Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 6

МАТЕМАТИКА

И. С. САРГСЯН

СУММИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 V 1955)

1. Рассмотрим задачу:

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функция $q(x)$ действительна, определена на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируема в каждом конечном интервале.

Б. М. Левитан доказал следующую теорему (1):

Теорема. *Если функция $q(x)$ суммируема в каждом конечном интервале и $f(x) \in L_2(0, \infty)$, то разность между разложением функции $f(x)$ в обобщенный интеграл Фурье и разложением в обычный интеграл Фурье по косинусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.*

В настоящей работе мы при помощи метода Б. М. Левитана устанавливаем некоторые результаты о суммировании производных разложения по собственным функциям оператора (1).

2. Предположим для простоты, что спектр задачи (1)—(2) неотрицателен. Пусть $\lambda = \mu^2$ $(\lambda > 0)$. Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ решение задачи (1)—(2). Справедлива формула (2)

$$\varphi(x, \mu)\cos \mu t = \frac{1}{2}\{\varphi(x + t, \mu) + \varphi(x - t, \mu)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x, t, s)\,\varphi(s, \mu)\, ds, \tag{3}$$

где $w(x, t, s)$ строится по функции Римана уравнения $\partial^2 u/\partial x^2 - q(x)\,u = \partial^2 u/\partial t^2$, причем для производных функции $w(x, t, s)$ по x имеет место соотношение

$$\frac{\partial^k w(x, t, s)}{\partial x^k} = \frac{1}{2^k}\left\{q_x^{(k-1)}\left[\frac{1}{2}(x + s - t)\right] - q_x^{(k-1)}\left[\frac{1}{2}(x + s + t)\right]\right\} \quad (k \geqslant 1).$$

Пусть функция $g(t, \varepsilon)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g(t, \varepsilon) = g(-t, \varepsilon)$.
2) $g(t, \varepsilon) = 0$, $|t| \geqslant \varepsilon$. (4)
3) $g(t, \varepsilon)$ имеет ограниченную вторую производную.

Положим

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^\varepsilon g(t, \varepsilon)\cos \mu t\, dt.$$

Продифференцируем равенство (3) по x, помножим обе части полученного равенства на $g(t, \varepsilon)$ и проинтегрируем по t от 0 до ε. Учитывая, что $w(x, t, x \pm t) = 0$, получим

$$\varphi'_x(x,\mu)\,\psi_\varepsilon(\mu)=\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon\{\varphi'_x(x+t,\mu)+\varphi'_x(x-t,\mu)\}\,g(t,\varepsilon)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\varepsilon g(t,\varepsilon)\Big[\int_{x-t}^{x+t}\frac{\partial w}{\partial x}\,\varphi(s,\mu)\,ds\Big]\,dt. \tag{5}$$

Интегрируя первый член правой части равенства (5) по частям и подставляя вместо $g(t,\varepsilon)$ функцию $g(t,\varepsilon,a)=g(t,\varepsilon)\cos at$, получим

$$\frac{1}{2}\varphi'_x(x,\mu)\{\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi(s,\mu)\Big\{g'_x(s-x,\varepsilon,a)-\int_{|x-s|}^{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial x}\,g(t,\varepsilon,a)\,dt\Big\}\,ds. \tag{6}$$

Пусть $f(s)\in L_2(0,\infty)$; $F(\mu)$ — обобщенное преобразование $f(s)$, т. е.

$$F(\mu)=\int_0^\infty f(s)\,\varphi(s,\mu)\,ds. \tag{7}$$

В силу равенства Парсеваля из (6) и (7) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu)\{\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)\}\,\varphi'_x(x,\mu)\,d\rho(\mu)=$$

$$=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(s)\Big\{-g'_x(s-x,\varepsilon,a)+\int_{|x-s|}^{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial x}\,g(t,\varepsilon,a)\,dt\Big\}\,ds. \tag{8}$$

Так как функция $f(x)$ произвольна, то из (8) следует тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'_x(x,\mu)\,\varphi(s,\mu)\{\psi_\varepsilon(\mu+a)+\psi_\varepsilon(\mu-a)\}\,d\rho(\mu)=$$

$$=\begin{cases}-g'_x(s-x,\varepsilon,a)+\displaystyle\int_{|x-s|}^{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial x}\,g(t,\varepsilon,a)\,dt, & |x-s|\leqslant\varepsilon\\ 0, & |x-s|\geqslant\varepsilon.\end{cases} \tag{9}$$

Дифференцируя (9) по s, при $x=s$ получим формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu-a)\,d_\mu\Big\{\frac{\partial^2\theta(x,x;\mu)}{\partial x^2}\Big\}=$$

$$=\begin{cases}-g'_{xx}(0,\varepsilon,a)+\displaystyle\int_0^\varepsilon g(t,\varepsilon,a)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dt, & \varepsilon\geqslant 0,\\ 0, & \varepsilon\leqslant 0,\end{cases} \tag{10}$$

где $\theta(x,y;\mu)$ — спектральная функция оператора (1).

Теорема 1. *Если функция $q(x)$ имеет ограниченную первую производную в каждом конечном интервале, то имеет место оценка*

$$\operatorname*{V}_a^{a+1}\Big\{\frac{\partial^2\theta(x,x;a)}{\partial x^2}\Big\}=o(a^2).$$

Доказательство следует из формулы (10) непосредственно.

Теорема 2. *Если функция $q(x)$ ограничена в каждом конечном интервале, то справедлива асимптотическая формула**

$$\lim_{\mu\to\infty}\left\{\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)d_\nu\left[\frac{\partial\theta(x,x;\nu)}{\partial x}-\frac{\partial\theta^*(x,x;\nu)}{\partial x}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(2)}{\sqrt{2\pi}}\,\mu\int_0^1\frac{\partial w(x,x,t)}{\partial x}\,\frac{J_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}\,dt\right\}=0.$$

Теорема 3. *Если функция $q(x)$ имеет ограниченную первую производную в каждом конечном интервале, то справедлива асимптотическая формула*

$$\lim_{\mu\to\infty}\left\{\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^2 d_\nu\left[\frac{\partial^2\theta(x,x;\nu)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\theta^*(x,x;\nu)}{\partial x^2}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(3)}{\sqrt{2\pi}}\,\mu\int_0^1\frac{\partial^2 w(x,x,t)}{\partial x^2}\,\frac{J_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}\,dt\right\}=0.$$

Теорема следует из формулы (10) и одной теоремы Б. М. Левитана ([3]).

3. Пусть $f(s)\in L_2(0,\infty)$. Положим

$$S(x,\mu)=\int_0^{\infty}f(s)\,\theta(x,s;\mu)\,ds;\qquad S^*(x,\mu)=\int_0^{\infty}f(s)\,\theta^*(x,s;\mu)\,ds. \tag{11}$$

Лемма 1. *При* $\mu\to\infty$

$$\operatorname*{V}_{\mu}^{\mu+1}\left\{\frac{\partial S(x,\mu)}{\partial x}\right\}=o(\mu).$$

Оценка имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Из (8) и (11) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu)\,d_\mu^s\left\{\frac{\partial S(x,\mu)}{\partial x}\right\}=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(s)\left\{-g'_x(s-x,\varepsilon)+\int_{|x-s|}^{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial x}\,g(t,\varepsilon)\,dt\right\}ds. \tag{12}$$

Положим

$$h(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}\frac{\partial w}{\partial x}\,f(s)\,ds,\quad \alpha(x,\mu)=\int_0^1 h(x,t)\cos\mu t\,dt,$$
$$\frac{\partial R(x,\mu;f)}{\partial x}=\frac{\partial S(x,\mu)}{\partial x}-\frac{\partial S^*(x,\mu)}{\partial x}. \tag{13}$$

Выписывая для функции $S^*(x,\mu)$ формулу, аналогичную формуле (12), и вычитая ее из (12), в силу (13), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu)\,d_\mu\left\{\frac{\partial R(x,\mu;f)}{\partial x}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\mu}\alpha(x,\nu)\,d\nu\right\}=0.$$

Лемма 2. *Равномерно в каждом конечном интервале*

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)d_\nu\left\{\int_0^{\nu}\alpha(x,\sigma)\,d\sigma\right\}=0.$$

В силу леммы 1 и 2 и цитированной выше теоремы Б. М. Левитана справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Если функция $q(x)$ ограничена в каждом конечном интервале и $f(x)\in L_2(0,\infty)$, то равномерно в каждом конечном*

* $\theta^*(x,y;\mu)$ означает спектральную функцию оператора (1) при $q(x)\equiv 0$.

интервале

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)d_\nu\left\{\frac{\partial S(x,\nu)}{\partial x}-\frac{\partial S^*(x,\nu)}{\partial x}\right\}=0,$$

т. е. средние по Риссу первого порядка между первыми производными разложений функции $f(x)$ в обобщенный интеграл Фурье и обычный интеграл Фурье по косинусам стремятся к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

4. Обозначим через $F[f]$ ряд Фурье функции $f(x)$. Пусть (C,r) означает метод суммирования по Чезаро порядка r. Известна теорема:

Теорема (4). *Ряд $F'[f]$ суммируем (C,r), $r>1$, к значению $f'(x)$ во всех точках x, в которых $f'(x)$ существует и конечна.*

Установлена следующая теорема:

Теорема 5. *Если в некоторой окрестности точки x_0 существует $f'(x)$ и конечна, то в точке x_0 $F'[f]$ суммируема $(C,1)$ к значению $f'(x_0)$.*

В силу теоремы 4 аналогичная теорема имеет место для обобщенных интегралов Фурье.

5. Пусть функция $g(t,\varepsilon)$ удовлетворяет пунктам 1 и 2 условий (4) и условию: имеет ограниченную $2k$-ю производную. Предположим, что функция $q(x)$ имеет ограниченную $(2k-1)$-ю производную в каждом конечном интервале. Тогда теорема 1 допускает следующее обобщение:

Теорема 6. *Если функции $g(x)$ и $g(t,\varepsilon)$ удовлетворяют предыдущим предположениям, то имеет место оценка*

$$\bigvee_a^{a+1}\left\{\frac{\partial^{(2k)}\theta(x,x;a)}{\partial x^{2k}}\right\}=o(a^{2k}).$$

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 1.

Далее, имеет место лемма, обобщающая лемму 1.

Лемма 3. *При $\mu\to\infty$*

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1}\left\{\frac{\partial^{(k)}S(x,\mu)}{\partial x^k}\right\}=o(\mu^k).$$

Оценка имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство следует из теоремы 5.

В силу леммы 3 и цитированной выше теоремы Б. М. Левитана справедлива теорема, обобщающая теорему 4:

Теорема 7. *Если функция $q(x)$ имеет ограниченную $(k-1)$-ю производную в каждом конечном интервале и $f(x)\in L_2(0,\infty)$, то равномерно в каждом конечном интервале*

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d_\nu\left\{\frac{\partial^{(k)}S(x,\nu)}{\partial x^k}-\frac{\partial^{(k)}S^*(x,\nu)}{\partial x^k}\right\}=0,$$

т. е. средние по Риссу порядка k между k-ми производными разложений функции $f(x)$ в обобщенный интеграл Фурье и обычный интеграл Фурье по косинусам стремятся к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

В заключение искренне благодарю моего учителя проф. Б. М. Левитана, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 V 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., № 1, 33 (1955). [2] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, № 1, 3 (1949). [3] Б. М. Левитан, Матем. сборн., 35 (77): 2 (1954). [4] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М. — Л., 1938. [5] Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М. — Л., 1948.