Доклады Академии наук СССР
1955. Том 104, № 5

ФИЗИКА

В. З. БЛАНК

ПОВЕДЕНИЕ ГРИНОВСКОЙ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОНА ПРИ МАЛЫХ ИМПУЛЬСАХ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 26 IV 1955)

Как известно, в квантовой электродинамике наряду с фундаментальными расходимостями при больших импульсах встречаются также расходимости при малых импульсах. Появление этих расходимостей связано с неправильным применением теории возмущений. Поэтому большой интерес представляет изучение поведения гриновских функций при малых импульсах не методом теории возмущений. Цель этой заметки заключается в получении асимптотической формулы для гриновской функции электрона при $k^2 \approx m^2$.

Рассмотрим уравнение для электронной функции Грина (1)

$$\left\{i\hat{\partial} - m - \sqrt{4\pi}\, e\hat{A}(x) - i\sqrt{4\pi}\, e\int \gamma_\beta \mathscr{D}_{\beta\alpha}(\xi, x \mid A)\frac{\delta}{\delta A_\alpha(\xi)}d\xi\right\} G(x, y \mid A) = \\ = -\delta(x-y). \qquad (1)$$

Вследствие однородности пространства — времени уравнение (1) инвариантно относительно трансляций:

$$G(x, y \mid A) = G(y - x \mid T_x A), \quad \mathscr{D}(\xi, x \mid A) = \mathscr{D}(\xi - x \mid T_x A),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} G(y - x \mid T_x A) = \left\{\frac{\partial G(v - x \mid A)}{\partial x} + \int \frac{\partial A_\alpha(\xi)}{\partial \xi}\frac{\delta}{\delta A_\alpha(\xi)}d\xi\, G(y - x \mid A)\right\}_{A \to T_x A},$$

где T_x — оператор сдвига, $T_x A(\xi) = A(\xi - x)$.

Это позволяет получить в импульсном пространстве гриновскую функцию, зависящую только от одного импульса. Переходя к импульсному представлению, получаем следующее уравнение:

$$\left\{\hat{k} + \hat{\Pi} - \frac{e\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^2}\int \hat{A}(p)\, dp - \right.$$

$$\left. - \frac{ie\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^2}\int \gamma_\beta \mathscr{D}_{\beta\alpha}(p \mid A)\frac{\delta}{\delta A_\alpha(p)}dp - m\right\} G(k \mid A) = -1, \qquad (2)$$

$$\hat{\Pi} = \int \hat{p} A_\alpha(p)\frac{\delta}{\delta A_\alpha(p)}dp.$$

Мы будем рассматривать одночастичное приближение, пренебрегая замкнутыми петлями. Гриновскую функцию фотона $\mathscr{D}_{\beta\alpha}(p \mid A)$ выберем в форме, предложенной Л. Д. Ландау (2), положив в ней

$$\mathscr{D}_{\beta\alpha}(p \mid A) = \left(g^{\alpha\beta} - \frac{g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta} p^\alpha p^\beta}{p^2}\right) D(p),$$

где

$$D(p) = -\frac{1}{p^2}, \qquad g^{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \\ 1 \text{ при } \alpha = \beta = 0, \\ -1 \text{ при } \alpha = \beta = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Ренормируем уравнение (2). В одночастичном приближении перенормировка заряда отсутствует. Перенормировку массы произведем позднее. Будем искать $G_{\text{рен}}(k \mid A)$ в виде $G_{\text{рен}}(k \mid A) = (\hat{k} + \hat{\Pi} + m)\,\Delta(k \mid A)$. Для $\Delta(k \mid A)$ получаем уравнение

$$\left\{\hat{k} + \hat{\Pi} - m - \frac{e\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^2}\int \hat{A}(p)\,dp - \right.$$
$$\left. - \frac{ie\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^2}\int \gamma_{\mathscr{S}}(p)\frac{\delta}{\delta A(p)}\,dp\right\}(\hat{k} + \hat{\Pi} + m)\,\Delta(k \mid A) = -Z^{-1}. \qquad (3)$$

При решении этого уравнения воспользуемся методом собственного времени ([3]). $\Delta(k \mid A)$ ищется в виде интеграла по собственному времени $\Delta(k \mid A) = -i\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon\nu}U_\nu(k \mid A)\,d\nu$, $\varepsilon > 0$, и для $U_\nu(k \mid A)$ получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$-i\frac{\partial U_\nu(k \mid A)}{\partial \nu} = HU_\nu(k \mid A) \qquad (4)$$

с начальным условием $U_\nu(k \mid A) = -Z^{-1}$ при $\nu = 0$; H — оператор, стоящий в левой части уравнения (3).

В уравнении (4) можно избавиться от вариационных производных. Положим $\delta U_\nu(k \mid A)/\delta A_\alpha(p) = \tau_\alpha(\nu, k, p \mid A)\,U_\nu(k \mid A)$. Уравнение, которому удовлетворяет $\tau_\alpha(\nu, k, p \mid A)$ легко получить, взяв вариационную производную от уравнения (4). После простых преобразований получаем

$$-i\frac{\partial \tau_\alpha(\nu)}{\partial \nu} = H\tau_\alpha(\nu) - \tau_\alpha(\nu)\,H + \frac{\delta H}{\delta A_\alpha(p)}. \qquad (5)$$

Так как, в конечном счете, нас будет интересовать $\Delta(k \mid 0)$, то сохраним в H только члены, линейные по A, т. е. будем считать, что $\tau_\alpha(\nu, k, p)$ не зависит от A. Это находится в соответствии с начальным условием для $\tau_\alpha(\nu)$, ибо $\tau_\alpha(0) = 0$. В результате уравнение (5) очень упрощается. Сохраняя в нем только члены второго порядка малости по e, получим

$$i\frac{\partial \tau_\alpha(\nu, k, p)}{\partial \nu} = (p^2 + 2pk)\,\tau_\alpha(\nu, k, p) + \frac{\sqrt{4\pi}\,e}{(2\pi)^2}\gamma_\alpha(\hat{k} + m). \qquad (6)$$

Такое рассмотрение, однако, непригодно для получения асимптотического поведения гриновской функции при больших импульсах. В этом случае член $\iint \hat{p}_1\hat{p}_2 A_\alpha(p_1)\,A_\beta(p_2)\frac{\delta}{\delta A_\alpha(p_1)}\frac{\delta}{\delta A_\beta(p_2)}\,dp_1\,dp_2$ играет в H существенную роль. Но оно оказывается достаточным для исследования поведения при малых импульсах.

Решая уравнение (6), находим

$$\tau_\alpha(\nu, k, p) = \frac{e^{i(p^2+2pk)\nu} - 1}{p^2 + 2pk}\frac{\sqrt{4\pi}\,e}{(2\pi)^2}\gamma_\alpha(\hat{k} + m).$$

Подставляя найденное значение $\tau_\alpha(\nu, k, p)$ в оператор H, получим

$$H = k^2 - m^2 + \frac{\sqrt{4\pi}\,e}{(2\pi)^2}\gamma_\alpha(\hat{k}+m)\int A_\alpha(p)\,e^{i(p^2+2pk)\nu}\,dp + \\ + i\frac{4\pi e^2}{(2\pi)^4}\gamma_\beta\int(\hat{k}+\hat{p}+m)\,\mathscr{D}_{\beta\alpha}(p)\,\gamma_\alpha(\hat{k}+m)\,\frac{e^{i(p^2+2pk)\nu}-1}{p^2+2pk}\,dp,$$

откуда для $\Delta(k)$ получается выражение

$$\Delta(k\,|\,0) = iZ^{-1}\int_0^\infty e^{-\varepsilon\nu}\cdot e^{i(k^2-m^2)\nu+\Phi(\nu)}\,d\nu, \qquad (7)$$

где

$$\Phi(\nu) = -i\frac{4\pi e^2}{(2\pi)^4}\int_0^\nu d\nu\int_0^\nu F(\nu)\,d\nu,$$

$$F(\nu) = \gamma_\beta\int(\hat{k}+\hat{p}+m)\,\mathscr{D}_{\beta\alpha}(p)\,\gamma_\alpha(\hat{k}+m)\,e^{i(p^2+2pk)\nu}\,dp.$$

$F(\nu)$ легко вычисляется при помощи замены

$$D(p) = i\int_0^\infty e^{i(p^2+i\varepsilon)\alpha}\,d\alpha; \qquad \frac{D(p)}{p^2} = \int_0^\infty \alpha e^{i(p^2+i\varepsilon)\alpha}\,d\alpha, \quad \varepsilon > 0.$$

Производя вычисления, получаем

$$F(\nu) = \frac{3i\pi^2 m}{\nu^2 k^2}(\hat{k}+m)(e^{-i\nu k^2}-1).$$

Рассматриваем $k^2 \approx m^2$,

$$\Phi(\nu) \approx \frac{3e^2}{2\pi}\left(\nu\int_0^\nu\frac{e^{-i\nu k^2}-1}{\nu^2}\,d\nu - \int_0^\nu\frac{e^{-i\nu k^2}-1}{\nu}\,d\nu\right).$$

При малых ν

$$\Phi(\nu) \approx -i\frac{3e^2}{(2\pi)^2}\nu k^2\ln\nu\lambda^2,$$

где λ^2 введено для ликвидации расходимости и впоследствии устремляется к бесконечности.

При больших ν

$$\Phi(\nu) \approx \frac{3e^2}{2\pi}\left(\ln\nu k^2 + i\nu k^2\ln\frac{k^2}{\lambda^2}\right).$$

Таким образом, в интеграле (7) наиболее существенны большие ν, которые и определяют поведение функции Грина при $k^2 \approx m^2$:

$$\Delta(k\,|\,0) \approx iZ^{-1}\int_{1/m^2}^\infty e^{-\varepsilon\nu}\cdot e^{i(k^2-m^2)\nu+\frac{3ie^2}{2\pi}\nu m^2\ln\frac{m^2}{\lambda^2}}\cdot(\nu k^2)^{\frac{3e^2}{2\pi}}\,d\nu.$$

Устремим λ^2 к бесконечности и произведем перенормировку массы $m^2 = m_1^2 + e^2\Delta m$, $\quad \Delta m = -m^2\frac{3}{2\pi}\ln\frac{\lambda^2}{m^2}$.

Делая замену переменных, получим

$$\Delta(k\,|\,0) \approx \frac{iZ^{-1}}{k^2-m_1^2}\frac{1}{(1-m_1^2/k^2)^\alpha}\int_{1/m^2}^\infty e^{-\frac{\varepsilon\mu}{k^2-m_1^2}}e^{i\mu}\,\mu^\alpha\,d\mu,$$

где $\alpha = 3e^2/2\pi$.

Выбирая

$$Z = i \int_{1/m^2}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon\mu}{k^2 - m_1^2} + i\mu} \mu^{\alpha} d\mu,$$

находим окончательную формулу

$$G_{\text{рен}}(k \mid 0) \approx \frac{\hat{k} + m_1}{k^2 - m_1^2} \frac{1}{(1 - m_1^2/k^2)^{\alpha}}. \qquad (8)$$

Аналогичный результат, но другим способом был получен А. А. Абрикосовым ([5]).

Таким образом, $G_{\text{рен}}(k \mid 0)$ имеет более сильную сингулярность, чем гриновская функция свободного поля, что находится в соответствии с результатами работы ([4]).

Заметим, что вершинная часть $\Gamma_{\text{рен}}(k, k+q, q)$, вычисленная при помощи формулы (8), стремится к нулю при $k, k+q \sim m$, т. е. для вероятности излучения одного длинноволнового фотона получается правильный результат, в то время как в обычной теории возмущений она оказывается равной бесконечности.

В заключение выражаю глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову, под руководством которого была выполнена эта работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 IV 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, 452 (1951). [2] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, 497 (1954). [3] В. А. Фок, Phys. Zs. Sowietunion, 12, 404 (1937). [4] M. Gell-Mann, F. Low, Phys. Rev., 95, 1300 (1954). [5] А. А. Абрикосов, Диссертация, М., 1955.