Доклады Академии наук СССР
1955. Том 103, № 5

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

В. М. ОСТИАНУ

О СИНТЕЗЕ КОНТАКТНЫХ СХЕМ С ШАГОВЫМИ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЯМИ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 9 IV 1955)

1. В теории релейно-контактных схем ([1,3]) разработан ряд алгебраических методов синтеза и преобразования релейно-контактных схем, в том числе метод универсальных многополюсников. Этот метод предложен К. Э. Шенноном ([4]) для релейно-контактных двухполюсников и распространен Г. Н. Поваровым ([6]) на случай релейно-контактных $(1, k)$-полюсников и симметрических релейно-контактных схем. Этот же метод применен Э. Н. Гильбертом ([7]) к синтезу контактных двухполюсников с шаговыми переключателями.

В настоящей заметке дается новый вариант метода универсальных многополюсников, применимый к синтезу контактных схем с шаговыми переключателями (p, q)-полюсников общего вида и симметрических (p, q)-полюсников *. При этом используется описываемая здесь предикативная алгебра. Это исчисление алгебраизирует исчисление одноместных предикатов без кванторов, конструируемое над исчислением высказываний с основными связями &, v, $^-$ ([8]).

2. Рассматриваются контактные (p, q)-полюсники n-шаговых переключателей $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Каждое контактное поле переключателя X_i имеет l_i ламелей и обслуживается одной щеткой **. Без ограничения общности можно считать, что все щетки одного переключателя движутся синфазно и что l_i удовлетворяют неравенствам $l_1 \geqslant l_2 \geqslant l_3 \geqslant \ldots \geqslant l_n$. Структурная проводимость схемы между двумя полюсами будет алгебраически изображаться функцией $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающей значения 0 и 1. Значение 0 соответствует разомкнутой цепи, значение 1 — замкнутой цепи. Аргумент x_i функции передает состояние переключателя X_i и принимает l_i значений $0, 1, 2, \ldots, l_i - 1$. Такие функции мы будем называть предикативными. При $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = 2$ они обращаются в булевы функции.

Условия проводимости (p, q)-полюсника будут изображаться (p, q)-матрицей $\| f_{ij} \|$ предикативных функций, где f_{ij} есть полная проводимость между i-м входом и j-м выходом. (p, q)-матрица предикативных функций есть матрица полных проводимостей тогда и только тогда, когда она транзитивна. Матрицу $\| f_{ij} \|$ мы называем транзитивной, если при любых i, j, k из $f_{ij} = f_{jk} = 1$ следует $f_{ik} = 1$. Схему с элементами $X_1, \ldots, X_n$ будем называть также схемой переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Параллельное соединение двухполюсников с проводимостями f и g дает двухполюсник с проводимостью $f + g$, последовательное соединение — двухполюсник с проводимостью fg, где $+$ есть булево сложение, а $\cdot$ есть булево умножение. Двухполюсник с проводимостью $\bar{f}$ называется инверсией двухполюсника с проводимостью f.

* Схемы с шаговыми переключателями имеют важное применение во многих отраслях промышленной автоматики.

** Таким образом, переключатель X_i может находиться в одной из l_i позиций состояний).

Обозначим контакт между щеткой и j-й ламелью переключателя X_i через x_i^j. Тогда $x_i^j = 1$ при $x_j = i$ и $x_i^j = 0$ при $x_j = i$ *.

Любая предикативная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ однозначно представима в виде $f = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} f(j_1, j_2, \ldots, j_n)\, x_1^{j_1}, x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}$. Множители $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n}$ можно назвать обобщенными конституентами единицы. Их число равно 2^H, где $H = \sum_{i=1}^{n} \log_2 l_i$.

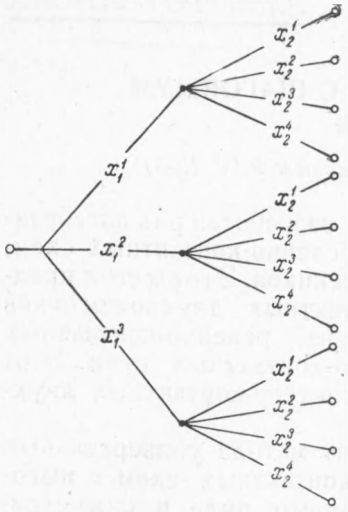

Рис. 1

В схемах с шаговыми переключателями условимся обозначать контакты между ламелями и скользящей по ним щеткой в виде присвоенных контактам букв, написанных в разрывах линии (рис. 1).

3. В общем случае назовем (p, q)-полюсник квазиразделительным, если любой путь из выхода i в выход j, где $i \neq j$, проходит хотя бы через один вход. Разделительные (p, q)-полюсники (6) всегда квазиразделительны. Пучком q $(1, k)$-полюсников будет называться $(1, kq)$-полюсник, состоящий из q $(1, k)$-полюсников, входы которых соединены (рис. 2). Пучок квазиразделительных $(1, k)$-полюсников есть квазиразделительная схема.

Контактное дерево n-многозначных переменных (рис. 1, где $n = 2$, $l_1 = 3$, $l_2 = 4$) реализует обобщенные конституенты единицы и содержит 2^{H+1} электрических контактов **. Дерево всегда разделительно и тем самым всегда квазиразделительно. Квазиразделительный универсальный многополюсник (к.у.м.) n переменных можно построить, соединяя выходы двухполюсников, реализующих все предикативные функции n переменных. Так построенный к.у.м. мы будем называть к.у.м.'ом 1-го рода. К.у.м. 1-го рода содержит не более

$$\frac{2l_1 \ldots l_n (l_1 + 1/2)}{\log_2 l_1 \ldots l_n - 2 \log_1 \log_2 l_1 \ldots l_n} 2^{l_1 \ldots l_n}$$

контактов. К.у.м.'ом 2-го рода мы будем называть пучок $2^{l_1 \ldots l_n}$ деревьев. Он содержит не более $2^{l_1 l_2 \ldots l_n} 2^{H+1}$ контактов.

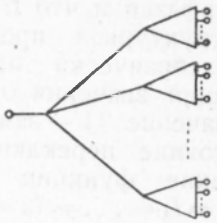

Рис. 2

Теорема 1. *Любую транзитивную (p, q)-матрицу $\| f_{ij} \|$ предикативных функций можно реализовать при любом m, $0 \leqslant m \leqslant n$, соединением p пучков по q деревьев $n - m$ многозначных переменных и q к.у.м. остальных m переменных.*

В самом деле, перенумеруем деревья каждого пучка числами $1, 2, \ldots, q$ и затем для всех i соединим выходы j-го дерева i-го пучка со входами j-го к.у.м. (рис. 3) согласно формулам разложения функций f_{ij}. Тогда, в силу теоремы Г. Н. Поварова (6), пути, пересекающие

* В обозначении М. А. Гаврилова (3) символу x^j соответствует $x_{\text{п}_j}$, в обозначении В. И. Шестакова (2) ему соответствует $\vdash_j x$, в обозначениях Э. Н. Гильберта (7) ему соответствует $e_j(x)$.

** И столько же ламелей.

линию раздела L один раз, реализуют функцию f_{ij}, а в силу квазиразделительности к.у.м. и пучков деревьев и транзитивности матрицы $\|f_{ij}\|$ любой путь, пересекающий линию раздела более одного раза, дублируется путем, пересекающим линию раздела один раз.

Теорема 1 дает метод синтеза (p, q)-полюсников, представляющий собой дальнейшее развитие метода универсальных многополюсников. Его можно назвать методом к.у.м.

Теорема 2. *Число контактов в (p, q)-полюснике, построенном по методу к.у.м.,* не превосходит

$$\frac{pq \cdot 2^{H+1}(l_1+1)}{\log_2 p + H - 2\log_2[\log_2 p + H - 2\log_2(l_1+1)]}. \qquad (*)$$

Однако в случае $(1, k)$- или $(k, 1)$-полюсников вместо к.у.м. выгоднее применить метод универсальных многополюсников ([6]), легко распространимый на случай схем с шаговыми переключателями. Если к синтезу (p, q)-полюсников применить метод синтеза N-полюсников, то число контактов в схеме не превзойдет

$$\frac{pq \cdot 2^{H+1}(l_1+1/2)}{\log_2 l_1 \ldots l_n - 2\log_2 \log_2 l_1 \ldots l_n}. \qquad (**)$$

Из сравнения (*) и (**) видно, что при больших p метод к.у.м. выгоднее.

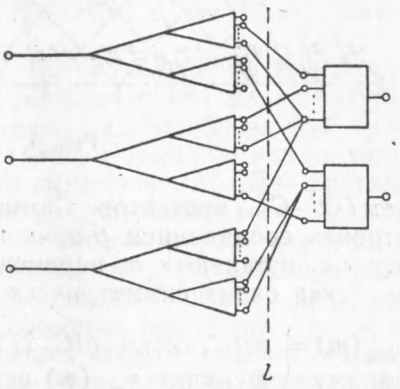

Рис. 3

4. Симметрической предикативной функцией n переменных называется предикативная функция, которая переходит в себя при любой перестановке аргументов. В случае симметрической функции $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l$. При $l = 2$ симметрические функции рассматривались К. Э. Шенноном ([4,5]), К. Ёлером ([9]), С. Х. Уошберном ([10]), М. А. Гавриловым ([3]), Г. Н. Поваровым ([6]) и др. (p, q)-полюсник, реализующий симметрические функции, назовем симметрическим. Кортежем значений n l-значных переменных назовем кортеж $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1})$, где α_i — число переменных, принимающих значение i. Аналогично будем говорить о кортеже состояний n l-позиционных переключателей. Число всех кортежей значений n l-значных переменных равно $T = C^{l-1}_{n+l-1} = C^{n}_{n+l-1}$. По заданному кортежу состояний приемных элементов симметрического двухполюсника всегда можно определить, замкнут или разомкнут симметрический двухполюсник. Назовем рабочим кортежем симметрического двухполюсника (симметрической функции) такой кортеж значений его (ее) аргументов, при котором симметрический двухполюсник замкнут (симметрическая функция $f = 1$).

Так как любой кортеж может быть рабочим, то существует ровно 2^T различных симметрических функций n переменных.

5. Элементарная симметрическая функция (э.с. функция, э.с.ф.) n переменных есть симметрическая функция ровно с одним рабочим кортежем. Существует T э.с.ф. n переменных. Всякая симметрическая функция n переменных однозначно разлагается в сумму э.с-функций. Решетка э.с.-функций (р.э.с.ф.) есть разделительный $(1, T)$-полюсник, реализующий между своим единственным входом и T выходами все э.с.ф.

Пусть Ψ^n_l — пирамида в l-мерном эвклидовом пространстве E_l, имеющая своей вершиной начало координат, а ребрами, исходящими

из этой вершины, — отрезки координатных осей длины n, отложенные в положительном направлении. Все целочисленные точки $\gamma \in E_l$ лежат в гиперплоскостях A_l *, где A_l определяется точками $(i, 0, \ldots, 0)$, $(0, i, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, i)$ **. Р.э.с.ф. $n+1$ переменных можно изобразить как часть решетки точек $\gamma \in E_l$, высеченную пирамидой Ψ_l^n, где каждая $\gamma \in A_l$ заменена щеткой переключателя X_{l+1}, а на каждом из l лучей, соединяющем эту γ с A_{l+1}, помещено по одной ламели переключателя X_{l+1}. Такую решетку можно начертить на плоскости (рис. 4). Р.э.с.ф. n переменных содержит $l \cdot C_{n+l}^{l}$ контактов. К.у.м. симметрических предикативных функций (к.у.м.с.) содержит не более чем $l \cdot 2^T \cdot C_{n+l}^{l}$ контактов. Симметрический (p, q)-полюсник можно построить соединением p пучков по q р.э.с.ф. $n-m$ переменных и q к.у.м.с. остальных m переменных, $0 \leqslant m \leqslant n$ (метод к.у.м.с.).

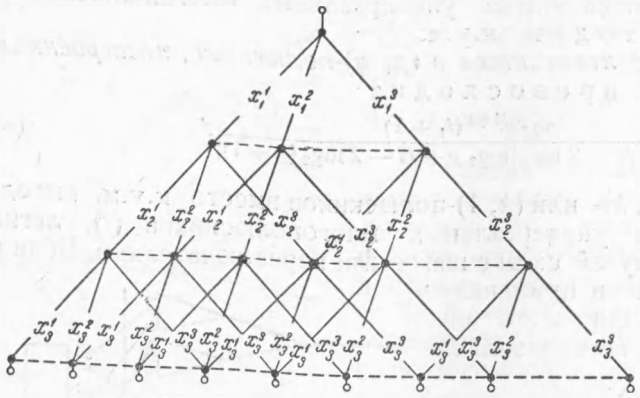

Рис. 4

Такая схема симметрического (p, q)-полюсника содержит не более $\varphi_{\text{сим}}(m) = pqlC_{n-m+l}^{l} + qlC_{m+l}^{l} 2^{C_{m+l-1}^{l-1}}$ контактов. Точка целочисленного минимума функции $\varphi_{\text{сим}}(m)$ находится из неравенства:

$$-p(n-m+l-1)C_{n-m+l-1}^{l} + C_{m+l}^{l} 2^{C_{m+l-1}^{l-1}} \left[(m+l-1) 2^{(m+l-1) C_{m+l-1}^{l-1}} - 1\right] \leqslant 0.$$

Теорема 3. *При достаточно большом n число контактов в схеме, построенной методом к.у.м.с., не превосходит*

$$\frac{q}{(l-1)!}\left(n - \sqrt[l-1]{(l-1)\log_2 \frac{n - \sqrt[l-1]{(l-1)\log_2(n+2l+1)} + 2l + 1}{\sqrt[l-1]{(l-1)\log_2(n+2l+1)}} + 2l + 1}\right)^{l} (p+\varepsilon).$$

В заключение автор выражает благодарность проф. М. А. Гаврилову за помощь и внимание и Г. Н. Поварову за внимание и первоначальную постановку задачи.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
8 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Шестаков, Автоматика и телемеханика, **11**, № 2, 15 (1941). [2] В. И. Шестаков, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, № 6, 529 (1946). [3] М. А. Гаврилов, Теория релейно-контактных схем, М.—Л., 1950. [4] C. E. Shannon, BSTJ, **28**, No. 1, 59 (1949). [5] C. E. Shannon, Trans. AIEE, **57**, 713 (1938). [6] Г. Н. Поваров, ДАН, **94**, № 6, 1075 (1954). [7] E. N. Gilbert, BSTJ, **30**, No. 3, 668 (1950). [8] Д. Гильберт, В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, 1947. [9] K. Oehler, Bull. d. Sweizerischen Elektrotechn. Vereins, **37**, No 11, 298 (1946). [10] S. H. Washburn, Trans. AIEE, **68**, part 1, 582 (1949).

* Гиперплоскости A_l параллельны основанию пирамиды.

** Целочисленной решеткой будем называть множество точек с целочисленными координатами и множество отрезков, параллельных осям координат и соединяющих каждые две соседние точки первого множества. Под соседними точками здесь понимаются точки, различающиеся только одной своей координатой, причем разность значений различающихся координат равна единице.