Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. В. ХВЕДЕЛИДЗЕ

ОБ ОДНОЙ РАЗРЫВНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА — ПРИВАЛОВА В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 9 III 1955)

1. При решении граничных задач теории аналитических функций следует различать три случая. В первом случае граничные значения искомых аналитических функций непрерывны, во втором они имеют разрывы в конечном числе точек, а в третьем множество точек разрыва бесконечно.

В дальнейшем граничные задачи в первом случае будем называть непрерывными, во втором — кусочно-непрерывными, а в третьем — разрывными. Изучение разрывных задач имеет самостоятельный интерес, а также необходимо для завершения хорошо известных результатов, относящихся к непрерывным и кусочно-непрерывным задачам.

2. Рассмотрим следующую граничную задачу: найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в любой конечной области, не содержащей точек кривой C, и удовлетворяющую на C граничному условию

$$\Phi^+(t) = a(t)\,\Phi^-(t) + b(t), \tag{1}$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ — граничные значения $\Phi(z)$ в точке $t \in C$, когда $z \to t$, соответственно, слева или справа по отношению к выбранному положительному направлению на C, а $a(t)$ и $b(t)$ — заданные на C функции.

В непрерывном и кусочно-непрерывном случаях эта задача уже давно рассматривалась (см., например, [1]); впервые она встречается у Римана, а в дальнейшем у разных авторов в качестве важного вспомогательного средства при решении некоторых задач теории дифференциальных и интегральных уравнений. Задача (1) как самостоятельная граничная задача теории аналитических функций при точно определенных условиях была впервые поставлена И. И. Приваловым [2] в общем — разрывном случае.

Легко видеть, что задача (1) как в непрерывном, так и, тем более, разрывном случае может иметь, вообще говоря, бесчисленное множество линейно независимых решений. Поэтому при решении задачи (1) приходится ограничивать класс допустимых аналитических функций. В настоящее время непрерывная и кусочно-непрерывная задачи хорошо изучены, когда аналитическая функция $\Phi(z)$ является кусочно-голоморфной [1]. В случае же разрывных задач И. И. Привалов [2] в качестве допустимых аналитических функций предложил рассмотреть функции, представимые интегралом типа Коши*; в этом предположении и поставлена в работе [2] задача (1) в случае замкнутой кривой C.

* Кусочно-голоморфность есть простейшее достаточное условие для представимости аналитической функции интегралом типа Коши.

Следует отметить, что впоследствии разработка теории сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши, потребовала решение задачи (1) именно в указанной И. И. Приваловым постановке.

Развивая способы, применяемые в непрерывном и кусочно-непрерывном случаях, в статьях ([3],[4]) мы дали решение разрывной задачи (1) в формулировке И. И. Привалова при некоторых дополнительных предположениях относительно функций $a(t)$, $b(t)$, $\Phi(z)$; в настоящей заметке мы даем более полное решение разрывной задачи.

3. В дальнейшем под C будем понимать конечную совокупность взаимно не пересекающихся простых разомкнутых дуг C_k, $k=1,\ldots,n$, касательные к которым составляют с определенным направлением на плоскости угол, удовлетворяющий как функция точки кривой условию Гельдера. Концы дуг C_k в каком-нибудь порядке будем обозначать через $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$.

Пусть $\Pi(t)$ — неотрицательная измеримая функция, определенная на C. Если измеримая функция $f(t)$ такова, что интеграл Лебега

$$\int_C \Pi(t)\,|f(t)|^p\,ds < +\infty,$$

то мы будем говорить, что $f(t)$ принадлежит классу $L^p(C;\Pi)$.

Предположим теперь, что

$$\Pi(t)=\Pi_1^{p-1}\Pi_2^{-1},\quad \Pi_1=\prod_{k=1}^{m}|t-c_k|^{\alpha_k},\quad \Pi_2=\prod_{k=m+1}^{2n}|t-c_k|^{\alpha_k},\quad 0\leqslant\alpha_k<1;$$

в этом случае имеют место следующие предложения:

I. Если $f(t)\in L^p(C;\Pi)$, $p>1$, и $t_0\in C$, то

$$\int_C\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}\quad\text{и}\quad \Pi_1^{-1}(t_0)\,\Pi_2(t_0)\int_C\frac{\Pi_1(t)\,\Pi_2^{-1}(t)\,f(t)\,dt}{t-t_0}\in L^p(C;\Pi).$$

II. Если $f(t)\in L^p(C;\Pi)$, $\varphi(t)\in L^q(C;\Pi_1^{-1}\Pi_2^{q-1})$, $p>1$, $q=p(p-1)^{-1}$, то почти всюду на C

$$\int_C\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}\int_C\frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1-t}=-\pi^2 f(t_0)\varphi(t_0)+\int_C\varphi(t_1)\,dt_1\int_C\frac{f(t)\,dt}{(t-t_0)(t_1-t)}.$$

Если $\varphi(t)\in L(C)$, а $P(z)$ — некоторый полином, то функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+P(z),\quad z\overline{\in}C,$$

мы будем называть интегралом типа Коши с линией разрыва C и с главной частью $P(z)$ на бесконечности.

Если угловые граничные значения функции $\Phi(z)$ на C принадлежат классу $L^p(C;\Pi)$, то скажем, что $\Phi(z)\in L^p(C;\Pi)$.

Применяя приведенные предложения, можно установить ряд свойств интеграла типа Коши с главной частью на бесконечности. Так например, если интегралы типа Коши $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ с главной частью на бесконечности принадлежат, соответственно, классам $L^p(C;\Pi_1^{p-1}\Pi_2^{-1})$ и $L^q(C;\Pi_1^{-1}\Pi_2^{q-1})$, $p>1$, $q=p(p-1)^{-1}$, то произведение $\Phi(z)\Psi(z)$ будет также интегралом типа Коши с некоторой главной частью на бесконечности.

4. Обозначим модуль непрерывности функции $\varphi(t)$ через $\omega(t;\varphi)$. Если функция $\omega(t;\varphi)\,t^{-1}$ интегрируема на сегменте $(0,\varepsilon)$, где ε — до-

статочно малое положительное число, то мы будем говорить ([5]), что $\varphi \in I_0(C)$.

Предположим теперь, что функция $a(t)$, содержащаяся в граничном условии (1), удовлетворяет условию $0 \neq a(t) \in I_0(C)$. Пусть неособенными концами* (см. ([1])) для этой функции будут $c_1, \ldots, c_m$ $(m \leqslant 2n)$. Если c_k — неособенный конец, то всегда можно подобрать такое целое число λ_k, что

$$-1 < \alpha_k = \lambda_k + \operatorname{Re}\left[(2\pi i)^{-1} \ln a(c_k)\right] < +1, \tag{2}$$

причем α_k можно произвольно считать положительным или отрицательным. Для определенности предположим $\alpha_k > 0$, $k = 1, \ldots, r$; $\alpha_k < 0$, $k = r+1, \ldots, m$ $(r \leqslant m)$.

Введем обозначение

$$l_p(c_1, \ldots, c_r) = L^p\left(C; \prod_1^r |t - c_k|^{-\alpha_k} \prod_{r+1}^m |t - c_k|^{-\alpha_k(p-1)} \prod_{m+1}^{2n} |t - c_k|^{\beta_k(p-1)}\right), \tag{3}$$

где β_k — произвольные числа, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant \beta_k < 1$.

Отметим, что класс $h(c_1, \ldots, c_r)$ (см. ([1]), стр. 246) представляет собой весьма узкий подкласс класса $l_p(c_1, \ldots, c_r)$, $p > 1$.

Рассмотрим теперь задачу (1) в следующих предположениях: $\Phi(z)$ является интегралом типа Коши с линией разрыва C, принадлежащим классу $l_p(c_1, \ldots, c_r)$, $p > 1$, $0 \neq a(t) \in I_0(C)$, а $b(t) \in l_p(c_1, \ldots, c_r)$.

Пользуясь результатами п. 3 и обобщая известный способ решения задачи (1) в кусочно-непрерывном случае, мы получаем, что если $\varkappa = -\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \geqslant 0$, то все решения разрывной задачи (1) в принятых нами предположениях даются формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_C \frac{b(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)} + X(z)\,P_{\varkappa-1}(z), \tag{4}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$, а

$$X(z) = \prod_{k=1}^{2n} (z - c_k)^{\lambda_k} \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln a(t)}{t - z}\,dt\right\}.$$

Если $\varkappa < 0$, то разрывная задача (1) имеет решение (притом единственное, определяемое формулой (4) при $P_{\varkappa-1} \equiv 0$) тогда и только тогда, когда

$$\int_C b(t)\,[X^+(t)]^{-1}\,dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1.$$

Рассмотрим теперь кусочно-непрерывную задачу (1) в следующей постановке: $0 \neq a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию Гельдера; $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на каждую точку контура C, кроме, быть может, концов, причем граничные значения $\Phi^+(t) \in l_p(0)$, $p > 1$, где $l_p(0)$ — самый общий класс типа (3), т. е.

$$l_p(0) = L^p\left(C; \prod_1^r |t - c_k|^{\alpha_k(p-1)} \prod_{r+1}^m |t - c_k|^{-\alpha_k(p-1)} \prod_{m+1}^{2n} |t - c_k|^{\beta_k(p-1)}\right).$$

---

* Т. е. концами, на которых $a(c_k)$ неположительны.

При помощи формулы (4) легко устанавливаем следующий результат: для того чтобы решение $\Phi(z)$ кусочно-непрерывной задачи (1) можно было представить интегралом типа Коши класса $l_p(0)$ с главной частью на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности всех концов контура C функция $\Phi(z)$ удовлетворяла условию вида

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1. \tag{5}$$

Этот результат дает ответ на вопрос, поставленный Н. И. Мусхелишвили: выяснить роль условия (5) при решении кусочно-непрерывной задачи (1).

Изложенные выше результаты дали нам возможность в ряде случаев существенно расширить класс допустимых функций в сингулярных интегральных уравнениях с ядром типа Коши.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
4 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946. [2] И. И. Привалов, Матем. сборн., 41, 4 (1934). [3] Б. В. Хведелидзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 8, 7 (1947). [4] Б. В. Хведелидзе, ДАН, 76, № 2 (1951). [5] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 8, 8 (1947).