Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 6

МАТЕМАТИКА

Ю. С. БОГДАНОВ

К ТЕОРИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 VIII 1955)

В настоящей работе мы пользуемся определениями и результатами известной работы А. М. Ляпунова ([1]) в той ее части, которая касается систем линейных дифференциальных уравнений.

Пусть имеется система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} x_j \tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными коэффициентами $p_{ji} = p_{ji}(t)$ $(t \geqslant t_0)$ и пусть $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ — сумма характеристичных чисел какой-либо нормальной системы решений системы (1). Введем «характеристичную разность» системы (1):

$$\sigma = -S - \liminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \sum_{i=}^{n} p_{ii} dt.$$

Известно, что $\sigma \geqslant 0$ и при $\sigma = 0$ система (1) называется правильной.

Теорема 1. *Имеет место неравенство*

$$\sigma \leqslant \limsup_{t \to +\infty} \frac{n}{2t} \int_{t_0}^{t} \sum_{i,j=1}^{n} |p_{ij} + p_{ji}| \, dt - \liminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_{ii} dt. \tag{2}$$

Не нарушая общности, можно считать $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$.

Рассмотрим присоединенную систему уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j,$$

и пусть $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$ — ее характеристичные числа, причем $\lambda_1' \leqslant \lambda_2' \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n'$.

Теорема 2. *Имеют место неравенства*

$$0 \geqslant \lambda_i + \lambda_i' \geqslant -\sigma \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Известно, что в случае правильных систем $\lambda_i + \lambda_i' = 0$.

Отметим, что для системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cos \ln t, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \cos \ln t$$

мы имеем $\lambda_1 + \lambda_1' = \lambda_2 + \lambda_2' = -\sigma = -\sqrt{2}$.

Рассмотрим теперь наряду с (1) другую систему:

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (p_{ji} + q_{ji})\, y_j. \tag{3}$$

Теорема 3. *Если характеристичные числа функций* $q_{ji}(t)$ *больше характеристичной разности* σ *системы* (1), *то совокупности характеристичных чисел систем* (1) *и* (3) *и характеристичные разности этих систем совпадают.*

Следствие. Взяв за исходную систему такую систему, у которой $p_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и p_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие же, что у системы (1), мы приходим к следующему результату: *если коэффициенты системы* (1) *обладают свойством*

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |p_{ij}| < -an \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$a = \max_{i=1,2,\ldots,n} \left\{ \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} p_{ii}\, dt - \liminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} p_{ii}\, dt \right\},$$

то характеристичными числами системы (1) *будут числа*

$$-\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} p_{ii}\, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отметим еще, что, пользуясь теоремой 3, можно дать прием построения характеристичных чисел системы (1). При этом мы в качестве системы (3) берем систему с кусочно-постоянными коэффициентами, что не вносит существенных изменений в теорию линейных систем. Укажем этот прием.

Существует последовательность значений t: $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots \to +\infty$ такая, что колебание каждой функции p_{ij} на промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ не превосходит $e^{-\varepsilon t_k}$, где ε — любое число, превосходящее характеристичную разность системы (1), например, число, превосходящее правую часть неравенства (2).

Введем следующие матрицы:

$$P(t) = \| p_{ij}(t) \|, \quad Q_k = e^{(t_k - t_{k-1})P(t_k)}, \quad R_k = \| r_{ij}^{(k)} \| = Q_1 Q_2 \ldots Q_k.$$

При этом числа

$$\lambda_1 = -\limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{t_{k-1}} \ln \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [r_{1j}^{(k)}]^2},$$

$$\lambda_i = \max_{c_1, c_2, \ldots, c_{i-1} = \text{пост}} \left\{ -\limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{t_{k-1}} \ln \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[r_{ij}^{(k)} + \sum_{l=1}^{i-1} c_l r_{lj} \right]^2} \right\}$$

являются характеристичными числами системы (1).

Поступило
27 VII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950.