Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

О СУММИРОВАНИИ КРАТНЫХ РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 16 III 1955)

1. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(E_n)$ $(n > 1)$. Положим

$$E(\alpha) = E(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{E_n} f(x)\, e^{-i(\alpha, x)}\, dx,$$

где $(\alpha, x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$; $dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$. Далее положим

$$R_s(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int\limits_{|\alpha| \leqslant \mu} \left(1 - \frac{|\alpha|^2}{\mu^2}\right)^s E(\alpha)\, e^{i(x, x)}\, d\alpha,$$

где $s \geqslant 0$, $|\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2$, $d\alpha = d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$.

Известно ([1]), что если $s \geqslant \frac{n-1}{1} = k$, то при $\mu \to \infty$ поведение $R_s(x, \mu)$ зависит лишь от поведения $f(x)$ в окрестности точки x и при $s > \frac{n-1}{2}$

$$\lim_{\mu \to \infty} R_s(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} f(x) \tag{1}$$

в каждой точке непрерывности $f(x)$.

Далее, известно ([2], теорема 4.62), что если $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет непрерывные частные производные до порядка $2q$ включительно, то в этой точке для $s > k + 2q$

$$\lim_{\mu \to \infty} \Delta_x^q R_s(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \Delta_x^q f(x), \tag{2}$$

где

$$\Delta_x^q = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^q.$$

Если мы желаем в формуле (1) или (2) уменьшить число s, т. е. понизить порядок суммирования, то следует наложить ограничение на поведение преобразования Фурье $E(\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ (см. [2], теоремы 4.53 и 4.63), что, очевидно, уже связано не с локальными свойствами функции, а с интегральными.

В настоящей заметке мы рассматриваем случай $f(x) \in L_2(E_n)$. В этом случае можно получить, применяя разработанные нами методы для исследования разложений по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений ([3]), несколько более точные результаты, чем ранее известные. В частности, можно показать, что равенство (2) при $q > 0$ справедливо для $s = k + 2q$.

Теорема 1. *Пусть $n = 2k + 1$, $k \geqslant 1$. Пусть $f(x) \in L_2(E_n)$, непрерывна и имеет всюду непрерывные частные производные с интегри-*

руемым квадратом в E_n до порядка $\lambda > 0$ включительно. Тогда равномерно в каждой конечной области

$$\lim_{\mu\to\infty} R_{k-\lambda}(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(k-\lambda+1)} f(x).$$

В частности, при $\lambda = k$ имеет место сходимость.*

Замечание. В случае четного $n = 2k$ можно искусственно повысить число измерений на единицу. Мы получим: *если $f(x_1, \ldots, x_{2k})$ имеет непрерывные частные производные с интегрируемым квадратом до порядка $\lambda > 0$ включительно, то средние по Риссу порядка $(k-\lambda)$ сходятся к $f(x)$.* Вероятно, что в случае четного n $(k-\lambda)$ можно заменить на $(k-\lambda-1/2)$, однако нам не удалось это доказать.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in L_2(E_n)$ $(n \geqslant 1)$ и пусть в окрестности точки x_0 существуют непрерывные частные производные до порядка > 0 включительно. Тогда для $s = k + r$ в точке x_0 справедливо*

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\partial^r R_s(x, \mu)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}} = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}}$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = r). \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in L_2(E_n)$, $n = 2k+1$, $k \geqslant 1$, и пусть во всех точках E_n существуют непрерывные частные производные с интегрируемым квадратом E_n до порядка r_0 включительно. Далее, пусть в окрестности точки x_0 существуют непрерывные частные производные у функции $f(x)$ до порядка $r = r_0 + r_1$ включительно. Тогда в точке x_0 при $s = k + r_1$*

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\partial^r R_s(x, \mu)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}} = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}}$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = r). \tag{4}$$

Ввиду недостатка места мы изложим доказательство теоремы 1 в простейшем случае: $n = 3$ $(k = 1)$, $\lambda = 1$. В этом случае мы должны доказать сходимость.

Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{5}$$

$$u\Big|_{t=0} = f(x_1, x_2, x_3), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{6}$$

Если функция $f(x_1, x_2, x_3)$ достаточно гладкая, то решение задачи (5) — (6) имеет вид (см. [4], стр. 182)

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x, t), \tag{7}$$

где

$$v(x, t) = \frac{t}{4\pi} \iint_{\omega} f(x_1 + \alpha_1 t,\ x_2 + \alpha_2 t,\ x_3 + \alpha_3 t)\, d\omega; \tag{8}$$

здесь ω — поверхность единичной сферы $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$.

Далее,

$$u(x, t) = f(x) + \varphi(x, t), \tag{9}$$

причем для $t \to 0$

$$\varphi(x, t) = O(t). \tag{10}$$

* Случай $n = 1$ $(k = 0)$ является исключительным.

Как показано в работе ([3]) (гл. III), справедливо тождество

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu R^*(x,\mu)=\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t,a)\,u(x,t)\,dt, \tag{11}$$

где

$$R^*(x,\mu)=\int_0^\mu d\nu\left\{\int_{|\alpha|=\nu}E(\alpha)\,e^{i(\alpha,x)}\,\widetilde{d\alpha}\right\}. \tag{12}$$

Положим

$$\beta(x,\nu)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 u(x,t)\cos\nu t\,dt,\qquad \beta_1(x,\mu)=\int_0^\mu\beta(x,\nu)\,d\nu.$$

Из равенства Парсеваля следует

$$\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t,a)\,u(x,t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\beta_1(x,\mu). \tag{13}$$

Из (11) и (13) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\rho(x,\mu)=0\quad(0<\varepsilon\leqslant 1), \tag{14}$$

где

$$\rho(x,\mu)=R^*(x,\mu)-\beta_1(x,\mu).$$

Покажем, что при $\mu\to\infty$

$$\operatorname*{V}_{\mu}^{\mu+1}\{\rho(x,\mu)\}=o(1). \tag{15}$$

Для $\beta_1(x,\mu)$ равенство (15) проверяется непосредственно. Докажем это равенство для $R^*(x,\mu)$. Зафиксируем числа α_1, α_2, α_3. Пусть, например, α_1 имеет среди этих чисел наибольший модуль. Тогда

$$\nu=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^3}\leqslant|\alpha_1|\sqrt{3},$$

и, следовательно:

$$\frac{1}{|\alpha_1|}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{\nu}.$$

Интегрируя по частям, получим

$$|E(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|=\frac{1}{|\alpha_1|}\left|\int_{E_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x_1}e^{-i(\alpha,x)}\,dx\right|\leqslant\frac{C}{\nu}|H(\alpha)|.$$

Поэтому

$$\operatorname*{V}_{\mu}^{\mu+1}\{R^*(x,\mu)\}\leqslant\frac{C}{\mu}\left\{\int_\mu^{\mu+1}d\nu\int_{|\alpha|=\nu}|H(\alpha)|^2\,\widetilde{d\alpha}\right\}^{1/2}\left\{\int_\mu^{\mu+1}d\nu\int_{|\alpha|=\nu}\widetilde{d\alpha}\right\}^{1/2}=o(1).$$

Из (14) и (15) и теоремы 1.3.3 работы ([1]) следует

$$\lim_{\mu\to\infty}\rho(x,\mu)=0. \tag{16}$$

С другой стороны, в силу (9):

$$\beta_1(x, \mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 u(x, t)\frac{\sin \mu t}{t}\,dt =$$

$$= f(x)\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin \mu t}{t}\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(x, t)}{t}\sin \mu t\,dt. \qquad (17)$$

В силу (10), при $\mu \to \infty$

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x, t)}{t}\sin \mu t\,dt = o(1),$$

и, следовательно, из (17) следует

$$\lim_{\mu \to \infty} \beta_1(x, \mu) = f(x). \qquad (18)$$

Из (16) и (18) следует

$$\lim_{\mu \to \infty} R^*(x, \mu) = f(x), \qquad (19)$$

что и требовалось доказать. Равномерность равенства (19) легко получить из предыдущих оценок.

Замечание 1. Вместо непрерывности частных производных можно предполагать, что: а) функция $f(x_1, x_2, x_3)$ абсолютно непрерывна по каждой переменной для почти всех пар двух других переменных; б) $\partial f/\partial x_i \in L_2(E_3)$ $(i = 1, 2, 3)$; в) $\partial f/\partial x_i$ ограничены в окрестности рассматриваемой точки. При этих предположениях мы получим сходимость в данной точке. Аналогичное обобщение можно указать для $n > 3$.

Замечание 2. Аналогичные теоремы имеют место для кратных рядов Фурье. Доказательство можно получить при помощи теоремы равной суммируемости (см. [3], гл. III) или непосредственно.

Военная артиллерийская инженерная академия
им. Ф. Э. Дзержинского

Поступило
15 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bochner, Trans. Am. Math. Soc., 40, 175 (1936). [2] K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram, Typical Means, Oxford Univ. Press, 1952. [3] Б. М. Левитан, Матем. сборн., 35 (77): 2, 267 (1954). [4] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, М.—Л., 1945.