Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 6

МАТЕМАТИКА

С. А. ГАЛЬПЕРН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА С. Л. СОБОЛЕВА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 VII 1955)

1. Настоящая заметка посвящена решению в явном виде задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + f(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (A_1)$$

с начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x_1, \ldots, x_n). \qquad (A_2)$$

Здесь Δu — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Эту задачу для случая $n = 3$, т. е. для случая, когда искомая функция u зависит от 4 независимых переменных t, x_1, x_2, x_3, решил С. Л. Соболев (1), использовав для этого формулу Грина для оператора, отвечающего уравнению (A_1), и соответствующее фундаментальное решение. Непосредственно обобщить метод С. Л. Соболева для случая $n > 3$ не удается, потому что не ясно, как найти фундаментальное решение. Мы воспользуемся для решения задачи методом Фурье (2).

Найдем решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \qquad (B_1)$$

удовлетворяющее условиям:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_n); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \qquad (B_2)$$

Хорошо известно, что, зная решение этой последней задачи, легко построить решение первоначально поставленной задачи (3). Поэтому мы будем решать только эту последнюю задачу и назовем ее задачей (B).

Будем предполагать, что начальная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ обладает всеми производными до некоторого порядка $\lambda + 1$, причем все эти производные интегрируемы с квадратом по всему пространству, а производные до порядка λ стремятся к нулю, когда $|x_1| + \ldots + |x_n| \to \infty$. Число λ будет определено в дальнейшем, оно будет различным для разных представлений решения. Обозначим преобразованную Фурье функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ через

$$E_\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \varphi(x_1, \ldots, x_n) \exp\left[-i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right] dx_1 \ldots dx_n \,*.$$

* Здесь и в дальнейшем интегралы, взятые по всему пространству, пишутся без указания пределов интегрирования.

Тогда функция

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int E_\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cos\left(\frac{\alpha_n}{\alpha} t\right) \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right] d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \quad (1)$$

где $\alpha = (\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2)^{1/2}$, дает обобщенное решение задачи, если $\lambda = [n/2]$, и решение в обычном смысле, если $\lambda = [n/2] + 2$.

Доказательство этих утверждений можно получить, если воспользоваться результатами И. Г. Петровского ([4]) о сходимости кратных рядов Фурье.

Обозначим через $\Delta^s\varphi$ полигармонический оператор порядка s от функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$; тогда формулу (1) можно записать так:

$$u(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= (-1)^s \int \frac{E_{\Delta^s\varphi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\alpha^{2s}} \cos\left(\frac{\alpha_n}{\alpha} t\right) \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right] d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \quad (2)$$

Число s, очевидно, должно удовлетворять неравенству $2s \leqslant \lambda + 1$. Теперь распространим интеграл (2) только на шар $\alpha \leqslant R$ и обозначим величину такого интеграла через u_R. Затем подставим в этот интеграл выражение для $E_{\Delta^s\varphi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ через $\Delta^s\varphi$ и переменим порядок интегрирования. Последнее возможно, если

$$s < n/2. \quad (3)$$

В результате получим

$$u_R = \int \Delta^s \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) H_R^{(s)}(t, x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

где

$$H_R^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{(-1)^s}{(2\pi)^n} \int_{\alpha \leqslant R} \frac{1}{\alpha^{2s}} \cos\left(\frac{\alpha_n}{\alpha} t\right) \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k\right] d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \quad (4)$$

Используя формулу, выражающую преобразованную Фурье от функции, зависящей только от радиуса, через однократный интеграл ([5]), а затем делая замену переменных $\alpha_n = \alpha \cos\theta$, $\beta = \alpha \sin\theta$, где $\beta = (\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{n-1}^2)^{1/2}$, мы получим

$$H_R^{(s)}(t, y_1 \ldots, y_n) =$$

$$= \frac{(-1)^s}{(2\pi)^{(n+1)/2} \rho^{(n-3)/2}} \int_0^R \alpha^{(n+1)/2-2s} d\alpha \int_0^\pi e^{i y_n \alpha \cos\theta} \sin^{(n-1)/2}\theta \cos(t \cos\theta) \times$$

$$\times J_{(n-3)/2}(\rho\alpha \cos\theta) d\theta.$$

Здесь $\rho = (y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2)^{1/2}$. Внутренний интеграл можно вычислить, используя известную формулу Сонина ((6), стр. 410); тогда

$$H_R^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{(-1)^s}{2(2\pi)^{n/2}} \int_0^R \alpha^{(n-1)-2s} \left[\frac{J_{(n-2)/2}(\omega_1)}{\omega_1^{(n-2)/2}} + \frac{J_{(n-2)/2}(\omega_2)}{\omega_2^{(n-2)/2}}\right] d\alpha, \quad (5)$$

где

$$\omega_1^2 = (\alpha y_n + t)^2 + \rho^2\alpha^2, \quad \omega_2^2 = (\alpha y_n - t)^2 + \rho^2\alpha^2. \quad (6)$$

Интеграл (5) будет сходиться при $R \to \infty$, если

$$s > (n-1)/4. \quad (7)$$

Из (3) и (7) следует, что если s удовлетворяет неравенствам

$$(n-1)/4 < s < n/2, \quad (8)$$

то фундаментальное решение $H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \lim\limits_{R \to \infty} H_R^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n)$

имеет вид

$$H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{(-1)^s}{2(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \alpha^{(n-1)-2s} \left[\frac{J_{(n-2)/2}(\omega_1)}{\omega_1^{(n-2)/2}} + \frac{J_{(n-2)/2}(\omega_2)}{\omega_2^{(n-2)/2}} \right] d\alpha, \quad (9)$$

где ω_1 и ω_2 определены формулами (6).

Решение задачи (B) запишется при помощи фундаментального решения так:

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \int \Delta^s \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) H^{(s)}(t, x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n. \quad (10)$$

Очевидно, что для такого представления достаточно, чтобы $\lambda = 2s - 1$. Дальнейшие преобразования фундаментального решения и получение новых фундаментальных решений проводятся раздельно для случаев нечетного и четного n.

2. Рассмотрим сначала случай нечетного n. Положим $s = (n-1)/2$, тогда формулу (9) можно переписать так:

$$H^{((n-1)/2)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}\pi}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_{(n-2)/2}(\omega_1)}{\omega_1^{(n-2)/2}} d\alpha, \quad (11)$$

и, воспользовавшись формулой Сонина ([6], стр. 457), получим:

$$H^{((n-1)/2)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}\pi}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \frac{1}{r} \frac{J_{(n-3)/2}(t\rho/r)}{(t\rho/r)^{(n-3)/2}}, \quad (12)$$

где

$$r = (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{1/2} = (\rho^2 + y_n^2)^{1/2}.$$

При $n = 3$ равенство (12) дает формулу, полученную С. Л. Соболевым ([1]). Однако можно в формуле (9) взять любое s, удовлетворяющее неравенству (8), тогда после вычислений получим:

$$H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{(-1)^s}{(2\pi)^{n/2}} \times$$

$$\times \frac{1}{r^{n-2s}} \sum_{m=0}^{n-2s-1} C_{n-2s-1}^{2m} 2^{(2m-1)/2} \Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) \left(\frac{y_n t}{r}\right)^{n-2m-2s-1} \frac{J_{(n-2m-3)/2}(t\rho/r)}{(t\rho/r)^{(n-2m-3)/2}}, \quad (13)$$

$$H^{(s)}(0, y_1, \ldots, y_n) = \frac{A_n^{(s)}}{r^{n-2s}}, \quad (14)$$

где постоянная $A_n^{(s)} = \frac{(-1)^s}{(2\pi)^{n/2}} 2^{(n-4s)/2} \Gamma\left(\frac{n-2s}{2}\right) / \Gamma(s)$.

Отметим, что для любых s, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant s \leqslant (n-1)/2$, имеет место тождество:

$$\Delta H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n) = H^{(s-1)}(t, y_1, \ldots, y_n), \quad (15)$$

поэтому можно пользоваться формулой (13) и получать фундаментальные решения для этих значений s. В частности, полагая в формуле (13) $s = 1$, мы получим фундаментальное решение $H^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_n)$. В самом деле, в силу (15) имеем

$$H^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \Delta^{s-1} H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n),$$

и, следовательно, так как $H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n)$, при $s > (n-1)/4$ удовлетворяет уравнению (B_1), то $H^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_n)$ будет удовлетворять тому же уравнению.

Фундаментальное решение $H^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_n)$ стремится при $t \to 0$ к $A_n^{(1)}/r^{n-2}$, а интеграл (10) сходится равномерно относительно t, изменяющегося на конечном отрезке, поэтому

$$\lim_{t \to 0} u(t, x_1, \ldots, x_n) = A_n^{(1)} \int \frac{\Delta\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\tilde{r}^{n-2}} d\xi_1 \ldots d\xi_n = \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\tilde{r} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - \xi_k)^2\right)^{1/2}$. Поскольку $\partial H^{(1)}/\partial t$ стремится к нулю при $t \to 0$, то $\partial u/\partial t$ также будет стремится к нулю при $t \to 0$.

Таким образом, доказано, что формула (10) *при* $s = 1$ *дает решение задачи* (В), *при этом* $\lambda + 1 = 2$ *и число* λ *не зависит от числа измерений.* Здесь можно не требовать интегрируемости квадрата функции и ее производных.

3. Рассмотрим теперь случай четного n. Здесь также можно найти явное выражение для фундаментального решения $H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n)$, однако оно имеет более сложный вид.

Из формулы (9) после преобразований, полагая $s = (n-2)/2$ и $n \geqslant 4$, получаем формулу

$$H^{((n-2)/2)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \left[\frac{t y_n}{r^2} \frac{J_{(n-3)/2}\left(\frac{t\rho}{r}\right)}{\left(\frac{t\rho}{r}\right)^{(n-3)/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t y_n / r^2} \left(\alpha - \frac{t y_n}{r^2}\right) \frac{J_{(n-2)/2}\left(r\left(\alpha^2 + \frac{t^2\rho^2}{r^2}\right)^{1/2}\right)}{r^{(n-2)/2}\left(\left(\alpha^2 + \frac{t^2\rho^2}{r^2}\right)^{1/2}\right)^{(n-2)/2}} d\alpha \right]$$

и

$$H^{((n-2)/2)}(0, y_1, \ldots, y_n) = \frac{A_n^{((n-2)/2)}}{r^2}; \qquad \frac{\partial H^{((n-2)/2)}(0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial t} = 0.$$

Можно найти формулу и для $H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n)$, причем будет иметь место равенство

$$\Delta H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n) = H^{(s-1)}(t, y_1, \ldots, y_n),$$

$$H^{(s)}(0, y_1, \ldots, y_n) = \frac{A_n^{(s)}}{r^{n-2s}}, \qquad \frac{\partial H^{(s)}(0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial t} = 0,$$

где $A_n^{(s)}$ — постоянная. *Так же как и в случае нечетного* n, *здесь можно положить* $s = 1$, *и для решения задачи* (В) *окажется достаточным, чтобы* $\lambda + 1 = 2$.

4. Пользуясь формулой Грина и полученным фундаментальным решением, можно показать, что всякое достаточно гладкое решение, удовлетворяющее некоторым требованиям убывания на бесконечности, представимо при помощи формулы (10). Тем самым устанавливается единственность решения задачи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 VII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, 3, § 13 (1954). [2] И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, **1**, в. 7 (1938). [3] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1951, стр. 382. [4] И. Г. Петровский, Матем. сборн., **5** (47), 1, 25 (1939) [5] S. Bochner, Vorlesungen über Fouriesche Integrale, 1932, S. 186. [6] Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, 1949.