Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. С. БАХВАЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ВОПРОСУ О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 VII 1955)

§ 1. Об устойчивости конечноразностных схем. Рассмотрим процесс интегрирования уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

при начальном условии $y(x_0) = y_0$ при помощи экстраполяционных формул.

В этом случае приближенные значения $\bar{y}_m$ величин $y_m = y(x_m)$ $(x_m = x_0 + mh,\ m = 1, 2, \ldots, n)$ находятся каким-либо специальным способом при $m = 1, 2, \ldots, k$, а при $m > k$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$\bar{y}_{m+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\bar{y}_{m-\lambda} + h\sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_{m-\lambda}) + \beta_{m+1}, \tag{2}$$

где β_{m+1} — «ошибка округления».

«Принципиальная ошибка метода» (см., например, [3]) при гладкой $f(x, y)$, как нетрудно убедиться, есть $O(h^s)$, если для всех многочленов степени $s - 1$ справедливо

$$P(x_{m+1}) = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} P(x_{m-\lambda}) + h\sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} P'(x_{m-\lambda}) \tag{3}$$

(см., например, [1]).

В случае метода Адамса $s = k + 2$. При фиксированном k подбором $u_{-\lambda}$ и $v_{-\lambda}$ можно получить методы с более высоким порядком «принципиальной ошибки метода». Однако имеет место следующая теорема:

Теорема. *Если* $k \leqslant 10$ *и соотношение* (3) *выполняется для всех многочленов степени* $k + 2$, *то решение разностного уравнения* (2) *является неустойчивым относительно «ошибок округления».*

Для доказательства теоремы достаточно показать (см., например, [2]), что среди корней уравнения

$$\mu^{k+1} - \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\mu^{k-\lambda} = 0 \tag{4}$$

хотя бы один по модулю больше 1.

Вследствие очевидного равенства $\sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} = 1$ уравнение (4) имеет корень, равный 1. Разделив (4) на $\mu - 1$, получим уравнение

$$\mu^k + \sum_{\lambda=1}^{k} \sigma_\lambda \mu^{k-\lambda} = 0, \tag{5}$$

где

$$\sigma_\lambda = \sum_{\alpha=\lambda}^{k} u_{-\alpha}. \tag{6}$$

Введем далее функцию $\psi_k(x) = \prod_{j=0}^{k} (x+j)$ и подставим в (3) $P(x) = \int_0^x \psi_k(x)\,dx$, положив в последнем $h = 1$ и $x_m = 0$. Получим

$$\int_0^1 \psi_k(x)\,dx = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} \int_0^{-\lambda} \psi_k(x)\,dx.$$

Отсюда и из (5) нетрудно получить

$$2\int_0^1 \psi_k(x)\,dx = \int_0^1 \psi_k(x)\,dx + \sum_{\lambda=1}^{k} \sigma_\lambda \int_{-\lambda+1}^{-\lambda} \psi_k(x)\,dx. \tag{7}$$

Если ни один из корней (5) по модулю не превосходит 1, то, на основании теоремы Виета, $|\sigma_\lambda| \leqslant c_k^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$.

Тогда

$$\left| \int_0^1 \psi_k(x)\,dx + \sum_{\lambda=1}^{k} \sigma_\lambda \int_{-\lambda+1}^{-\lambda} \psi_k(x)\,dx \right| \leqslant \int_0^1 |\bar{\Delta}^k \psi_k(x)|\,dx = \frac{(k+1)!}{2}, \tag{8}$$

так как $\bar{\Delta}\psi_j(x) = \psi_j(x) - \psi_j(x-1) = (j+1)\,\psi_{j-1}(x)$.

Воспользовавшись очевидным при $j > 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$ неравенством $(j+x) \geqslant (j+1)\,e^{\frac{x-1}{j}}$, получим

$$2\int_0^1 \psi_k(x)\,dx \geqslant (k+1)! \int_0^1 x(1+x) \exp\left[\left(\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j}\right)(x-1)\right] dx.$$

Так как $\sum_{j=2}^{10} \frac{1}{j} < 2$, то

$$2\int_0^1 \psi_k(x)\,dx > (k+1)! \int_0^1 x(1+x)\,e^{2(x-1)}\,dx = \frac{(k+1)!}{2}. \tag{9}$$

Из противоречивости (7), (8) и (9) следует, что среди корней (5), а следовательно, и (4) есть корни, по модулю большие 1. Теорема доказана.

§ 2. Оценка ошибки численного интегрирования в случае, когда в некоторой окрестности решения все $u_{-\lambda} + hv_{-\lambda} f_y(x, y)$ неотрицательны. Очевидно, что при этом условии $u_{-\lambda} \geqslant 0$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, k)$, и поэтому $\sum_{\lambda=0}^{k} |u_{-\lambda}| = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} = 1$. Отсюда не-

трудно получить, что уравнение (4) не имеет корней, по модулю бо́льших 1, и кратных корней, по модулю равных 1. Для таких методов в работе [2] доказывается сходимость и дается оценка величины ошибки численного интегрирования. В этом параграфе мы уточним даваемую там оценку.

Обозначим: через $\bar{y}_m(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $\bar{y}_m(x_m) = \bar{y}_m$; $\min \bar{y}_{m-\lambda}(x)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, k)$ — через $\bar{y}_{m,1}(x)$; $\max \bar{y}_{m-\lambda}(x)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, k)$ — через $\bar{y}_{m,2}(x)$.

В силу сходимости существуют такие $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$, что при достаточно малом h при $a \leqslant x \leqslant b$ (где $a = x_0$) удовлетворяются неравенства

$$Y_1(x) \leqslant y(x) \leqslant Y_2(x),$$

$$Y_1(x) \leqslant \bar{y}_m(x) \leqslant Y_2(x) \quad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

и при $Y_1(x) \leqslant y \leqslant Y_2(x)$

$$u_{-\lambda} + hv_{-\lambda} f_y(x, y) \geqslant 0 \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, k). \tag{10}$$

Положим

$$\rho_{m,i} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} \bar{y}_{m,i}(x_{m-\lambda}) +$$

$$+ h \sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_{m,i}(x_{m-\lambda})) - \bar{y}_{m,i}(x_{m+1}) \quad (i = 1, 2). \tag{11}$$

Ясно, что при гладкой $f(x, y)$ величины $\rho_{m,1}$ и $\rho_{m,2}$ мало отличаются от «принципиальной ошибки метода». Вычитая (11) из (2) и используя (10), получим

$$\bar{y}_{m,1}(x_{m+1}) + \rho_{m+1,1} + \beta_{m+1} \leqslant \bar{y}_{m+1} \leqslant \bar{y}_{m,2}(x_{m+1}) + \rho_{m+1,2} + \beta_{m+1}. \tag{12}$$

Обозначим $\max |\bar{y}_j(x_m) - y_m| (j = 0, 1, \ldots, m)$ через S_m, $\max |\rho_{m,i}| + |\beta_m|$ $(i = 1, 2)$ через γ_m. Если при $a \leqslant x \leqslant b$, $Y_1(x) \leqslant y \leqslant Y_2(x)$ имеет место неравенство

$$f_y(x, y) \leqslant A(x),$$

то из (12) нетрудно получить

$$S_{m+1} \leqslant S_m \exp\left[\int_{x_m}^{x_{m+1}} A(x)\,dx\right] + \gamma_{m+1}.$$

Отсюда по индукции (от m к $m+1$) получаем

$$|\bar{y}_n - y(x_n)| \leqslant S_k \exp\left[\int_{x_k}^{x_n} A(x)\,dx\right] + \sum_{m=k+1}^{n} \gamma_m \exp\left[\int_{x_m}^{x_n} A(x)\,dx\right]. \tag{13}$$

Из (13) можно получать более простые оценки; например, если $|f_y(x, y)| \leqslant \alpha$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $Y_1(x) \leqslant y \leqslant Y_2(x)$, $|\gamma_m| < \varepsilon$ $(m = k+1, k+2, \ldots, n)$; $S_k < \varepsilon$,

$$|\bar{y}_n - y(x_n)| \leqslant \varepsilon n \frac{e^{\alpha(x_n - x_0)} - 1}{\alpha(x_n - x_0)}.$$

При интегрировании по интерполяционным формулам вида

$$\bar{y}_{m+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\bar{y}_{m-\lambda} + h\sum_{\lambda=-1}^{k} v_{-\lambda}f(x_{m-\lambda},\ \bar{y}_{m-\lambda}) + \beta_{m+1}$$

при условиях (10) и $|v_{-1}|\alpha h < 1$ аналогичным образом можно получить оценку

$$|\bar{y}_n - y(x_n)| \leqslant \frac{1}{1-|v_{-1}|\alpha h}\varepsilon n\frac{e^{\alpha(x_n-x_0)}-1}{\alpha(x_n-x_0)}.$$

Примерами таких формул являются:

при $f_y(x, y) \leqslant 0$ и $h \leqslant \frac{3}{4\alpha}$

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h[{}^5/_{12}f(x_{n+1},\ \bar{y}_{n+1}) + {}^4/_3 f(x_n,\ \bar{y}_n) - {}^1/_{12}f(x_{n-1},\ \bar{y}_{n-1})];$$

при $f_y(x,\ y) \geqslant 0$ и $h \leqslant \frac{3}{2\alpha}$

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_{n-1} + h[{}^7/_3 f(x_n,\ \bar{y}_n) - {}^2/_3 f(x_{n-1},\ \bar{y}_{n-1}) + {}^1/_3 f(x_{n-2},\ \bar{y}_{n-2})];$$

при $f_y(x,\ y) \geqslant 0$ и $h \leqslant \frac{3}{\alpha}$

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_{n-1} + h[{}^1/_3 f(x_{n+1},\ \bar{y}_{n+1}) + {}^4/_3 f(x_n,\ \bar{y}_n) + {}^1/_3 f(x_{n-1},\ \bar{y}_{n-1})].$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 VI 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Э. Милн, Численный анализ, ИЛ, 1951. [2] М. Р. Шура-Бура, Прикладн. матем. и мех., № 5, 575 (1952). [3] Н. С. Бахвалов, ДАН, **104**, № 5 (1955).