Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 6

МАТЕМАТИКА

М. ГАГУА

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 8 III 1955)

В настоящей заметке, исходя из результатов И. Н. Векуа (1) и используя схему, указанную в (2), мы рассматриваем вопрос приближенного решения линейных граничных задач, связанных с некоторыми дифференциальными уравнениями эллиптического типа.

Пусть T — некоторая конечная односвязная область, содержащая начало координат $z=0$ и ограниченная гладкой в смысле Ляпунова кривой Г. Пусть

$$Ku = \sum_{i,k=0,1,2,\ldots,m}^{i+k\leqslant m} \left[a^{ik}(t)\, u_{ik}^{+}(t) + \int_{\Gamma} \frac{b^{ik}(t,t_1)}{|t-t_1|^{\beta}}\, u_{ik}^{+}(t_1)\,|dt_1| \right] \quad (t\in\Gamma) \qquad (1)$$

где t, t_1 — аффиксы точек Г; $a^{ik}(t)$, $b^{ik}(t,t_1)$ — заданные на Г функции, непрерывные на нем в смысле Гельдера; β $(0\leqslant\beta<1)$ — произвольно фиксированное число; $u_{ik}=u_{ik}(x,y)=\partial^{i+k}u(x,y)/\partial x^i\partial y^k$ $(x+iy\in T$; $i+k\leqslant m$; $i,k=0,1,\ldots$; $u_{00}=u)$; $u_{ik}^{+}=u_{ik}^{+}(t)=\lim\limits_{T\ni x+iy\to t} u_{ik}(t\in\Gamma)$, а $u=u(x,y)$ — произвольная функция, для которой существуют все u_{ik}^{+}, непрерывные на Г в смысле Гельдера.

Рассмотрим задачу отыскания регулярного в T решения уравнения

$$\Delta u + a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + c(x,y)\,u = 0 \qquad (2)$$

с граничным условием

$$Ku = f(t), \qquad (3)$$

где Δ — оператор Лапласа; $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $c(x,y)$ — целые функции, действительные для действительных значений аргументов x, y; $f(t)$ — заданная функция, непрерывная в смысле Гельдера относительно t $(t\in\Gamma)$. Задача (2), (3) поставлена и исследована в (1). В частности, даны необходимые и достаточные условия ее однозначной разрешимости в классе функций, непрерывных в смысле Гельдера. В дальнейшем эти условия будем считать выполненными. Известно также (1), что общее решение в области T для уравнения (2) дается формулой

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\left[G(z,0,z,\bar{z})\,\Phi(z) - \int_0^z \Phi(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,G(t,0,z,\bar{z})\,dt \right], \qquad (4)$$

где $z=x+iy\in T$; $\bar{z}=x-iy$; $G(t,\tau,z,\zeta)$ — функция Римана, являющаяся для нашего случая целой функцией своих комплексных аргументов; $\Phi(z)$ — произвольная в области T аналитическая функция, которая при нормировке $\Phi(0)=\overline{\Phi(0)}$ однозначно определяется при помощи соответствующего решения u: $\Phi(z)=u(z/2,\ z/2i)$.

Пусть u_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — система частных решений уравнения (2) *:

$$u_0 = G(0, 0, z, \bar{z}),$$

$$u_{2k-1} = \operatorname{Re}\left[G(z, 0, z, \bar{z})\, z^k - \int_0^z t^k \frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, \bar{z})\, dt \right], \tag{5}$$

$$u_{2k} = \operatorname{Im}\left[G(z, 0, z, \bar{z})\, z^k - \int_0^z t^k \frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, \bar{z})\, dt \right]$$

$$(k = 1, 2, \ldots;\ z = x + iy;\ \bar{z} = x - iy).$$

Пусть X — множество регулярных в области T решений уравнения (2), для которых все u_{ik}^{+} $(i + k \leqslant m;\ \ i, k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ непрерывны на Γ в смысле Гельдера с некоторым показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Определим норму для $u \in X$ как $\| u \| = \sup\limits_{i+k \leqslant m} \{ \max\limits_{x+iy \in T} | u_{ik} | \}$ $(i,\ k = 0, 1, 2, \ldots, m)$. Пусть, далее, $Y = \{Ku\}$ $(u \in X)$ и нормируем это множество по норме пространства C, т. е. по норме пространства непрерывных на Γ функций. Рассматривая K как отображение пространства X в Y, имеем $\| K \| \leqslant \max\limits_{t \in \Gamma} \left\{ \sum\limits_{i,k=0,1,\ldots,m}^{i+k \leqslant m} \left[| a^{ik}(t) | + \int_\Gamma | b^{ik}(t, t_1) |\, | dt_1 | \right] \right\}$.

Обозначим через X_n множество элементов

$$u = \sum_{i=0}^{2n} a_i u_i \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

через Y_n множество

$$y = \sum_{i=0}^{2n} c_i K u_i \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

где a_i, c_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$ — произвольные действительные постоянные; u_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — частные решения (5). Наконец, предположим, что

$$K_n u = Ku \quad (u \in X_n,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Теперь, следуя ([2]), n-м $(n = 1, 2, \ldots)$ приближенным решением граничной задачи (2), (3) будем называть решение уравнения $K_n u = f_n$ $(n = 1, 2, \ldots;\ u \in X_n)$, которое на основании (6) может быть переписано в виде

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i K u_i = f_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где f_n — наилучшее приближение n-го порядка (см. ([2])) заданной граничной функции $f(t)$ в классе Y_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Решения уравнений (9) обозначим через $\bar{u}_n$: $\bar{u}_n = \sum\limits_{i=0}^{2n} a_i u_i$.

Прежде чем непосредственно перейти к формулировке теоремы, касающейся сходимости приближенных решений $\bar{u}_n$ к точному $u = u(x, y)$, приведем несколько вспомогательных предложений.

---

* Выписанные функции для уравнения $\Delta u = 0$ превращаются в гармонические полиномы, а в некоторых других частных случаях явно выражаются через специальные функции ([1]). Рассмотрены также ([1, 3–5]) вопросы, связанные с равномерной аппроксимацией решений (2) при помощи линейных комбинаций (5).

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество аналитических в области T функций, которые непрерывны на $T+\Gamma$ вместе со своими производными до некоторого порядка p ($p=0, 1, \ldots$) включительно.

Определим в $\mathfrak{M}$ норму, следующими двумя способами:

$$\| \Phi \|_c = \max_{z \in T} | \Phi(z) | \quad (\Phi \in \mathfrak{M}); \quad \| \Phi \|_{c_p} = \sup_{0 \leqslant i \leqslant p} \{ \max_{z \in T} | \Phi^{(i)}(z) | \} \tag{10}$$

и введем обозначения $E_n^c(\Phi) = \inf\limits_{P_n \in \mathfrak{M}_n} \| \Phi - P_n \|_c$, $E_n^{c_p}(\Phi) = \inf\limits_{P_n \in \mathfrak{M}_n} \| \Phi - P_n \|_{c_p}$,

где $\mathfrak{M}_n$ — множество полиномов степени $\leqslant n$: $P_n = P_n(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i z^i$ ($n=1, 2, \ldots$), где d_i ($i=0, 1, 2, \ldots$) — произвольные комплексные постоянные. В дальнейшем относительно области T предположим, что каждая ее точка z соединяется с началом координат $z=0$ кривой, длина которой не превосходит единицы. В таком случае справедливо следующее, фактически известное ([7-9]), равенство:

$$E_n^{c_p}(\Phi) = E_{n-p}^c(\Phi^{(p)}). \tag{11}$$

При этом многочлен наилучшего приближения n-го порядка по норме второй формулы (10) для $\Phi(z) \in \mathfrak{M}$ дается формулой

$$R_n(z) = \int_0^z dz \int_0^z dz \ldots \int_0^z R_{n-p}(z)\, dz + \sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi^{(p-i)}(0)}{(p-i)!} z^{p-i}, \tag{12}$$

где $R_{n-p}(z)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения $(n-p)$-го порядка для функции $\Phi^{(p)}(z)$.

На основании равенства (11) легко устанавливается полнота системы (5) в пространстве X. На самом деле, если $u \in X$ и для нее существуют все u_{ik}^{+} до некоторого порядка p ($p \geqslant m$) включительно, непрерывные на Γ в смысле Гельдера с показателем α ($0 < \alpha \leqslant 1$), то, как известно ([1]), соответствующая аналитическая функция $\Phi(z)$ имеет производную p-го порядка по z, непрерывную на $T+\Gamma$ в смысле Гельдера с тем же показателем α. Следовательно, вследствие (11) и классической теоремы о приближении аналитических функций многочленами, существует многочлен вида (12) с условием: $\| \Phi - R_n \|_{c_m} = O\{(n-m)^{-p+m-\alpha}\}$ ($n=m, m+1, \ldots$). Отсюда же по формуле (4) легко следует равенство $E_n(u) = \inf\limits_{u_n^* \in X_n} \| u - u_n^* \| = O\{(n-m)^{-p+m-\alpha}\}$ ($u \in X$, $p \geqslant m$), ч. и т. д.

Теперь очевидно, что последовательности X_n, Y_n, K_n ($n=1, 2, \ldots$), определенные, соответственно, равенствами (6), (7) и (8), относительно X, Y, K удовлетворяют всем условиям теоремы 1 работы ([2]). Легко заметить также, что приближенные уравнения (9) эквивалентны системам линейных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i \int_{\Gamma} \psi_j K u_i \, |dt| = \int_{\Gamma} f_n \psi_j \, |dt|, \quad j=0, 1, 2, \ldots, 2n, \tag{13}$$

где ψ_j ($j=0, 1, 2, \ldots$) — произвольная полная в Y ортонормированная по метрике L_2 система функций с условием, что детерминант системы (13) отличен от нуля для каждого n ($n=1, 2, \ldots$)*.

* В частности, можем предполагать, что $\psi_j = K_j$ ($t=0, 1, \ldots$).

Уравнения (9) эквивалентны также и системам:

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i K u_i(t_j) = f_n(t_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 2n, \tag{14}$$

где $t_j \in \Gamma$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$ — произвольно фиксированные точки, причем так, чтобы детерминанты, соответствующие (14), были отличны от нуля*.

Таким образом, упомянутую выше теорему 1 (см. [2]) для рассматриваемого случая можно сформулировать следующим образом:

Теорема. *Если* $u \in X$ *является решением граничной задачи* (3) *и для нее существуют все* u_{ik}^{+} *до порядка* p $(p \geqslant m)$ *включительно, непрерывные на* Γ *в смысле Гельдера с показателем* α $(0 < \alpha < 1)$, *то приближенные решения* $\bar{u}_n = \sum_{i=0}^{2n} a_i u_i$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где* a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$ *однозначно определяются либо из систем* (13), *либо из* (14), *и удовлетворяют равенству* $\| u - \bar{u}_n \| = O\{(n-m)^{-p+m-\alpha}\}$, $n = m+1, m+2, \ldots$

Если учесть, что при численном решении систем (13) заданные величины берутся в округленном виде, то, вообще говоря, практически их можно заменить системами:

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i \int_{\Gamma} \psi_j K u_i \, |dt| = \int_{\Gamma} f \psi_j \, |dt|, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 2n, \tag{15}$$

которые совпадают с системами, получаемыми при приближенном решении задачи (2) — (3) методом Галеркина. Следовательно, на основании теоремы 2 заметки [2] может быть получена оценка погрешности и при пользовании системами (15).

Сформулированное предложение можно использовать для приближенного решения известной граничной задачи теории функций — задачи Римана (см. [8]). На самом деле, эта задача как известно, эквивалентна задаче Пуанкаре для уравнения $\Delta u = 0$, а задача Пуанкаре является частным случаем рассмотренной выше.

Наконец, используя соответствующие предложения И. Н. Векуа [1] и схему, данную в [2] для приближенного решения линейных уравнений в векторных пространствах, можно совершенно аналогично рассмотреть как системы уравнений вида (2), так и некоторые дифференциальные уравнения высших порядков эллиптического типа.

Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
21 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948. [2] М. Гагуа, ДАН, **102**, № 4 (1955). [3] М. Гагуа, Сообщ. АН Груз.ССР, **13**, № 6 (1952). [4] М. Гагуа, Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, № 2 (1954). [5] М. Гагуа, ДАН, **86**, №№ 1 и 2 (1952). [6] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М.—Л., 1948. [7] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., 1950. [8] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946. [9] В. Л. Гончаров, Теория интегрирования и приближения функций, М., 1954.

---

* Существование такой системы точек следует из линейной независимости Ku_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ [7], причем первые $2n$ точек могут быть взяты произвольно.