Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 6

МАТЕМАТИКА

И. Я. ПЛАМЕННОВ

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ СВОЙСТВАМ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 VII 1955)

§ 1. Пусть $y=f(x)$ — измеримая функция одного действительного переменного, определенная на множестве E.

Определение 1 (Ф. И. Шмидов). Точка $x\in E$ называется точкой положительной нижней плотности графика функции $f(x)$, если существует такое $\lambda=\lambda(x)$ $(0<\lambda<+\infty)$, что

$$\liminf_{h\to 0}\frac{\operatorname{mes} E(x,\lambda)(x-h,x+h)}{2h}>0, \tag{1}$$

где

$$E(x,\lambda)=\underset{x'\in E}{E}[|f(x')-f(x)|<\lambda|x'-x|].$$

Из теоремы А. Я. Хинчина (см. [1]), а также [2], стр. 426) следует, что $f(x)$ асимптотически дифференцируема почти всюду на множестве тех точек $x\in E$, в которых нижняя плотность графика функции $f(x)$ (т. е. величина в левой части неравенства (1) при некотором $\lambda<+\infty$) превышает $1/2$. То, что в точках положительной нижней плотности графика функция необязательно почти всюду асимптотически дифференцируема, было показано А. Н. Колмогоровым (как указывает Ф. И. Шмидов, [3], стр. 23).

Поведение произвольной измеримой функции $f(x)$ в окрестностях точек положительной нижней плотности графика изучалось Ф. И. Шмидовым [4]. Обозначим через $s(\eta)$ какой-нибудь угол на плоскости (x, y) с вершиной в точке $\eta=[x,f(x)]$ графика функции $f(x)$ и пусть $E_{s(\eta)}$ — множество тех точек $x'\in E$, для которых точки графика $[x', f(x')]$ принадлежат углу $s(\eta)$. Ф. И. Шмидовым установлено, что почти в каждой точке $x\in E$, в которой $f(x)$ не имеет асимптотической производной и которая является точкой положительной нижней плотности графика функции $f(x)$, множество $E_{s(\eta)}$ имеет положительную верхнюю плотность при любом угле $s(\eta)$ с вершиной в точке $\eta=[x, f(x)]$.

Вопрос о том, может ли верхняя плотность множеств $E_{s(\eta)}$, $\eta=[x,f(x)]$, для какого-нибудь угла $s(\eta)$ быть промежуточной между нулем и единицей в точках множества положительной меры, оставался открытым. Следующая теорема показывает, что это возможно.

Теорема 1. *Пусть* $0<\varepsilon<1$. *На отрезке* $[0, 1]$ *существует непрерывная функция* $\varphi(x)$, *обладающая следующими свойствами*:

а) $\varphi(x)$ *не имеет асимптотической производной в каждой точке* $x\in E$, *где* $E\subset(0,1)$, $\operatorname{mes} E>1-\varepsilon$;

б) *в каждой точке* $x\in E$

$$\liminf_{h\to 0}\frac{\operatorname{mes} E(x,\lambda)(x-h,x+h)}{2h}=\frac{1}{2}$$

при любом $\lambda>0$;

в) *если замкнутый угол* $s[\eta]$, $\eta=[x,\varphi(x)]$, *не содержит лучей, параллельных осям координат, причем угловыми коэффициентами сторон угла* $s[\eta]$ *являются числа* α_1 *и* α_2, *удовлетворяющие условию*

$0<|\alpha_1|<|\alpha_2|<+\infty$, *то*

$$\limsup_{h\to 0}\frac{\operatorname{mes} E_{s(\eta)}(x, x+h)}{|h|}=1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

в любой точке $x\in E$; *если же замкнутый угол* $s[\eta]$ *содержит луч, параллельный оси* x, *и лежит в полуплоскости* $x'\geqslant x$ (*или* $x'\leqslant x$), *то верхняя плотность множества* $E_{s(\eta)}$, $\eta=[x, \varphi(x)]$, *равна единице в каждой точке* $x\in E$.

Можно также построить измеримую функцию $\varphi(x)$ (вообще разрывную), для которой свойства а), б) и в) выполняются на множестве полной меры. Заметим, что выделяемое здесь направление, параллельное оси x (см. свойство в)), несущественно. Действительно, в качестве этого направления можно взять любое заданное направление k, для чего достаточно прибавить к функции $\varphi(x)$ линейную функцию kx. Можно также функцию $\varphi(x)$ определить так, чтобы это направление изменялось от точки к точке.

§ 2. В теореме Ф. И. Шмидова ничего не говорится о поведении функции $f(x)$ в окрестностях тех точек $x\in E$, которые не являются точками положительной нижней плотности графика. Ясно, что в таких точках функция $f(x)$ не может иметь конечной асимптотической производной. В. Ярник ([5]) построил пример функции $x(t)$, непрерывной на отрезке $[0, 1]$, для которой множество $E_{s(\eta)}$ имеет нулевую плотность в каждой точке $t\in E$, где $E\subset[0, 1]$, $\operatorname{mes} E=1$, если только замкнутый угол $s[\eta]$, $\eta=[t, x(t)]$, лежит в полуплоскости $t'>t$ (или $t'<t$). Очевидно, каждая точка $t\in E$ не является точкой положительной нижней плотности графика функции $x(t)$.

Возможен еще один случай, когда график функции не имеет положительной нижней плотности на множестве полной меры. Чтобы рассмотреть этот случай, введем следующее определение:

Определение 2 (В. Ярник). Число k (k может равняться $+\infty$ и $-\infty$) называется правым (левым) существенным производным числом функции $f(x)$ в точке x_0, если справа (слева) от x_0 существует измеримое множество E_{x_0}, верхняя плотность которого в точке x_0 равна единице и такое, что

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ E_{x_0}}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k.$$

Тогда верна следующая теорема:

Теорема 2. *В пространстве* C *всех непрерывных функций, заданных на* $[0, 1]$, *существует множество* B *второй категории, обладающее следующим свойством: для каждой функции* $f(x)\in B$ *любая точка* $x\in[0, 1]$, *исключая, быть может, множество* $N[f(x)]$ *меры нуль, не является точкой положительной нижней плотности графика* $f(x)$ *и каждое действительное число* (*включая* $+\infty$ *и* $-\infty$) *будет как правым, так и левым существенным производным числом в каждой точке* $x\in[0, 1]-N[f(x)]$.

Теорема 2 с заменой в ней существенных производных чисел существенными полукасательными лучами имеет место также для функций двух действительных переменных.

При построении примера функции $\varphi(x)$ были использованы некоторые идеи, сообщенные мне А. Н. Колмогоровым, за что я весьма ему признателен. Считаю также своим долгом выразить благодарность Д. Е. Меньшову за ценные советы и указания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 VII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Матем. сборн., 31, 265 и 377 (1924). [2] С. Сакс, Теория интеграла, М., 1949. [3] Ф. И. Шмидов, Дифференциальные свойства множеств и функций, Диссертация, 1938. [4] Ф. И. Шмидов, ДАН, 39, № 7, 271 (1943). [5] V. Jarnik, Fund. Math., 22, 4 (1934).