Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 6

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД и Г. Е. ШИЛОВ

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ В ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

До последнего времени применение теории операторов к дифференциальным уравнениям осложнялось тем обстоятельством, что дифференциальные операторы при реализации их в распространенных пространствах, таких, как гильбертово, L_p и т. п., оказывались неограниченными операторами. Повидимому, если подобрать пространства, в которых нужные дифференциальные операторы и функции от них были бы ограниченными операторами, то оказалось бы возможным проще и более по существу применять методы теории операторов для исследования дифференциальных уравнений. Для этой цели вместо нормированных (банаховых) пространств более пригодны линейные топологические пространства, систематическое введение которых в практику функционального анализа несомненно расширит круг его приложений.

В настоящей заметке мы проиллюстрируем приведенные соображения на вопросе о единственности задачи Коши. В статье (1) авторы указали метод для доказательства теорем единственности задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими только от t, основанный на теории преобразований Фурье быстро растущих функций. В настоящей заметке мы получаем эти теоремы прямым методом, минуя преобразования Фурье и связанные с ними теоремы двойственности.

1. Идея предлагаемого метода состоит в следующем. Рассмотрим систему уравнений (в векторной записи)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = U(x). \tag{2}$$

Решение задачи Коши (1)—(2) формально можно записать в виде

$$u(x,t) = e^{tP(D)}U(x) \quad \left(D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{3}$$

Необходимо придать смысл выражению (3). При этом для обеспечения корректности решения необходимо, чтобы оператор $e^{tP(D)}$ был непрерывным оператором в смысле, отвечающем понятию предельного перехода в области функций $U(x)$. В соответствии с нашей общей установкой мы должны подобрать такое линейное топологическое пространство, в котором оператор дифференцирования и достаточно широкий класс функций от него, включающий нужную нам функцию $e^{tP(D)}$, были бы непрерывными операторами. Как уже говорилось,

обычные гильбертовы и банаховы пространства для этой цели не пригодны, поскольку в них не ограничен сам оператор дифференцирования. В линейных топологических пространствах D и S, введенных Л. Шварцем ([2]), оператор дифференцирования ограничен (и, следовательно, непрерывен), но многие важные функции от него (например, $e^{a\frac{\partial}{\partial x}}$ с комплексным a) не ограничены. Мы используем линейные топологические пространства Z_q^q, введенные авторами в ([1]), и соответствующие сопряженные пространства, состоящие из линейных непрерывных функционалов на Z_q^q. Для наших целей будет удобнее использовать другое определение пространств Z_q^q, полученное одним из авторов в заметке ([3]), которое мы здесь и приведем. Введем пространство $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, $\alpha, \beta, A, B > 0$, состоящее из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, для которых при любых $\varepsilon, \delta > 0$ конечны все выражения

$$N_{\varepsilon\delta}(\varphi) = \sup_{k,p,x} \frac{|x^k \varphi^{(p)}(x)|}{(A+\delta)^k k^{k\alpha} (B+\varepsilon)^p p^{p\beta}}. \tag{4}$$

Эти выражения, рассматриваемые как нормы, позволяют ввести в $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ топологию, так что оно становится линейным топологическим пространством. Пространство $S_\alpha^\beta = \sum_{A, B} S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ (которое также можно считать топологическим) нетривиально (т. е. содержит отличные от нуля функции) тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta \geqslant 1$. В частности, $S_\alpha^{1-\alpha}$ совпадают с Z_q^q из ([1]) при $q = 1/\alpha$.

2. Лемма. *Если* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ — *целая аналитическая функция порядка роста не выше* $1/\beta$ *и типа ниже* $\beta / B^{1/\beta} e^2$, *то в пространстве* $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ *определен и ограничен оператор* $f(D) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n$, *причем значения этого оператора лежат в пространстве* $S_{\alpha, A}^{\beta, Be^\beta}$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in S_{\alpha, A}^{\beta, B}$; обозначим

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n \varphi(x)$$

и оценим величины $|x^k \psi^{(p)}(x)|$. Мы имеем:

$$|x^k \psi^{(p)}(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x^k \varphi^{(n+p)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| N_{\varepsilon\delta}(\varphi) (A+\delta)^k k^{k\alpha} (B+\varepsilon)^{n+p} (n+p)^{(n+p)\beta} =$$

$$= N_{\varepsilon\delta}(\varphi) (A+\delta)^k k^{k\alpha} (B+\varepsilon)^p p^{p\beta} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(1 + \frac{n}{p}\right)^{p\beta} (n+p)^{n\beta} (B+\varepsilon)^n \leqslant$$

$$\leqslant N_{\varepsilon\delta}(\varphi) (A+\delta)^k k^{k\alpha} (B+\varepsilon)^p p^{p\beta} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{n\beta} n^{n\beta} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{n\beta} (B+\varepsilon)^n \leqslant$$

$$\leqslant N_{\varepsilon\delta}(\varphi) (A+\delta)^k k^{k\alpha} (B+\varepsilon)^p p^{p\beta} e^{p\beta} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{n\beta} n^{n\beta} (B+\varepsilon)^n.$$

Но ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{n\beta} n^{n\beta} (B+\varepsilon)^n$ сходится при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в силу предположения о свойствах функции $f(s)$. Поэтому справедлива оценка

$$|x^k \psi^{(p)}(x)| \leqslant N_{\varepsilon\delta}(\varphi)\, C_\varepsilon (A+\delta)^k k^{k\alpha} (Be^\beta + \varepsilon')\, p^{p\beta} \quad (\varepsilon' = \varepsilon e^\beta),$$

которая показывает, что $\psi(x) \in S_{\alpha, A}^{\beta, Be^\beta}$. Легко проверить, что ограниченные множества пространства $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ — множества, на которых ограничены все нормы (4), — переводятся в ограниченные множества пространства $S_{\alpha, A}^{\beta, Be^\beta}$. Таким образом, $f(D)$ — ограниченный и, следовательно, непрерывный оператор.

3. Можно определить пространство $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ для случая N независимых переменных. В этом случае оно состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, для которых при любых $\varepsilon, \delta > 0$ конечны все выражения

$$N_{\varepsilon\delta}(\varphi) = \sup_{k, p, x} \frac{\left| x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_N^{k_N} \dfrac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_N} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_N^{p_N}} \right|}{(A+\delta)^{k_1+k_2+\ldots+k_N} (B+\varepsilon)^{p_1+p_2+\ldots+p_N} k_1^{k_1\alpha} \ldots k_N^{k_N\alpha} p_1^{p_1\beta} \ldots p_N^{p_N\beta}}. \quad (5)$$

Указанные выше свойства пространств $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ для функций одного переменного остаются справедливыми и в общем случае, с соответствующими изменениями в формулировках; в частности, $S_\alpha^\beta = \sum_{A, B} S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ нетривиально тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta \geqslant 1$. Остается справедливой и лемма п. 2 с заменой функции $f(s)$ на целую функцию N комплексных переменных $f(s_1, s_2, \ldots, s_N)$.

4. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P(D, t)\, u(x, t), \quad (6)$$

где $P(D, t)$ — матрица (m строк, m столбцов), элементами которой являются линейные дифференциальные операторы порядка $\leqslant q$ с коэффициентами, непрерывно зависящими от t. К системе (6) присоединено начальное условие

$$u(x, 0) = U(x). \quad (7)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(s, t)\, v(s, t), \quad (8)$$

полученная из (6) заменой оператора $i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ на параметр s_j, при начальном условии $v(s, t_0) = e^{(k)}$ (вектор, имеющий k-ю координату 1 и остальные 0) имеет решение $Q^{(k)}(s, t_0, t)$, координаты которого $Q_{jk}(s, t_0, t)$ — целые аналитические функции от s. Система решений $Q_{jk}(s, t_0, t)$ $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$ заполняет матрицу $Q(s, t_0, t)$ — фундаментальную матрицу системы (8). Максимальный порядок роста функций $Q_{jk}(s, t_0, t)$ называется приведенным порядком системы (6) и обозначается через q_0. Можно показать, что $q_0 \leqslant q$ [1]. В силу леммы п. 2 (с обобщением на N переменных, указанным в п. 3), операторы $Q_{jk}(D, t_0, t)$ определены в любом пространстве S_α^β, где $\beta = \dfrac{1}{q_0}$;

чтобы это пространство было нетривиальным, необходимо считать $\alpha \geqslant 1 - \beta = 1 - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{q_0'}$. Сопряженные операторы $Q_{jk}^*(D, t_0, t)$ определены в соответствующем сопряженном пространстве $S_\alpha'^\beta$. Из функционального уравнения $Q(s, t_1, t_2) \cdot Q(s, t_2, t_3) = Q(s, t_1, t_3)$ легко вывести, что матрица $Q^*(s, t, t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dQ^*(s, t, t_0)}{dt} = -P^*(s, t) Q^*(s, t, t_0). \tag{9}$$

Теорема 1. *Если начальная функция* (7) *определяет функционал на указанном пространстве* S_α^β, *то функционал*

$$u(x, t) = Q(D, 0, t) U(x) \tag{10}$$

есть решение задачи Коши (6)—(7).

Теорема 2. *Найденное решение* (10) *—единственное в классе функционалов над* S_α^β.

Доказательство теоремы 1 приводится путем прямой проверки.

Приведем коротко доказательство теоремы 2. Пусть $v(x, t)$ — решение системы (6) с нулевым начальным условием $v(x, 0) \equiv 0$. Фиксируя $t_0 > 0$ и основную функцию $\varphi(x)$, применим к основной функции $Q^*(D, t, t_0)\varphi(x)$ функционал $v(x, t)$. Дифференцируя результат по t, находим

$$\frac{d}{dt}(v, Q^*\varphi) = \left(\frac{dv}{dt}, Q^*\varphi\right) + \left(v, \frac{dQ^*\varphi}{dt}\right) = (Pv, Q^*\varphi) - (v, P^*Q^*\varphi) =$$

$$= (v, P^*Q^*\varphi) - (v, P^*Q^*\varphi) = 0.$$

Отсюда $(v(x, t), Q^*(D, t, t_0)\varphi) = \text{const}$; поскольку $(v(x, 0), Q^*\varphi) = 0$, эта постоянная равна нулю. Поэтому при $t = t_0$

$$(v(x, t_0)), Q^*(D, t_0, t_0)\varphi) = (v(x, t_0), \varphi(x)) = 0.$$

Поскольку $\varphi(x)$ — любой элемент пространства S_α^β, $v(x, t_0)$ есть нулевой функционал, чем теорема и доказана.

Так как в пространстве S_α^β основные функции имеют экспоненциальный порядок убывания на оси не ниже $1/\alpha$ ([3]), то мы получаем, в частности, теорему единственности решения задачи Коши (6)—(7) в классе функций, имеющих вместе со своими производными по t экспоненциальный порядок роста меньше $1/\alpha \leqslant q_0'$ ([1]).

5. Использованный здесь метод доказательства теорем единственности решения задачи Коши приводит вплотную к прямому построению теории типа операционного исчисления, не опирающемуся на преобразования Фурье или Лапласа*.

В пространстве $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ любой оператор вида $P(D, x)$ является ограниченным оператором. Важной и интересной задачей представляется выяснение структуры замыкания кольца операторов $P(D, x)$.

Собственно, замыкание одних лишь $P(D)$ уже дало приведенные выше теоремы единственности.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 III 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 8, в. 6 (58), 3 (1953). [2] L. Schwartz, Théorie des distributions, 1, 2, Paris, 1950, 1951. [3] Г. Е. Шилов, ДАН, 102, № 5 (1955). [4] J. G. Mikusinsky, Studia Math., Warszawa, 11, 41 (1949).

* Прямое построение операционного исчисления было произведено в интересной работе Микусинского ([4]); однако его схема, повидимому, не содержит подходов к теоремам единственности задачи Коши в естественном классе функций и встречает серьезные затруднения для функций более чем от двух независимых переменных.