Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 6

МАТЕМАТИКА

И. И. БЛЕХМАН

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 29 VII 1955)

В настоящей заметке рассматривается вопрос об устойчивости периодических (с периодом 2π) решений неавтономной квазилинейной системы со многими степенями свободы в предположении, что характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет нулевой корень k-й кратности, p пар чисто мнимых корней вида $\pm iM_j$ с кратностями m_j $(j = 1, \ldots, p)$, где M_j — целые числа, r пар чисто мнимых корней вида $\pm iN_\nu$ с кратностями n_ν $(\nu = 1, \ldots, r)$, где числа N_ν и их разности отличны от целых чисел и от нуля. Вещественные части всех прочих корней предполагаются отрицательными, а элементарные делители, соответствующие всем кратным корням, — линейными. С подобным специальным случаем квазилинейных уравнений приходится сталкиваться при исследовании динамических систем, содержащих несколько параллельно включенных однотипных объектов. Одна из таких систем рассмотрена в нашей работе (1), отдельные результаты которой обобщаются в настоящей заметке. Частные случаи изучаемой здесь задачи исследованы И. Г. Малкиным (2) и С. Н. Шимановым (3).

В результате неособенного линейного преобразования рассматриваемая система может быть приведена к канонической форме

$$\dot{x}_s = \lambda_s x_s + f_s(t) + \mu F_s(x_1, \ldots, x_l, \mu, t) \quad (s = 1, \ldots, l), \tag{1}$$

где

$$\lambda_s = \begin{cases} 0, & s = 1, \ldots, k; \\ \pm iM_j, & s = k + 2(m_1 + \ldots + m_{j-1}) + 1, \ldots, k + 2(m_1 + \ldots + m_j) \\ & (j = 1, \ldots, p); \\ \pm iN_\nu, & s = k + 2m + 2(n_1 + \ldots + n_{\nu-1}) + 1, \ldots, k + 2m(n_1 + \ldots + n_\nu) \\ & (\nu = 1, \ldots, r); \\ -u_s + iv_s, & u_s > 0, \quad v_s > 0, \quad s = k + 2(m + n) + 1, \ldots, l. \end{cases} \tag{2}$$

Через $m = m_1 + \ldots + m_p$ и $n = n_1 + \ldots + n_r$ здесь обозначены суммы кратностей соответствующих корней, причем, очевидно, $k + 2(m + n) \leqslant l$. Кроме непрерывности предполагается, что F_s — аналитические функции $x_1, \ldots, x_l$ в некоторой области G, которой принадлежат все периодические решения, о которых мы будем говорить, и параметра $\mu \geqslant 0$ при достаточно малых его значениях. По переменной t функции F_s в любой точке области G разлагаются в равномерно сходящийся ряд Фурье; то же самое предполагается относительно $f_s(t)$. Можно считать, что комплексно сопряженным λ_s соответствуют комплексно сопряженные F_s и f_s, а также решения x_s.

Поскольку нас интересуют только такие системы (1), которые при $\mu = 0$ имеют периодическое решение с периодом 2π, то должны быть справедливы соотношения

$$\int_0^{2\pi} f_s(t)\, e^{-\lambda_s t}\, dt = 0, \quad s = 1, \ldots, k + 2m, \tag{3}$$

при выполнении которых уравнения (1) допускают при $\mu = 0$ не одно, а целое семейство периодических решений

$$x_s^0 = \begin{cases} \alpha_s e^{\lambda_s t} + \varphi_s(t); & s = 1, \ldots, k + 2m; \\ \varphi_s(t); & s = k + 2m + 1, \ldots, l; \end{cases} \tag{4}$$

$$\varphi_s(t + 2\pi) = \varphi_s(t) = \int_0^t f_s(\tau)\, e^{\lambda_s (t-\tau)}\, d\tau,$$

зависящее от $k + 2m$ произвольных постоянных α_s.

Исследование системы (1) при помощи метода Пуанкаре [2] приводит к выводу, что периодические решения этой системы, обращающиеся при $\mu = 0$ в решения (4), могут соответствовать лишь тем значениям постоянных α_s, которые удовлетворяют уравнениям

$$P_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+2m}) \equiv \int_0^{2\pi} F_s(x_1^0, \ldots, x_l^0, 0, t)\, e^{-\lambda_s t}\, dt = 0, \quad s = 1, \ldots, k + 2m. \tag{5}$$

Каждой системе значений $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma^*$, удовлетворяющей (5), действительно соответствует одно единственное аналитическое относительно μ (при достаточно малых значениях μ) периодическое решение уравнений (1), если

$$\left[\frac{\partial P_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+2m})}{\partial(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+2m})} \right]_{\alpha_\sigma = \alpha_\sigma^*} \neq 0. \tag{6}$$

Обращаясь к исследованию устойчивости периодических решений, докажем следующую теорему.

Теорема. *Если для определенной системы значений постоянных* α_σ^*, *удовлетворяющих уравнениям* (5), *вещественные части всех корней* $\varkappa$ *алгебраических уравнений* ($\delta_{s\sigma}$ — *символ Кронекера*)

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_\sigma} - \delta_{s\sigma} \varkappa \right| = 0; \quad s, \sigma = 1, \ldots, k + 2m; \tag{7}$$

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_s(x_1^0, \ldots, x_l^0, 0, t)}{\partial x_\sigma^0}\, dt - \delta_{s\sigma} \varkappa \right| = 0; \tag{8}$$

$$s, \sigma = k + 2m + 2(n_1 + \ldots + n_{\nu-1}) + 1, \ldots, k + 2m + 2(n_1 + \ldots + n_{\nu-1}) + n_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, r)$$

отрицательны, то при достаточно малых μ *этой системе постоянных соответствует одно единственное, аналитическое относительно* μ *и асимптотически устойчивое периодическое решение уравнений* (1), *обращающееся при* $\mu = 0$ *в решение* (4). *Если вещест-*

венная часть хотя бы одного из корней уравнений (7) — (8) *положительна, то соответствующее решение неустойчиво; при наличии чисто мнимых или нулевых корней необходимо дополнительное исследование.*

Доказательство. Воспользуемся характеристическим уравнением системы уравнений в вариациях в форме Пуанкаре (2)

$$D \equiv \left| \frac{\partial \psi_s}{\partial \beta_\sigma} + 1 - \delta_{s\sigma}\rho \right|_{\beta_\sigma = \beta_\sigma(\mu)} = 0, \quad s, \sigma = 1, \ldots, l. \tag{9}$$

Здесь $\psi_s = \psi_s(\beta_1, \ldots, \beta_l, \mu) = x_s(2\pi, \beta_1, \ldots, \beta_l, \mu) - x_s(0, \beta_1, \ldots, \beta_l, \mu)$, где $x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_l, \mu)$ — решение уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям $x_s(0, \beta_1, \ldots, \beta_l, \mu) = x_s^0(t) + \beta_s$. В качестве величин β_σ в уравнение (9) должны быть подставлены функции $\beta_\sigma = \beta_\sigma(\mu)$, найденные из условий периодичности $\psi_s = 0$ $(s = 1, \ldots, l)$ решения x_s; для каждой системы значений $\alpha_s = \alpha_s^*$, удовлетворяющей (5) и (6), $\beta_\sigma(\mu)$ определяются единственным образом и являются аналитическими при достаточно малом μ. Разыскивая $x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_l, \mu)$ в виде рядов по β_σ и μ, найдем:

$$\psi_s = (e^{2\pi\lambda_s} - 1)\beta_s + \mu P_s + \mu \sum_{\sigma=1}^{l} C_{s\sigma}\beta_\sigma + D_s\mu^2 + \ldots, \tag{10}$$

где, в частности,

$$C_{s\sigma} = \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_\sigma}; \quad \sigma, s = 1, \ldots, k + 2m;$$

$$C_{s\sigma} = e^{\pm 2\pi i N_\nu} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_s(x_1^0, \ldots, x_l^0, 0, t)}{\partial x_\sigma^0} dt; \tag{11}$$

$$\sigma, s = k + 2m + 2(n_1 + \ldots + n_{\nu-1}) + 1, \ldots, k + 2m + 2(n_1 + \ldots + n_\nu)$$
$$(\nu = 1, \ldots, r),$$

а невыписанные слагаемые имеют относительно μ и β_σ порядок выше второго.

При учете (10) уравнение (9) принимает вид:

$$D \equiv |(e^{2\pi\lambda_s} - \rho)\delta_{s\sigma} + \mu C_{r\sigma} + \ldots| = 0. \tag{12}$$

При $\mu = 0$ все недиагональные элементы определителя обращаются в нуль и уравнение (12) имеет корни $\rho_s = \rho_s^0 = e^{2\pi\lambda_s}$. Модули первых $k + 2(m + n)$ этих корней, согласно (2), равны единице, а прочих $l - k - 2(m + n)$ корней — меньше единицы. При μ достаточно малом модули этих последних корней, в силу непрерывности, останутся меньшими единицы, и вопрос об устойчивости сводится, таким образом, к изучению следующего приближения к первым $k + 2(m + n)$ корням.

Рассмотрим сначала k корней, которым соответствует $\lambda_s = 0$ и $\rho_s^0 = 1$. Заметим, что, в силу (2), (10) и (11), уравнение (12) можно представить в форме

$$D \equiv \left| (1 - \rho)\delta_{s\sigma} + \mu \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_\sigma} \right| \cdot \prod_{s=k+2m+1}^{l} (e^{2\pi\lambda_s} - \rho) + D^* = 0, \tag{13}$$

$$s, \sigma = 1, \ldots, k + 2m,$$

где функция D^* содержит в своем разложении по степеням μ и $(1 - \rho)$ лишь члены, не ниже $k + 2m + 1$-го порядка относительно совокупности

этих величин. Как нетрудно убедиться, например, при помощи схемы многоугольника Ньютона ([4]), все корни уравнения (13), обращающиеся в единицу при $\mu = 0$, являются аналитическими функциями μ при достаточно малых его значениях, и поэтому их можно разыскивать в виде рядов $\rho = 1 + \mu\varkappa + \ldots$ Подставив последнее выражение в (13), будем иметь:

$$D = \mu^{k+2m} \left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_\sigma} - \delta_{s\sigma}\varkappa \right| \cdot \prod_{s=k+2m+1}^{l} (e^{2\pi\lambda_s} - 1) + \ldots = 0, \qquad (14)$$

где невыписанные слагаемые имеют относительно μ порядок не ниже $k+2m+1$-го. Из условия равенства нулю коэффициента при μ^{k+2m} в (14) получаем уравнение (7).

Аналогичным образом доказывается, что прочие критические корни уравнения (12) можно искать в виде рядов $\rho = e^{\pm 2\pi i N_\nu}(1 + \mu\varkappa + \ldots)$ $(\nu = 1, \ldots, r)$, а также что вещественные части величин $\varkappa$ в этих рядах совпадают с вещественными частями корней уравнений (8). Но при достаточно малом μ условия устойчивости $|\rho| < 1$ для критических корней эквивалентны условиям $\mathrm{Re}\,\varkappa < 0$, а условия $|\rho| > 1$ — неравенствам $\mathrm{Re}\,\varkappa > 0$; при $\mathrm{Re}\,\varkappa = 0$ для суждения об устойчивости необходимо знать $|\rho|$ с точностью до членов с μ^2. Если теперь заметить, что неравенство нулю вещественных частей корней уравнения (7) обеспечивает выполнение условия И. Г. Малкина (6), то теорему следует считать доказанной. Таким образом, исследование устойчивости сведено к задаче Гурвитца для алгебраических уравнений, коэффициенты которых выражаются непосредственно через правые части первых $k+2m$ уравнений (1).

Научно-исследовательский и проектный институт
механической обработки полезных ископаемых

Поступило
17 VII 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Блехман, Инж. сборн., **16**, 49 (1953). [2] И. Г. Малкин, Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, 1949. [3] С. Н. Шиманов, Прикладн. матем. и мех., **16**, в. 2, 129 (1952). [4] Н. Г. Чеботарев, Собр. соч., **3**, 1950.