eta'(\xi)] -$$
$$-\frac{2m}{\lambda_0}\,\Phi_2'(\eta)\,\eta'(\xi) = 0. \qquad (16)$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения даст нам уравнение стенки $\eta=\bar{\eta}(\xi)$. Получающаяся при этом произвольная постоянная интегрирования определится из условия, что стенка проходит через известную точку (ξ_0, η_0), в которой характеристика AB пересекается со стенкой.

Из равенства (9) определим

$$\Phi_1(\xi) = -\Phi_2(\eta)\,|_{\eta=\bar{\eta}(\xi)} = -\Phi_2(\bar{\eta}(\xi)]. \qquad (17)$$

Подставляя (10) и (17) в общее решение (1), получим уравнение для определения $\psi(\xi,\eta)$:

$$w_1(\xi+\eta)\,\psi(\xi,\eta)+w_2(\xi+\eta)\,\chi(\psi) = w_1(\xi_0+\eta)\,\psi_2(\eta) +$$
$$+w_2(\xi_0+\eta)\,\chi(\psi_2) - w_1[\xi_0+\bar{\eta}(\xi)]\,\psi_2[\bar{\eta}(\xi)] - w_2[\xi_0+\bar{\eta}(\xi)]\,\chi[\psi_2(\bar{\eta})]. \qquad (18)$$

Полученные решения задач могут быть записаны в виде (3), разрешенном относительно искомой функции $\psi(\xi,\eta)$.

Эти четыре задачи исчерпывают все обычно рассматриваемые случаи безударного сверхзвукового движения идеальной сжимаемой жидкости.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
13 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. З. Калишевич, ДАН, 99, № 1 (1954).