Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 6

ФИЗИКА

А. АХИЕЗЕР, В. АЛЕКСИН и Д. ВОЛКОВ

О НЕКОТОРЫХ ЭФФЕКТАХ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ВАКУУМОМ СКАЛЯРНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 9 V 1955)

1. Как известно, взаимодействие электромагнитного поля с электронно-позитронным вакуумом приводит к изменению закона Кулона, а также к ряду нелинейных эффектов (рассеяние света светом, когерентное рассеяние γ-лучей ядрами и т. д.). Целью настоящей статьи является рассмотрение этих же эффектов в электродинамике частицы со спином нуль.

При исследовании процессов взаимодействия скалярных заряженных частиц с электромагнитным полем удобно исходить из уравнений 1-го порядка, содержащих 5-мерные матрицы β_ν, Даффина-Кеммера, так как это дает возможность пользоваться техникой обычной квантовой электродинамики; в частности, вершинам графиков следует сопоставлять матрицы β_ν, а линиям, соответствующим виртуальным скалярным частицам, оператор

$$T(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}(i\hat{p} + m)^{-1} = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{i\hat{p}(i\hat{p} - m) + m^2 + p^2}{m(p^2 + m^2)},$$

где $\hat{p} = \beta_\nu p_\nu$; p_ν — четырехмерный импульс частицы и m — ее масса.

Так как частицы со спином 0 и $^1/_2$ подчиняются различным статистикам, то матричные элементы графиков, содержащих нечетное число замкнутых петель (построенных из линий, соответствующих частицам), отличаются для этих двух видов частиц знаком.

Встречающиеся при вычислениях шпуры произведений матриц определяются формулой

$$\text{spur}\,\beta_\nu\beta_\mu\beta_\rho\beta_\sigma\ldots\beta_\lambda\beta_\tau\beta_\varkappa =$$

$$= \begin{cases} \delta_{\nu\mu}\delta_{\rho\sigma}\ldots\delta_{\tau\varkappa} + \delta_{\varkappa\nu}\delta_{\mu\rho}\ldots\delta_{\lambda\tau}, & \text{если число матриц четное;} \\ 0, & \text{если число матриц нечетное.} \end{cases}$$

2. Рассмотрим прежде всего рассеяние света светом. Матричный элемент, соответствующий этому процессу, равен

$$S_{if}^{(4)} = \frac{e^4}{2V\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}\{T(1,2,3,4) + T(1,3,4,2) + T(1,4,2,3)\} \times$$

$$\times\,\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \equiv \frac{e^4\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)}{2V\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}M^{(4)},$$

где

$$T(1,2,3,4) = \int \text{Spur}\,\{\hat{e}_1(i\hat{p} + m)^{-1}\hat{e}_2[i(\hat{p} - \hat{k}_2) + m]^{-1} \times$$

$$\times\hat{e}_3[i(\hat{p} - \hat{k}_2 - \hat{k}_3) + m]^{-1}\hat{e}_4[i(\hat{p} + \hat{k}_1) + m]^{-1}\}d^4p$$

и k_i, ω_i, e_i — импульсы, частоты и поляризации фотонов.

Матричный элемент $S_{if}^{(4)}$ должен быть регуляризован, так как он, так же как и в обычной электродинамике, содержит конечное градиентно неинвариантное выражение. Для регуляризации из $M^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ следует вычесть $M^{(4)}(0, 0, 0, 0)$.

Можно показать, что в случае малых частот $\omega \ll m$ (ω — частота фотонов в системе центра инерции) усредненное по поляризациям фотонов сечение рассеяния света светом в телесном угле $d\mathrm{o}$ равно

$$d\sigma_0 = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^4 \frac{17}{8\pi^2} \frac{1}{90^2 m^2} \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 (3 + \cos^2\theta)^2 \, d\mathrm{o}, \tag{1}$$

где θ — угол рассеяния. Соответствующее сечение в электродинамике электрона равно, как известно ([1], [2]),

$$d\sigma_{1/2} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^4 \frac{139}{4\pi^2} \frac{1}{90^2 m_{1/2}^2} \left(\frac{\omega}{m_{1/2}}\right)^6 (3 + \cos^2\theta)^2 \, d\mathrm{o}. \tag{1'}$$

Частотная и угловая зависимости обоих сечений одинаковы, и при той же массе частиц оба выражения отличаются только численным множителем.

Что касается зависимости матричных элементов от поляризаций фотонов, то она будет различной в электродинамике скалярных частиц и электродинамике электронов. Если рассматривать фотоны, поляризованные по кругу, то при $\omega \ll m$

$$\begin{aligned}
&M_0^{(4)}(+\,+\,+\,+) = M_0^{(4)}(-\,-\,-\,-) = N_0(3 + \cos^2\theta);\\
&M_0^{(4)}(+\,+\,-\,-) = M_0^{(4)}(-\,-\,+\,+) = N_0(5 + 7\cos^2\theta);\\
&M_0^{(4)}(+\,-\,+\,-) = M_0^{(4)}(-\,+\,-\,+) = N_0(17 - 8\cos\theta + 3\cos^2\theta);\\
&M_0^{(4)}(+\,-\,-\,+) = M_0^{(4)}(-\,+\,+\,-) = N_0(17 + 8\cos\theta + 3\cos^2\theta),
\end{aligned} \tag{2}$$

в то время как в обычной электродинамике ([2])

$$\begin{aligned}
&M_{1/2}^{(4)}(+\,+\,+\,+) = M_{1/2}^{(4)}(-\,-\,-\,-) = 12N_{1/2}(3 + \cos^2\theta);\\
&M_{1/2}^{(4)}(+\,+\,-\,-) = M_{1/2}^{(4)}(-\,-\,+\,+) = -88N_{1/2};\\
&M_{1/2}^{(4)}(+\,-\,+\,-) = M_{1/2}^{(4)}(-\,+\,-\,+) = -22N_{1/2}(1 + \cos\theta)^2;\\
&M_{1/2}^{(4)}(+\,-\,-\,+) = M_{1/2}^{(4)}(-\,+\,+\,-) = -22N_{1/2}(1 - \cos\theta)^2
\end{aligned} \tag{2'}$$

(здесь $N_0 = \frac{\pi^2 i}{45}\left(\frac{\omega}{m}\right)^4$, $N_{1/2} = \frac{\pi^2 i}{45}\left(\frac{\omega}{m_{1/2}}\right)^4$ и знак $\pm$ обозначает правую и левую круговую поляризацию).

В области больших частот $\omega \gg m$ сечение рассеяния света светом обратно пропорционально ω^2 и не зависит от m ([3]).

3. Нелинейные эффекты при $\omega \ll m$ могут быть, как известно, описаны при помощи модифицированной функции Лагранжа электромагнитного поля $L = L_0 + L'$, где $L_0 = {}^1/_2(E^2 - H^2)$ и

$$L' = a(E^2 - H^2)^2 + b(\mathbf{EH})^2. \tag{3}$$

Так как матрица рассеяния 4-го порядка $S^{(4)}$, описывающая рассеяние света светом, связана с L' соотношением

$$S^{(4)} = i\int L' \, d^4x, \tag{3'}$$

то, зная матричный элемент рассеяния света светом, можно найти a и b, которые оказываются равными

$$a_0 = \frac{7}{360}\frac{1}{m^4}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2, \quad b_0 = \frac{4}{360}\frac{1}{m^4}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \tag{4}$$

(эти величины ранее другим способом были найдены Швингером ([4])).

Соответствующие величины в электродинамике электрона равны ([4])

$$a_{1/2} = \frac{2}{45}\frac{1}{m_{1/2}^4}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2, \quad b_{1/2} = \frac{14}{45}\frac{4}{m_{1/2}^4}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2. \tag{4'}$$

Используя формулы (3) и (3'), можно показать, что при $\omega \ll m$ усредненное по поляризациям фотонов сечение рассеяния света светом определяется формулой

$$d\sigma = \frac{1}{(8\pi)^2}(48a^2 - 8ab + 3b^2)\,\omega^6 (3 + \cos^2\theta)^2\, do. \tag{5}$$

Таким образом, зависимость сечения рассеяния от частоты и угла рассеяния не связана с конкретными значениями величин a и b.

Формулы (4) и (4') определяют значения констант a и b для скалярных частиц и электронов. Если учитывать влияние на рассеяние света светом обоих видов частиц, то в качестве a и b следует, очевидно, взять суммы соответствующих величин, т. е.

$$a = a_0 + a_{1/2}, \quad b = b_0 + b_{1/2}. \tag{5'}$$

4. Рассмотрим теперь когерентное рассеяние γ-лучей ядрами. Ограничимся здесь рассмотрением рассеяния на нулевой угол. Как известно ([5]), реальная часть матричного элемента $(k\,|\,S^{(4)}\,|\,k)$, отвечающего такому рассеянию, определяет интегральные сечение $\sigma_\pm$ образования пар соответствующих частиц фотоном в поле ядра

$$\sigma_\pm = -2\mathrm{Re}\,(k\,|\,S^{(4)}\,|\,k).$$

Различие между входящим сюда матричным элементом и матричным элементом рассеяния света светом заключается в том, что две фотонные линии графика, изображающего последний процесс, должны быть заменены линиями, соответствующими внешнему полю.

Сечение образования пар скалярных частиц фотоном частоты ω в кулоновском поле ядра оказывается равным

$$\sigma_\pm = \frac{Z^2}{27m^2}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^3 \frac{1}{\gamma^2}\left\{\left(10-26\gamma^2\right)E\left(\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right)+\left(10+12\gamma^2-\frac{6}{\gamma^2}\right)F\left(\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\right)\right\}, \tag{6}$$

где Ze — заряд ядра $\gamma = \omega/2m$ и

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}}.$$

В предельном случае больших энергий фотона $\omega \gg m$ эта формула приобретает вид ([6])

$$\sigma_\pm = \frac{Z^2}{m^2}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^3\left(\frac{4}{9}\ln\frac{2\omega}{m} - \frac{26}{27}\right), \quad \omega \gg m. \tag{6'}$$

Когерентное рассеяние γ-лучей ядрами на нулевой угол определяется матричным элементом $(k\,|\,S^{(4)}\,|\,k)$, вещественная часть которого с точностью

до множителя совпадает с $\sigma_{\pm}$, а мнимая часть, так же как в случае обычной электродинамики, может быть определена по вещественной части ([7]).

Сечение рассеяния на нулевой угол при $\omega \ll m$ оказывается равным

$$d\sigma(\omega, 0) = \frac{9Z^4}{m^2}\left(\frac{e^2}{32\pi}\right)^6\left(\frac{\omega}{m}\right)^4 do. \tag{7}$$

Если $\omega \gg m$, то

$$d\sigma(\omega, 0) = \frac{Z^4\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^6}{81m^2}\left(\frac{\omega}{m}\right)^2\left(\ln^2\frac{2\omega}{m} - \frac{13}{3}\ln\frac{2\omega}{m} + \frac{89}{18}\right)do. \tag{7'}$$

Аналогичным образом может быть найдено сечение рассеяния на малые углы.

5. Приведем еще выражение для поправок к закону Кулона, обусловленных поляризацией вакуума скалярных частиц. С этой целью нужно найти гриновскую функцию фотона $D'_F(k)$, которая связана с потенциалом точечного заряда $\varphi(r)$ соотношением ([8])

$$\varphi(r) = \frac{e}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{kr}} D'_F(\mathbf{k}, 0)\, d^3k. \tag{8}$$

Первые два члена разложения $D'_F(\mathbf{k}, 0)$ в ряд по степеням e имеют вид

$$D'_F(\mathbf{k}, 0) = \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{48}\frac{e^2}{(2\pi)^2}\int_0^1 \frac{v^4\, dv}{m^2 + \frac{\mathbf{k}^2}{4}(1-v^2)}. \tag{8'}$$

Подставляя (8') в (8), получим

$$\varphi(r) = \frac{e}{4\pi r}(1+\chi_0), \quad \chi_0 = \frac{1}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\int_1^\infty e^{-2mr\xi}\frac{(\xi^2-1)^{3/2}}{\xi^4}\, d\xi. \tag{9}$$

В предельных случаях $r \ll 1/m$ и $r \gg 1/m$ χ_0 имеет вид

$$\chi_0 = \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\ln\frac{1}{\gamma mr} - \frac{4}{3}\right), & r \ll \frac{1}{m}; \\ \frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{e^2}{(4\pi)^2}(mr)^{-3/2}e^{-2mr}, & r \gg \frac{1}{m}, \end{cases} \tag{10}$$

где $\ln\gamma$ — постоянная Эйлера.

Соответствующие формулы в электродинамике электрона имеют вид

$$\chi_{1/2} = \begin{cases} \frac{8}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\ln\frac{1}{\gamma m_{1/2} r} - \frac{5}{6}\right), & r \ll \frac{1}{m_{1/2}}; \\ \sqrt{\pi}\frac{e^2}{(4\pi)^2}(m_{1/2}r)^{-3/2}e^{-2m_{1/2}r}, & r \gg \frac{1}{m_{1/2}}. \end{cases} \tag{10'}$$

Если учитывать влияние поляризации вакуума обоих видов частиц, то в рассматриваемом приближении потенциал $\varphi(r)$ будет равен

$$\varphi(r) = \frac{e}{4\pi r}(1 + \chi_{1/2} + \chi_0). \tag{11}$$

Поступило
14 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Euler, Ann. d. Phys., 26, 398 (1936). [2] R. Karplus, M. Neuman, Phys. Rev., 83, 776 (1951). [3] А. Ахиезер, Sow. Phys., 11, 263 (1937). [4] J. Schwinger, Phys. Rev., 82, 664 (1951). [5] R. Jost, J. M. Luttinger, R. Slotnick, Phys. Rev., 80, 189). (1950). [6] R. F. Christy, S. Kusaka, Phys. Rev., 59, 414 (1941). [7] F. Rohrlich, R. Glückstern, Phys. Rev., 86, 1 (1952); H. Bethe, F. Rohrlich, Phys. Rev., 86, 10 (1952). [8] M. Gell-Mann, F. Low, Phys. Rev., 95, 1300 (1954).