Доклады Академии наук СССР
1955. Том 102, № 5

ФИЗИКА

А. АХИЕЗЕР и Р. ПОЛОВИН

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАЗМЫ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 26 II 1955)

1. Рассмотрению нелинейных колебаний плазмы посвящена работа ([1]), в которой скорость электронов предполагается конечной, но существенно нерелятивистской. В настоящей статье мы не накладываем ограничений на величину скорости электронов плазмы, но, так же как и в ([1]), не учитываем температурных эффектов, т. е. предполагаем температуру плазмы равной нулю. Состояние плазмы можно при этом характеризовать не функцией распределения, а плотностью электронов, зависящей от координат и времени.

2. Мы будем рассматривать волновые движения бесконечной плазмы и будем поэтому предполагать, что плотность электронов n, а также все другие переменные величины (электрическое поле $\mathbf{E}$, скорость электронов $\mathbf{v}$) являются функциями линейной комбинации $z - Vt$, где V — скорость волны, распространяющейся вдоль оси z. Уравнения Максвелла для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и уравнения движения электрона приобретают при этом вид

$$[\mathbf{iE}'] = \beta\mathbf{H}', \quad [\mathbf{iH}'] = -\beta\mathbf{E}' + \frac{4\pi}{c} en\mathbf{v},$$
$$\mathbf{iE}' = 4\pi e(n - n_0), \quad (\mathbf{iv} - V)\,\mathbf{p}' = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}], \tag{1}$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — импульс электрона; $\mathbf{i}$ — единичный вектор вдоль оси z; $\beta = V/c$; n_0 — плотность ионов плазмы и штрих означает дифференцирование по $z - Vt$.

Используя систему (1), можно показать, что имеют место законы сохранения

$$\mathbf{pH} = \text{const}, \quad \frac{\beta}{8\pi}(E^2 + H^2) + \beta n_0 \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{i}[\mathbf{EH}] = \text{const}. \tag{2}$$

Кроме того, можно показать, что β должно быть больше единицы и что общая задача о волновых движениях плазмы, т. е. задача интегрирования (1), эквивалентна задаче о нерелятивистском движении частицы с массой, равной единице, в поле с потенциальной энергией

$$U = \omega_0^2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}\left[\beta\sqrt{\beta^2 - 1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \zeta\right], \tag{3}$$

где $\omega_0 = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$ и координаты эквивалентной частицы ξ, η, ζ связаны с безразмерным импульсом электрона $\vec{\rho} = \mathbf{p}/mc$ соотношениями $\xi = \sqrt{\beta^2 - 1}\,\rho_x$, $\eta = \sqrt{\beta^2 - 1}\,\rho_y$, $\zeta = \beta\rho_z - \sqrt{1 + \rho^2}$.

3. Мы рассмотрим здесь только продольные колебания плазмы, для которых $\mathbf{E} \| \mathbf{v} \| \mathbf{i}$, $\mathbf{H} = 0$. Исключая из (1) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{p}$, получим следующее уравнение для безразмерной скорости $u = v/c$:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\frac{1-\beta u}{\sqrt{1-u^2}} = \omega_0^2 \frac{\beta^2 u}{\beta - u}, \tag{4}$$

где $\tau = t - z/V$. Плотность электронов n связана с u соотношением

$$n = \frac{n_0 \beta}{\beta - u}. \tag{5}$$

Интегрирование (4) дает:

$$\int_0^u \frac{(\beta - u)\,du}{(1-u^2)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-u_m^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}}} = \sqrt{2}\,\beta\omega_0\tau, \tag{6}$$

где u_m — максимальное значение u.

Формула (6) в принципе решает поставленную задачу, определяя u как функцию τ. Эта функция является периодической.

Частота $\omega = 2\pi/T$ (T — период функции) определяется формулой

$$\omega = \frac{\pi}{2}\omega_0 \frac{\sqrt{1-k^2}}{2E - (1-k^2)K}, \tag{7}$$

где $k = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-u_m^2}}{1+\sqrt{1-u_m^2}}}$, $E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$, $K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$.

Отсюда можно показать, что при малых амплитудах скорости

$$\omega = \omega_0 (1 - {}^3/_{16}\, u_m^2), \quad u_m \ll 1. \tag{8}$$

При больших амплитудах скорости

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\omega_0 (1-u_m^2)^{1/4}, \quad 1 - u_m^2 \ll 1. \tag{9}$$

При $u_m \to 0$ частота переходит в ω_0. При $u_m \to 1$ частота стремится к нулю. Это объясняется тем, что масса электрона стремится при $u_m \to 1$ к бесконечности.

Электрическое поле $E(\tau)$ связано с u соотношением

$$eE(\tau) = \pm m\omega_0 c \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-u_m^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}}. \tag{10}$$

Максимальное значение поля при $u_m \ll 1$ пропорционально u_m, а при u_m, близком к единице, равно

$$eE_m = m\omega_0 c (1-u_m^2)^{-1/4}. \tag{11}$$

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность акад. Л. Д. Ландау за советы и дискуссию и проф. Н. И. Ахиезеру за указания, связанные с применением эллиптических функций.

Поступило
12 II 1955

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ахиезер, Г. Любарский, ДАН, 80, 193 (1951).