Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 6

МАТЕМАТИКА

П. Л. УЛЬЯНОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ *A*-ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 III 1955)

Функцию $f(x)$ будем называть A-интегрируемой (ср. [2], гл. VI, [3,6]) на отрезке $[a, b]$, если:

а) $$mE\{|f(x)| \geqslant n\} = o\left(\frac{1}{n}\right); \tag{1}$$

б) существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x)]_n \, dx = I, \tag{2}$$

где $[f(x)]_n = f(x)$ при $|f(x)| \leqslant n$ и $[f(x)]_n = 0$ при $|f(x)| > n$. Число I называется, по определению, A-интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$:

$$A\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

А. Н. Колмогоров доказал [3], что функции, сопряженные к суммируемым, обладают свойством (1). A-интегрированию посвящена гл. IV работы Ю. С. Очана [4]. Вопросам применения A-интегрирования к тригонометрическим рядам с монотонно убывающими коэффициентами посвящены статьи автора [7,8].

Настоящая заметка посвящена применению A-интегрирования к изучению свойств сопряженных функций.

Определение. Тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{a=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

будем называть рядом Фурье (A) от функции $f(x)$, если

$$a_k = \frac{1}{\pi}(A)\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}(A)\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \ (k = 0,1,2,\ldots).$$

Риссом [5] было доказано равенство

$$(L)\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g}(x)\,dx = -(L)\int_0^{2\pi} \overline{f}(x)\,g(x)\,dx, \tag{3}$$

где $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ и $g(x) \in L^q(0, 2\pi)$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, $q > 1$.

При этом $\overline{f}(x)$ обозначает сопряженную функцию к $f(x)$, т. е.

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} {}^1\!/_2 t} dt.$$

Очевидно, что равенство (3) не справедливо при $p = 1$, так как функция $\overline{f}(x)$ может оказаться не интегрируемой по Лебегу. Но все-таки равенство (3) в некотором смысле верно и при $p = 1$. Именно, справедливо утверждение:

Теорема 1. *Если* $f(x) \in L(0, 2\pi)$ *и* $g(x)$ — *такая ограниченная функция, что* $\overline{g}(x)$ *также ограниченная функция, то*

$$(A) \int_0^{2\pi} \overline{f}(x)\, g(x)\, dx = -(L) \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx. \tag{4}$$

Если мы положим $g(x) = \cos kx$ или $g(x) = \sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то получим, что сопряженный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} -b_k \cos kx + a_k \sin kx$$

к ряду Фурье — Лебега

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \sim f(x)$$

является рядом Фурье (A) от функции $\overline{f}(x)$, т. е. получаем как следствие результат Титчмарша ([6]).

Заметим, что теорему 1 в некотором смысле усилить нельзя. Именно, если мы будем в теореме 1 предполагать лишь ограниченность функции $g(x)$, то, вообще говоря, равенство (4) теряет силу.

Пример. Пусть $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$, тогда $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ ([9], стр. 112), но $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k} = \overline{f}(x) \overline{\in} L(-\pi, \pi)$ и, более того, $\overline{f}(x) \overline{\in} D(-\pi, \pi)$, где D означает интегрирование в смысле Данжуа ([1]). Если положим $g(x) = 1$ при $x \in (0, \pi)$ и $g(x) = -1$ при $x \in [-\pi, 0]$, то, как легко убедиться:

$$(A) \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)\, g(x)\, dx = 2(L) \int_0^{\pi} \overline{f}(x)\, dx = \infty.$$

Указанный пример показывает также, что сопряженная функция к суммируемой функции может быть не интегрируемой по Данжуа и, следовательно, применение этого интеграла для изучения сопряженной функции нецелесообразно.

Известно ([9], стр. 147), что в случае $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ существует для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ предел

$$-\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} {}^1\!/_2 t} dt = \overline{f}(x). \tag{5}$$

Покажем, что справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Если периодическая функция* $f(x)$ *принадлежит классу* $L^p(0, 2\pi)$, *где* $p > 1$, *то для почти всех точек* $x \in [0, 2\pi]$ *имеет место равенство*

$$(A)\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\,dt = -\pi\overline{f}(x).$$

Именно это равенство имеет место во всех тех точках x_0, где одновременно функция $f(x)$ асимптотически непрерывна, существует конечный предел

$$-\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\,dt = \overline{f}(x_0) \tag{6}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} |f(x_0+t)-f(x_0-t)|^p\,dt = 0. \tag{7}$$

В самом деле, пусть P — множество точек на отрезке $[0, 2\pi]$, где одновременно существуют пределы (6), (7) и где функция $f(x)$ асимптотически непрерывна. Тогда при $x_0 \in P$

$$mE_t\left\{\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\right| \geqslant n\right\} = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Это следует из того, что множество

$$E_t\left\{\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\right| \geqslant n\right\} = E_t\left\{\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\right| \geqslant n,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{2}{n}\right\} +$$

$$+ E_t\left\{\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\right| \geqslant n,\ \frac{2}{n} < t \leqslant \frac{1}{n^{1/q}}\right\} +$$

$$+ E_t\left\{\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\right| \geqslant n,\ \frac{1}{n^{1/q}} < t \leqslant \pi\right\} = A_1 + A_2 + A_3,$$

где $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. В самом деле, так как в точке x_0 функция $f(x)$ асимптотически непрерывна, то $mA_1 = o\left(\frac{1}{n}\right)$. В силу же условия $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ имеем $mA_3 = o\left(\frac{1}{n}\right)$ и, на основании существования предела (7) получаем $mA_2 = o\left(\frac{1}{n}\right)$, т. е. равенство (8) справедливо.

Пусть, далее:

$$mE_t\left\{\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\right| \geqslant n\right\} = \frac{\varepsilon_n}{n}, \quad \text{где } \varepsilon_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Показав, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{\varepsilon_n^{1/q}/n}^{\pi} \frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\,dt - \int_0^{\pi}\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\right]_n dt\right\} = 0,$$

мы получим полное доказательство теоремы 2.

Заметим, что остается открытым вопрос о справедливости теоремы 2 при $p = 1$.

Рассмотрим следующую задачу: можно ли представить функцию $f(x)$ через функцию $\overline{f}(x)$ по формуле, аналогичной формуле (5)?

Титчмарш ([6]) показал, что для почти всех точек $x \in [0, 2\pi]$ справедливо равенство

$$f(x) - \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\pi}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\pi}\right)\{G(t) - G(x)\}\operatorname{cosec}^2\frac{t-x}{2}\,dt, \qquad (9)$$

где $^1/_2 a_0$ — среднее значение функции $f(x) \in L(0, 2\pi)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ и $G(u)$ — сумма ряда

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\cos ku + \frac{b_k}{k}\sin ku,$$

т. е. сумма формально проинтегрированного сопряженного ряда к ряду Фурье функции $f(x)$.

Используя равенство (9), можно показать, что справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Если $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ и $\overline{f}(x)$ — сопряженная к $f(x)$ функция, то для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ имеет место равенство*

$$f(x) - \frac{1}{2}a_0 = \operatorname{limas}_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi}(A)\left(\int_{-\pi+\varepsilon}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\pi+\varepsilon}\right)\overline{f}(t)\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(t-x)\,dt. \qquad (10)$$

Возникновение в формуле (10) асимптотического предела объясняется тем, что функция $\overline{f}(t)$, вообще говоря, не является A-интегрируемой на всех отрезках $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Denjoy, Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, Paris, 1941. [2] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., 1936. [3] А. Н. Колмогоров, Fund. Math., **7**, 23 (1925). [4] Ю. С. Очан, Матем. сборн., **28**, 293 (1951). [5] M. Riesz, Math. Zs., **27**, 218 (1927). [6] E. C. Titchmarsh, Proc. London Math. Soc., **29**, 49 (1929). [7] П. Л. Ульянов, ДАН, **90**, № 1, 33 (1953). [8] П. Л. Ульянов, Матем. сборн., **35**, 469 (1954). [9] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.