Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 6

МАТЕМАТИКА

О. В. ГУСЕВА

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 11 II 1955)

Первая краевая задача для одного эллиптического уравнения и для сильно эллиптических систем исследовалась рядом авторов ([1–10]). Эту задачу мы запишем в виде операторного уравнения

$$Bu = f. \tag{1}$$

Для одного уравнения второго порядка ([2]) и для сильно эллиптических систем уравнений порядка $2n$ ([7]) была доказана разрешимость задачи (1) в классе $W_2^{(n)}(D)$ при любой $f \in L_2(D)$ и установлена принадлежность решения u к W_2^{2n+l} $(l = 0, 1, \ldots)$ в любой внутренней подобласти при f из $W_2^l(D)$ ([4,5,10]).

Для одного уравнения второго порядка доказана разрешимость первой краевой задачи в классе $W_2^2(D)$ при любой f из $L_2(D)$ ([5]).

В настоящей работе мы исследуем уравнения высоких порядков эллиптического типа и сильно эллиптические системы и доказываем разрешимость различных краевых задач для сильно эллиптических систем в следующем смысле: если $f \in L_2(D)$, то $u \in W_2^{2n}(D)$, а если $f \in W_2^l(D)$, то $u \in W_2^{2n+l}(D)$. При этом мы не используем какого-либо аппарата для представления решений и не опираемся на перечисленные выше результаты, полученные другими авторами. При доказательстве разрешимости задач мы применяем прием, аналогичный тому, который дан О. А. Ладыженской в работе ([8]) и применен ею для параболических и гиперболических уравнений. Изложение будем вести, ради простоты, на примере первой краевой задачи для одного эллиптического уравнения. Схема доказательства следующая.

Пусть D — область евклидова пространства m измерений, ограниченная достаточно гладкой (см. ниже) поверхностью S. Множество всех функций $u(x) \equiv u(x_1, \ldots, x_m)$ из $W_2^l(D)$ $(l \geqslant n)$, удовлетворяющих на S условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_{x \in S} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{2}$$

где ν — нормаль к S, образует подпространство $\overset{0}{W}{}_2^l(D)$ пространства $W_2^l(D)$.

Сначала доказывается, что для произвольного эллиптического в D дифференциального выражения A порядка $2n$ с достаточно гладкими в $\bar{D}$ коэффициентами имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^{2n}(D)} \leqslant c_1 \|Au\|_{L_2(D)} + c_2 \|u\|_{L_2(D)} \quad (u \in \overset{0}{W}{}_2^{2n}(D)). \tag{3}$$

Зададим на $D(\tilde{A}) \equiv \overset{0}{W}{}_2^{2n}(D)$ оператор $\tilde{A}$ дифференциальным выражением A. Оператор $\tilde{A}$ предполагаем положительно-определенным, поэтому неравенство (3) равносильно следующему:

$$\| u \|_{W_{2n}^2(D)} \leqslant c_3 \| Au \|_{L_2(D)} \quad (u \in \overset{0}{W}{}_2^{2n}(D)). \tag{4}$$

Первую краевую задачу для уравнения

$$Au = f, \tag{5}$$

где $f(x) \in L_2(D)$, поставим как задачу о нахождении функции $u(x)$ из $\overset{0}{W}{}_2^{2n}(D)$, удовлетворяющей почти всюду в D уравнению (5).

Для доказательства однозначной разрешимости ее при любой $f(x) \in L_2(D)$ достаточно показать справедливость следующих двух утверждений:

1. *Область значений $R(\tilde{A})$ оператора $\tilde{A}$ замкнута*:

$$R(\tilde{A}) = \overline{R}(\tilde{A}).$$

2. *Ортогональное дополнение в $L_2(D)$ к $R(\tilde{A})$*

$$P \equiv L_2(D) \ominus \overline{R}(\tilde{A})$$

пусто.

Правильность утверждения 1 следует из неравенства (4).

Утверждение 2 доказывается на основании лемм:

Лемма 1. $P \subset W_2^{2n}(D)$.

Лемма 2. *Пересечение $P \cap W_2^{2n}(D)$ пусто.*

Получаемые таким путем результаты могут быть сформулированы ввиде следующих теорем.

Пусть граница S $2n + \max\{m, n\} + 1$ раз непрерывно дифференцируема и дифференциальное выражение

$$A = \sum_{k=0}^{[2n} \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = k} A_k^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(x) \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \tag{6}$$

с коэффициентами $A_k^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(x) \in C^{\gamma(k,m)}(\overline{D})$, где

$$\gamma(k,m) = \begin{cases} k + m & k < 2n, \\ 2n + \max\{m,n\}, & k = 2n, \end{cases}$$

эллиптично в $\overline{D}$.

Теорема 1. *Для элементов пространства $\overset{0}{W}{}_2^{2n}(D)$ верно неравенство* (3).

Теорема 2. *Если граница S области D $2n + \max\{m, n\} + 1$ раз непрерывно дифференцируема, коэффициенты эллиптического в $\overline{D}$ дифференциального выражения* (6) $A_k^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(x) \in C^{\gamma(k,m)}(\overline{D})$ *и если для всех $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^{2n}(D)$*

$$\int_D u \cdot Au \, d\Omega \geqslant c_4 \| u \|^2_{L_2(D)} \quad (c_4 > 0),$$

то краевая задача (5), (2) *однозначно разрешима в* $W_2^{2n}(D)$ *при любой* $f(x) \in L_2(D)$ *и решение допускает оценку*

$$\| u \|_{W_2^{2n}(D)} \leqslant c_3 \| f \|_{L_2(D)} .$$

Теорема 3. *Если граница* S $2n + \max\{m, n\} + 1 + l$ *раз непрерывно дифференцируема,* $A_k^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x) \in C^{\gamma(k,m)+l}(\overline{D})$, *то при* $f(x) \in W_2^l(D)$ *решение* $u(x) \in W_2^{2n+l}(D)$ *и допускает оценку*

$$\| u \|_{W_2^{2n+l}(D)} \leqslant c_5 \| f \|_{W_2^l(D)}.$$

Сформулируем результаты, относящиеся к сильно эллиптическим системам. Введем в рассмотрение пространство $\mathbf{W}_p^l(D)$ $(\mathbf{W}_p^0(D) \equiv \mathbf{L}_p(D))$ $(l = 0, 1, \dots; 1 < p < \infty)$ вектор-функций $\mathbf{u}(x)(u_1(x), \dots, u_N(x))$ с нормой

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{W}_p^l(D)} \equiv \left[\sum_{i=1}^{N} \| u_i \|_{W_p^l(D)}^p \right]^{1/p} .$$

Теорема 2′. *Если граница* S $2n + \max\{m, n\} + 1$ *раз непрерывно дифференцируема, если для матрицы* $\{A\}$ (*см.* (7))

$$\{A\} = \sum_{\substack{k=0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_m = k}}^{2n} \{A_k^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x)\} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

сильно эллиптической в $\overline{D}$ *системы все элементы матриц* $\{A_k^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x)\}$ *принадлежат* $C^{\gamma(k,m)}(\overline{D})$ *и если для всех* $\mathbf{u}(x) \in \mathbf{W}_2^{2n}$ *удовлетворяющих граничным условиям*

$$\left. \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial \nu^k} \right|_{x \in S} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \tag{7}$$

выполняется неравенство

$$\int_D (\mathbf{u}, \{A\}\mathbf{u})\, d\Omega \geqslant c_6 \| \mathbf{u} \|_{\mathbf{L}_2(D)}^2 \quad (c_6 > 0),$$

то уравнение

$$\{A\}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{8}$$

при условиях (7) *однозначно разрешимо в классе* $\mathbf{W}_2^{2n}(D)$ *для любой* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(D)$ *и решение допускает оценку*

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{W}_2^{2n}(D)} \leqslant c_7 \| \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}_2(D)} .$$

Теорема 3′. *Если граница* S *и коэффициенты матрицы* $\{A\}$ *имеют в* $\overline{D}$ *все непрерывные частные производные по* $x_1, x_2, \dots, x_m$ *до порядка на* l $(l = 1, 2, \dots)$ *большего, чем в условиях теоремы* 2′, *то при* $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_2^l(D)$ *решение* $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^{2n+l}(D)$ *допускает оценку*

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{W}_2^{2n+l}(D)} \leqslant c_8 \| \mathbf{f} \|_{\mathbf{W}_2^l(D)}.$$

Подобные же результаты мы получили и для ряда других однородных краевых задач, в которых задаются на границе S линейные комбинации из производных вектора $\mathbf{u}(x)$, в частности, для второй краевой задачи.

Выражаю глубокую признательность О. А. Ладыженской и С. Г. Михлину за ценные указания.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
26 I 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Giraud, Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup., **46**, 131 (1929). [2] K. Friedrichs, Math. Ann., **109**, H. 4—5 (1934). [3] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. [4] С. Г. Михлин, ДАН, **78**, № 3 (1951). [5] О. А. Ладыженская, ДАН, **79**, № 5 (1951). [6] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953. [7] М. И. Вишик, Матем. сборн., **29** (71), в. 3 (1951). [8] О. А. Ладыженская, ДАН, **97**, № 3 (1954). [9] F. E. Browder, Proc. N. A. S. of the USA, **39**, No. 3 (1953). [10] K. Friedrichs, Comm. on Pure and Appl. Math., **6**, No. 3 (1953).